$$184\text{a)}\quad \begin{cases} Q_I = \dfrac{(P+G).(L-a)+(P'+G').(L-a')}{L} + \tfrac{1}{2}G'' \\ Q_{II} = \dfrac{(P+G).a+(P'+G').a'}{L} + \tfrac{1}{2}G'' \end{cases}$$

$$\text{und } Q_I + Q_{II} = P + P' + G + G' + G'' = Q,$$

folglich:

das statische Moment der Reibung:

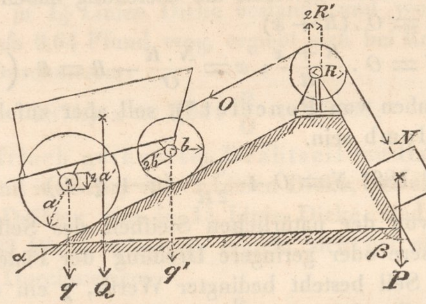
$$\mathfrak{R}.Q,$$

und daher der Werth von P an der Grenze des Gleichgewichts:

$$P = P'.\frac{R'}{R} + Q.\frac{\mathfrak{R}}{R}.$$

Gleichgewicht an der Rolle — Steifheit der Seile; Gleichgewicht auf zwei geneigten Ebenen — Wagenrollen.

§ 103. Es seien zwei geneigte Ebenen gegeben, deren Neigungswinkel gegen die Horizontale α und β sind, auf der einen bewegt sich ein Wagen, dessen Ladung Q ist, auf der andern ein gleitendes Gewicht P. Beide sind durch ein Seil verbunden, das über eine Rolle vom Halbmesser R geht, die in Zapfen ruht, deren



Halbmesser $R_{,}$ ist. Die Räder des Wagens haben die Halbmesser a und b und die Zapfenhalbmesser a' und b', die Last Q vertheilt sich auf die beiden Räder, so daſs das Rad a die Last q, das Rad b die Last q' zu tragen hat. Die Seilenden sind parallel mit den geneigten Ebenen.

Unter welchen Bedingungen ist das System im Grenzzustande des Gleichgewichts?

1. Gleichgewicht an der Rolle.

Die Spannungen der Seilenden seien N und O. Wir wollen annehmen, daſs die Bewegung im Sinne des Gewichtes P oder der

Spannung N eintreten könne, und nennen dann die Spannung N die **Kraft**, die Spannung O dagegen die **Last.**

Wäre das Seil vollkommen biegsam, so würde die Kraft und die Last jede an einem Hebelsarm wirken, der gleich R ist. Erfahrungsmäfsig aber bewirkt der Widerstand, den die Steifheit des Seils bei dem Auflegen auf die Rolle darbietet, dafs sich dasselbe ein wenig von der Rolle absperrt und auf diese Weise den Hebelsarm der Last vergröfsert. Dieser gröfsere Werth des Hebelsarms der Last sei $(R + x)$. Nach Versuchen von Eytelwein ist $x = \frac{\delta^2}{2}$ zu setzen, wenn man unter δ den Durchmesser des Seils in Zollen, unter R den Halbmesser der Rolle in Fufsen versteht, oder

$$185) \quad x = \frac{1}{3500} \cdot \delta^2$$

wenn δ in preufsischen Linien,
R in preufsischen Fufsen

genommen wird.

Man würde also mit Vernachlässigung der Zapfenreibung für den Zustand des Gleichgewichts die Gleichung haben:

$$185a) \quad \begin{cases} N \cdot R = O \cdot (R + x) \\ N = O \cdot \frac{R + x}{R}; \; x = \frac{N \cdot R}{O} - R = R \cdot \left(\frac{N}{O} - 1\right). \end{cases}$$

Nach Angaben von Poncelet*), soll aber zufolge von Versuchen von Coulomb sein.

$$186) \quad N = O + \frac{\delta^\psi}{2R} \cdot (\varphi + \chi \cdot O)$$

worin φ ein von der natürlichen Steifheit des Seils abhängiger, durch die gröfsere oder geringere Drehung der Fäden und Litzen aus denen das Seil besteht bedingter Werth, χ ein ebenfalls konstanter, auf die Zunahme der Steifheit durch die Belastung O sich beziehender Koeffizient, und ψ ein Exponent der sich mit dem augenblicklichen Zustande des Seils ändert, sein soll. Hiernach würde man haben, indem man den Werth N in die Gleichung:

$$x = R \cdot \left(\frac{N}{O} - 1\right)$$

einsetzt:

$$186a) \quad x = \frac{\delta^\psi}{2} \cdot \left(\frac{\varphi}{O} + \chi\right).$$

---

*) Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen von J. V. Poncelet, deutsch herausgegeben von Dr. C. H. Schnuse I, § 197.

