Anwendungen der Reibungsgesetze: Balkenschub — Quetschwalzen — Axenreibung.

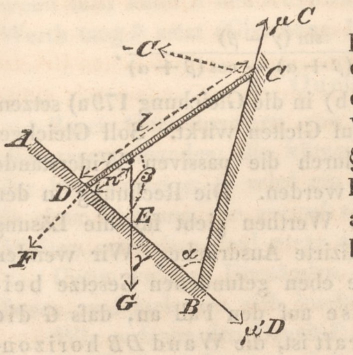
§ 102. Die in dem vorigen Paragraphen entwickelten Gesetze wollen wir auf einige bestimmte Fälle anwenden, indem wir einige der am häufigsten vorkommenden Aufgaben besprechen.

1. Balkenschub.

Ein Stab oder ein Balken ist zwischen zwei Wände gelegt, die den Winkel $ABC = \alpha$ einschliefsen; die Länge des Stabes ist l, und in dem Abstande n von dem einen Ende wirke eine Kraft G auf den Stab; gegeben ist die Neigung des Stabes gegen die eine Wand AB durch den Winkel $CDB = \beta$ und die Richtung der Kraft G durch den Winkel $BEG = \gamma$, welchen die Kraftrichtung G mit derselben Wand macht; zu ermitteln ist:

1) wie kann sich der Stab verschieben?
2) welche Kraft ist parallel mit der Wand AB erforderlich, um den Stab im Gleichgewicht zu halten? und
3) welchen Werth mufs der Winkel β haben, damit der Stab durch die Reibungswiderstände und den Widerstand des fixen Systems allein im Gleichgewicht gehalten werde?

Die Verschiebung des Stabes kann nur durch die bewegende Kraft G erfolgen, und zwar dadurch, dafs der Angriffspunkt dieser Kraft in dem Sinne desselben fortrückt; man sieht, dafs dabei der Stab mit seinen beiden Enden gleiten mufs, und zwar das Ende D nach A hin, das Ende C nach B hin. Durch den Widerstand des fixen Systems werden dabei in den Punkten C und D Kräfte aufgehoben, welche normal zu den Richtungen des Gleitens, und die daher Reibung erzeugende Drucke sind; diese Kräfte bezeichnen wir mit C und D, dann entstehen in den Punkten C und D die Reibungswiderstände μC und $\mu' D$, wenn μ und μ' die betreffenden Reibungs-Koeffizienten sind. Diese Reibungswiderstände wirken in Richtungen, die der Verschiebung entgegengesetzt sind. Offenbar wird in dem Zustande des Systems nichts geändert, wenn wir in dem Punkte C das fixe System fortgenommen, und dafür die durch dasselbe herbeigeführten Widerstände, nämlich die Reibung μC und den, dem aufgehobenen Druckantheil gleichen und entgegengesetzten Widerstand $-C$ als angebrachte Kräfte wirksam denken. Nun verfahren wir nach der Methode des § 97, indem wir die sämmtlichen Kräfte nach der Richtung des Gleitens des Punktes D und normal dazu zerlegen. Die Summe der Normaldrucke giebt den Reibung erzeugenden Druck D.



Indem wir die Richtung DA als positiven Zweig der **ersten** Axe, die Richtung DF als positiven Zweig der **zweiten** Axe ansehen, und die Winkel bestimmen, welche nach § 77 die Kraftrichtungen mit der Richtung DA bilden, finden wir als auf das bewegliche System angebrachten Kräfte:

1) die bewegende Kraft G unter dem Winkel $(180^\circ - \gamma)$;

2) den **Widerstand** des fixen Systems in dem andern Stützpunkte als Kraft C unter dem Winkel $(90^\circ - \alpha)$;

3) den Reibungswiderstand μC unter dem Winkel $(360^\circ - \alpha)$.

Es ist mithin der in dem Punkte D **Reibung erzeugende** Normaldruck:

$$D = G . \sin(180^\circ - \gamma) + C . \sin(90^\circ - \alpha) + \mu C . \sin(360^\circ - \alpha).$$

$$179) \begin{cases} D = G . \sin\gamma + C . \cos\alpha - \mu C . \sin\alpha \\ \quad = G . \sin\gamma + C . \sin\alpha . (\text{cotang}\,\alpha - \mu) \end{cases}$$

und der auf Gleiten des Punktes D wirkende Druck:

$$K = G . \cos(180^\circ - \gamma) + C . \cos(90 - \alpha) + \mu C . \cos(360^\circ - \alpha) - \mu' D.$$

$$179\text{a}) \begin{cases} K = -G . \cos\gamma + C . \sin\alpha + \mu . C . \cos\alpha - \mu' D \\ \quad = -G . (\cos\gamma + \mu' . \sin\gamma) + C . \sin\alpha . [1 + \text{cotang}\,\alpha . (\mu - \mu') + \mu . \mu']. \end{cases}$$

