die Gesetze des Rollens (§ 101) und die vorige Entwickelung beachtet:

$$191)\begin{cases} Q_{(e)} = \frac{Q}{a} \cdot [a . \sin\alpha - \cos\alpha . (\mu' . a' + \chi)] \\ = Q . \cos\alpha . \left(\operatorname{tang}\alpha - \frac{\mu' . a + \chi}{a}\right). \end{cases}$$

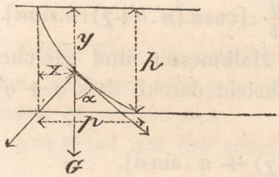
Ist nun $J_{\prime} = M' . \varrho_{\prime}^{2}$ das Trägheitsmoment der Räder, und $M$ die Gesammtmasse des ganzen Systems, so ist nach Gleichung 177) das Aenderungsmaafs der fortschreitenden Bewegung:

$$191\,a)\begin{cases} f = Q . \cos\alpha . \left(\operatorname{tang}\alpha - \frac{\mu' . a' + \chi}{a}\right) . \frac{a^2}{J_{\prime} + M . a^2} \\ = g . \frac{\cos\alpha . \left(\operatorname{tang}\alpha - \frac{\mu' . a' + \chi}{a}\right)}{1 + \frac{J_{\prime}}{M . a^2}} \end{cases}$$

indem man nämlich $Q = Mg$ setzt.

Reibungswiderstände beim Gleiten eines festen Systems auf einer Kurve, unter Einwirkung der Schwere.

§ 104. Denken wir ein festes System, welches durch die Schwere gleitet. Die Gleichung der Kurve sei für horizontale und vertikale Koordinatenaxen gegeben, und es mögen $y$ die vertikalen Ordinaten bedeuten. Zerlegen wir das Gewicht des Systems nach der Tangente zur Kurve und normal dazu, so ist die Kraft, mit welcher das Stück gleitet nach § 97. S. 202




$$G . \cos\alpha - \mu . G . \sin\alpha,$$

wenn $\alpha$ der Winkel ist, welcher die Tangente zur Kurve mit der Richtung der Schwere macht. Es ist folglich die Arbeit, welche die Schwere verrichtet, indem das Stück das Kurvenelement $ds$ durchläuft:

$$G . (ds . \cos\alpha - \mu . ds . \sin\alpha).$$

Nun ist aber offenbar $ds . \cos\alpha = dy$ und $ds . \sin\alpha$, ist die Projektion des Kurvenelementes auf die Horizontalebene; bezeichnen wir dieses Projektionselement mit $dp$, so ist das Leistungselement:

$$G . (dy - \mu . dp),$$

folglich die Gesammtleistung:

$$G\int(dy - \mu . dp),$$

welches Integral zwischen den entsprechenden zusammengehörigen Werthen von $y$ und $p$ zu nehmen ist. Sind $x'$ und $p'$ und $x''$ und

$p''$ solche zusammengehörigen Werthe, so ist die Leistung der Schwere auf das bewegliche System, indem dasselbe aus der einen Lage in die andere übergeht.

$$192)\quad G\int(dy - \mu . dp) = G.(y' - y'') - \mu . G.(p' - p'') \\ = G.[y' - y'' - \mu . (p' - p'')].$$

Diese Gleichung drückt folgendes merkwürdige Gesetz aus:

Wenn ein festes System durch die Schwere bewegt aus einer horizontalen Ebene in eine andere übergeht, indem es auf einer beliebigen Kurve gleitet, so ist die Arbeit der gleitenden Reibung immer gleich dem Produkt aus dem Gewicht, multiplizirt mit dem Reibungs-Koeffizienten und der Projektion des durchlaufenen Kurvenstückes auf eine Horizontalebene.