Wenn man δ in preufsischen Linien und R in preufsischen Fufsen, O in preufsischen Pfunden nimmt, so ergiebt sich nach den Coulomb'schen Versuchen:

$$\text{für neue Seile } x = \delta^{1,74} \cdot \left(\frac{1,19}{O} + 0,05\right)$$

$$\text{für alte Seile } x = \delta^{1,4} \cdot \left(\frac{0,57}{O} + 0,012\right).$$

Nach den Versuchen von Weisbach, welche derselbe in seiner Ingenieur und Maschinen-Mechanik Th. I, § 181 mittheilt, berechnet sich unter denselben Voraussetzungen der Maafs- und Gewichtseinheiten:

1) Für ein getheertes Hanfseil von 19,2 Linien Stärke, gelegt um Scheiben von 4 bis 6 Fufs Durchmesser:

$$187)\quad x = 3,2 \cdot \frac{R}{O} + 0,018;$$

2) für ein neues ungetheertes Hanfseil von 9 Linien Stärke und eine Rolle von $1\frac{3}{4}$ Fufs Durchmesser:

$$187a)\quad x = 0,18 \cdot \frac{R}{O} + 0,0052;$$

3) für ein Drahtseil von 8 Linien Dicke, welches aus 16 Drähten von je $1\frac{1}{2}$ Linien Dicke bestand, und wovon jeder laufende Fufs 0,64 Pfund wog, ergiebt sich bei Rollen von 4 bis 6 Fufs Durchmesser:

$$187b)\quad x = 1,04 \cdot \frac{R}{O} + 0,0067;$$

4) für ein frisch getheertes Drahtseil mit Hanfseelen in den Litzen und im Seile, von 7 Linien Dicke, bestehend aus 4 mal $4 = 16$ Drähten von je $1\frac{1}{5}$ Linie Dicke, und pro laufenden Fufs 0,63 Pfund wiegend, ergiebt sich bei einer Rolle von $1\frac{3}{4}$ Fufs Durchmesser:

$$187c)\quad x = 1,30 \cdot \frac{R}{O} + 0,00022.$$

Nachdem auf die eine oder die andere Weise der Werth von x bestimmt ist, ergiebt sich das Moment der Last $= O(\mathfrak{R} + x)$.

Die Spannung N hat aber aufser dem Moment der Last O noch dasjenige der Reibung zu überwinden. Nennen wir den, aus der Form des Zapfens und des Bogens zu bestimmenden, Hebelsarm der Reibung $\mathfrak{R}$ (§ 98, S. 203), und den Reibungswerth Θ, so ist das Moment der Reibung $\Theta\mathfrak{R}$, folglich haben wir die Gleichung für den Grenzzustand der Bewegung:

$$188)\quad NR = O(R + x) + \Theta\mathfrak{R},$$

oder da offenbar die Resultirende aus dem Druck N und dem Druck

O der „Reibung erzeugende Druck" ist, die Richtungen von N und O, wie eine leichte Betrachtung der Figur zeigt, einen Winkel einschliefsen, der gleich $(\beta - \alpha)$ ist, so ist:

$$188\text{a)}\quad \Theta = \mu \,.\, \sqrt{\left\{N^2 + O^2 + 2N.O.\cos(\beta - \alpha)\right\}}.$$