Ist $v''$ die Geschwindigkeit, welche das System in dem Punkte besitzt, dessen vertikale Ordinate $y''$ ist, und $v'$ die Geschwindigkeit des Systems in dem Punkte, dessen vertikale Ordinate $y'$ ist, so hat man nach Gleichung 49):

$$G . (y' - y'') - \mu . G . (p' - p'') = \tfrac{1}{2} M . (v'^2 - v''^2),$$

folglich (da $G = Mg$ ist):

$$192a)\quad \begin{cases} (y' - y'') = \dfrac{v'^2 - v''^2}{2g} + \mu . (p' - p'') \\ v' = \sqrt{\left\{2g . [y' - y'' - \mu . (p' - p'')] + v''^2\right\}}. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen kann man die Höhe finden $(y' - y'')$, welche einer gegebenen Endgeschwindigkeit $v'$ entspricht, oder die Endgeschwindigkeit $v'$, welche einer gewissen Fallhöhe $(y' - y'')$ entspricht.

Die Höhe $y' - y''$ pflegt man die Geschwindigkeitshöhe zu nennen; durch die Reibung wird die Geschwindigkeitshöhe um das Stück $\mu(p' - p'')$ vermindert. Dieses Stück nennt man den Verlust an Geschwindigkeitshöhe, und es folgt hieraus der Satz:

Wenn ein System durch die Schwere bewegt gleitend von einem höher gelegenen Punkte in einen tiefer gelegenen hinabsinkt, so ist der Verlust an Geschwindigkeitshöhe gleich dem Reibungs-Koeffizienten multiplizirt mit der Horizontalprojektion des gleitend durchlaufenen Weges, und es ist dabei ganz gleichgiltig, welche Form dieser Weg selbst hat.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeitshöhe oder den Vertikalabstand der beiden Punkte mit $h$, die Projektion des durchlaufenen Weges auf eine Horizontalebene mit $p$, so gehen die Gleichungen über in:

$$\text{192b)}\quad \begin{cases} L\ (\text{Leistung}) = G\,.\,(h - \mu p) \\ h = \dfrac{v'^2 - v''^2}{2g} + \mu p \\ v' = \sqrt{\left\{2g\,.\,(h - \mu p) + v''^2\right\}}. \end{cases}$$

Wenn dagegen ein festes System der Schwere entgegen sich mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit $v''$ aufwärts bewegt, so ergiebt sich leicht die Steighöhe:

$$\text{192c)}\quad \begin{cases} h = \dfrac{v''^2 - v'^2}{2g} - \mu p \\ \text{und die Geschwindigkeit in einer gewissen Höhe} \\ v' = \sqrt{\left\{v''^2 - 2g\,.\,(h + \mu p)\right\}}. \end{cases}$$

**Reibungswiderstände beim Gleiten eines festen Systems auf einer Kurve, wenn dasselbe mit einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit sich bewegt, und sonst keine bewegenden Kräfte auf dasselbe einwirken.**

§ 105. Gestalten wir nunmehr die Aufgabe anders: Es bewege sich ein festes System ohne Einwirkung der Schwere auf einer beliebigen Kurve, indem es in irgend einem Punkte der Kurve die Tangentialgeschwindigkeit $c$ hat: welchen Einfluſs hat die Reibung auf die Aenderung der Geschwindigkeit $c$, wenn auch sonst keine bewegenden Kräfte auf das System einwirken?

Es sei in nebenstehender Figur $ds = ab$ ein beliebiges Element der Kurve; $ac$ und $bc$ seien Normalen im Anfangs- und Endpunkte dieses unendlich kleinen Elementes, so ist der Durchschnittspunkt dieser beiden Normalen der Mittelpunkt des Krümmungskreises des Elementes; den veränderlichen Winkel, welchen die Normalen zur Kurve mit einer beliebigen Axe z. B. $AB$ bilden, nennen wir $\alpha$, dann ist Winkel $ed'b = edb' = \alpha + d\alpha$, da $ad$ und $bd$ zwei unendlich nahe liegende Normalen sind: mithin ist Winkel $adb' = acb = d\alpha$. Nun können wir die Bewegung in dem Kurvenelement hervorgebracht denken durch eine Normalkraft, welche das gleitende Stück gegen die Kurve preſst, durch den Widerstand derselben aufgehoben