Indem wir diesen Werth in die vorige Gleichung einsetzen, $O(R + x)$ auf die linke Seite schaffen, dann beide Seiten quadriren und nach N auflösen, ergiebt sich:

$$188\text{b)}\quad N = O.\frac{R.(R+x)+\mu^2.\mathfrak{R}^2.\cos(\beta-\alpha)}{R^2-\mu^2.\mathfrak{R}^2}.\left\{1 \pm \sqrt{\left[1-\frac{[R^2-\mu^2.\mathfrak{R}^2].[(R+x)^2-\mu^2.\mathfrak{R}^2]}{[R.(R+x)+\mu^2.\mathfrak{R}^2.\cos(\alpha+\beta)]^2}\right]}\right\}.$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen wird in dem am häufigsten vorkommenden Fällen sehr klein, so dafs man ihn vernachlässigen kann. Die Gleichung für N geht dann über in:

$$188\text{c)}\quad N = O.\frac{R.(R + x) + \mu^2.\mathfrak{R}^2.\cos(\beta - \alpha)}{R^2 - \mu^2.\mathfrak{R}^2}.$$

Diese Gleichung giebt das Verhältnifs zwischen N und O für den Grenzzustand des Gleichgewichts. Nun ist aber offenbar:

$$N = P.[\sin(180 - \beta) - \mu.\cos(180 - \beta)].$$

$$188\text{d)}\quad N = P.(\sin\beta + \mu.\cos\beta) = P.\cos\beta.(\text{tang}\,\beta + \mu)$$

und O ist durch folgende Betrachtung zu finden:

2. Gleichgewicht des Wagens auf der geneigten Ebene.

Die Drucke q und q', welche jede der Wagenaxen zu tragen hat, zerlegen wir parallel mit der geneigten Ebene und normal dazu; es ergiebt sich:

parallel mit der geneigten Ebene

$$q.\sin\alpha \text{ und } q'.\sin\alpha,$$

normal zu derselben

$$q.\cos\alpha \text{ und } q'.\cos\alpha.$$

Die letztgenannten Drucke werden durch den Widerstand des fixen Systems aufgehoben, sie erzeugen aber Reibungswiderstände in den Axen, deren Momente (wenn man den Hebelsarm der Reibung nach Gleichung 169d, S. 211, gleich dem Halbmesser der Rollen setzt), sich ausdrücken durch:

$$\mu'.q.\cos\alpha.a' \text{ und } \mu'.q'.\cos\alpha.b'$$

indem man nämlich unter μ' den Reibungs-Koeffizienten für die Axreibung versteht. Die Kräftepaare, die durch diese Momente dargestellt werden, lassen sich auf zwei parallele und entgegengesetzte Kräfte zurückführen, die parallel mit der betreffenden geneigten Ebene sind, und von denen die eine durch den Mittelpunkt der Räder, die andere durch den Berührungspunkt derselben geht. Diese Drucke wirken dem Rollen entgegen, müssen also von der Spannung O überwunden werden, sie sind, absolut betrachtet:

$$\mu' . q . \cos\alpha . \frac{a'}{a} \text{ und } \mu' . q' . \cos\alpha . \frac{b'}{b} .$$

Wenden wir nun die Gesetze des Rollens an, so ist der Druck, welcher im Mittelpunkt der Axe wirksam, parallel mit der geneigten Ebene dem Aufwärtsrollen widersteht, nach Gleichung 178b S. 227, und wenn wir die Richtung aufwärts als positiv betrachten, in jedem Rade:

$$189)\quad -\frac{q . \sin\alpha . a}{a} - \frac{q . \cos\alpha . \chi}{a} \text{ und } -\frac{q' . \sin\alpha . b}{b} - \frac{q' . \cos\alpha . \chi}{b},$$

wobei die rollende Reibung, die dem Rollen immer entgegenwirkt, mit entsprechendem Vorzeichen genommen ist. Soll nun der Druck O dem Grenzzustande für eine Bewegung des Wagens aufwärts entsprechen, so mufs sein:

$$189\text{a})\quad O - \left(\mu' . q . \cos\alpha . \frac{a'}{a} + \mu' . q' . \cos\alpha . \frac{b'}{b} + \frac{q . \sin\alpha . a}{a} + \frac{q . \cos\alpha . \chi}{a} + \frac{q' . \sin\alpha . b}{b} + \frac{q' . \cos\alpha . \chi}{b}\right) = 0.$$

Daher:

$$189\text{b})\quad O = \frac{q}{a} . [\cos\alpha . (\mu' . a' + \chi) + a . \sin\alpha] + \frac{q'}{b} . [\cos\alpha . (\mu' . b' + \chi) + b . \sin\alpha].$$

Wenn sämmtliche Räder gleiche Halbmesser und gleiche Zapfenhalbmesser haben, so folgt, mit Rücksicht darauf, dafs $q + q' = Q$ ist:

$$189\text{c})\quad O = \frac{Q}{a} . [\cos\alpha\, (\mu' . a' + \chi) + a . \sin\alpha].$$

Setzt man diesen letzten Werth, den wir der Kürze wegen beibehalten wollen, in den Werth für N (Gleichung 188c), so ergiebt sich schliefslich, mit Rücksicht auf Gleichung 188d):

$$190)\quad \frac{P}{Q} = \frac{[\cos\alpha . (\mu' . a' + \chi) + a . \sin\alpha]\ [R . (R + x) + \mu^2 . \mathfrak{R}^2 . \cos(\beta - \alpha)]}{a . (R^2 - \mu^2 . \mathfrak{R}^2) . \cos\beta . (\operatorname{tang}\beta + \mu)}.$$

Mit Vernachlässigung aller passiven Widerstände würde sich ergeben:

$$190\text{a})\quad \frac{P}{Q} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Wäre der Wagen auf der geneigten Ebene frei, und könnte durch seine Ladung Q herabrollen, so wäre der Druck, welcher auf Herabrollen wirkt, wie sich leicht entwickeln läfst, indem man die Gesetze des Rollens (§ 101) und die vorige Entwickelung beachtet:

$$191)\quad \begin{cases} Q_{(e)} = \dfrac{Q}{a}\,.\,[a.\sin\alpha - \cos\alpha\,.\,(\mu'.a' + \chi)] \\ \quad = Q\,.\cos\alpha\,.\left(\operatorname{tang}\alpha - \dfrac{\mu'.\alpha + \chi}{a}\right). \end{cases}$$

Ist nun $J_{,} = M'\,.\,\varrho_{,}^{2}$ das Trägheitsmoment der Räder, und M die Gesammtmasse des ganzen Systems, so ist nach Gleichung 177) das Aenderungsmaafs der fortschreitenden Bewegung:

$$191\,a)\quad \begin{cases} f = Q\,.\cos\alpha\,.\left(\operatorname{tang}\alpha - \dfrac{\mu'.a' + \chi}{a}\right).\,\dfrac{a^2}{J_{,} + M\,.\,a^2} \\ \quad = g\,.\,\dfrac{\cos\alpha\,.\left(\operatorname{tang}\alpha - \dfrac{\mu'.a' + \chi}{a}\right)}{1 + \dfrac{J_{,}}{M\,.\,a^2}} \end{cases}$$

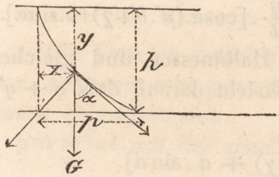
indem man nämlich $Q = Mg$ setzt.

Reibungswiderstände beim Gleiten eines festen Systems auf einer Kurve, unter Einwirkung der Schwere.

§ 104. Denken wir ein festes System, welches durch die Schwere gleitet. Die Gleichung der Kurve sei für horizontale und vertikale Koordinatenaxen gegeben, und es mögen y die vertikalen Ordinaten bedeuten. Zerlegen wir das Gewicht des Systems nach der Tangente zur Kurve und normal dazu, so ist die Kraft, mit welcher das Stück gleitet nach § 97. S. 202

$$G\,.\cos\alpha - \mu\,.\,G\,.\sin\alpha,$$

wenn α der Winkel ist, welcher die Tangente zur Kurve mit der Richtung der Schwere macht. Es ist folglich die Arbeit, welche die Schwere verrichtet, indem das Stück das Kurvenelement ds durchläuft:



$$G\,.\,(ds\,.\cos\alpha - \mu\,.\,ds\,.\sin\alpha).$$

Nun ist aber offenbar $ds\,.\cos\alpha = dy$ und $ds\,.\sin\alpha$, ist die Projektion des Kurvenelementes auf die Horizontalebene; bezeichnen wir dieses Projektionselement mit dp, so ist das Leistungselement:

$$G\,.\,(dy - \mu\,.\,dp),$$

folglich die Gesammtleistung:

$$G\int(dy - \mu\,.\,dp),$$

welches Integral zwischen den entsprechenden zusammengehörigen Werthen von y und p zu nehmen ist. Sind x' und p' und x'' und