Hierdurch würde der Druck K, der auf Gleiten des Punktes D wirkt bestimmt, und folglich auch der gleich grofse aber entgegengesetzt im Punkte D, parallel mit AB anzubringende Druck, der erforderlich ist, um das System im Gleichgewicht zu halten, bekannt sein, wenn der Druck C bekannt wäre. Um den Druck C zu ermitteln dient die Momenten-Gleichung. Denn nehmen wir den Punkt D als Anfangspunkt des Koordinatensystems, so haben die Koordinaten der Angriffspunkte von G, C und μC folgende Werthe:

Die Koordinaten des Angriffspunktes von G sind

$$x = n . \cos\beta; \quad y = n . \sin\beta,$$

die Koordinaten des Punktes C sind

$$x' = l . \cos\beta; \quad y = l . \sin\beta,$$

und folglich hat man für das Gleichgewicht gegen Kippen:

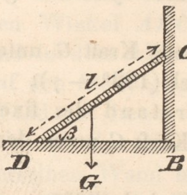
$$G . \sin\gamma . x - G . \cos\gamma . y + (C . \cos\alpha - \mu . C . \sin\alpha) . x' + (C . \sin\alpha + \mu . C . \cos\alpha) . y' = 0$$

$$G . n . (\sin\gamma . \cos\beta - \cos\gamma . \sin\beta) + C . l . (\cos\alpha . \cos\beta - \mu . \sin\alpha . \cos\beta + \sin\alpha . \sin\beta + \mu . \cos\alpha . \sin\beta) = 0,$$

folglich:

$$179\text{b})\quad C = \frac{n}{l} \cdot G \cdot \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\mu \cdot \sin(\beta + \alpha) - \cos(\beta + \alpha)}.$$

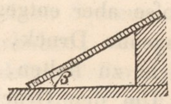
Indem wir nun den Werth 179b) in die Gleichung 179a) setzen, ergiebt sich der Druck, welcher auf Gleiten wirkt. Soll Gleichgewicht vorhanden sein, lediglich durch die passiven Widerstände allein, so muſs dieser Druck Null werden. Die Rechnung in den allgemeinen Werthen giebt für die Lösung sehr komplizirte Ausdrücke. Wir wenden dagegen die eben gefundenen Gesetze beispielsweise auf den Fall an, daſs G die Schwerkraft ist, die Wand DB horizontal, die Wand BC vertikal und $\mu = \mu'$ ist; dann ist $\alpha = 90^0$; $\gamma = 90^0$ folglich:



$$180)\quad \begin{cases} C = \dfrac{n}{l} \cdot G \cdot \dfrac{1}{\operatorname{tang}\beta + \mu} \\ D = G \cdot \left(1 - \dfrac{n}{l} \cdot \dfrac{\mu}{\operatorname{tang}\beta + \mu}\right) \\ K = G \cdot \left(\dfrac{n}{l} \cdot \dfrac{1 + \mu^2}{\operatorname{tang}\beta + \mu} - \mu\right). \end{cases}$$

Soll nun das System durch die passiven Widerstände allein im Gleichgewicht sein, so ist $K = 0$, folglich:

$$180\text{a})\quad \operatorname{tang}\beta = \frac{n}{l} \cdot \frac{1 + \mu^2}{\mu} - \mu.$$



Wenn dagegen der Balken l in den Punkt C nur aufliegen soll, nicht angestützt ist, so ist in den obigen Gleichungen zu setzen $\alpha = 180^0 - \beta$ und man hat nach Gleichung 179), 179a) und 179b):

$$181)\quad \begin{cases} C = \dfrac{n}{l} \cdot G \cdot \cos\beta \\ D = G \cdot \left\{1 - \dfrac{n}{l}\ (\cos\beta^2 + \mu \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta)\right\} \\ K = G \cdot \left\{\dfrac{n}{l} \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta \cdot (1 + \mu^2) - \mu\right\}. \end{cases}$$

Wenn Gleichgewicht durch die passiven Widerstände allein statt finden soll, so muſs $K = 0$ sein, und dann folgt:

$$181\text{a})\quad \begin{cases} \sin\beta \cdot \cos\beta = \tfrac{1}{2}\sin 2\beta = \dfrac{l}{n} \cdot \dfrac{\mu}{1 + \mu^2} \\ \sin 2\beta = \dfrac{l}{n} \cdot \sin 2\vartheta, \end{cases}$$

wenn man unter ϑ den Reibungswinkel versteht, und für μ den Werth tang ϑ setzt (Gleichung 166a, S. 203).

2. Quetschwalzen.

Zwei Quetschwalzen von gleichen Halbmessern r bewegen sich gegen einander; die kürzeste Entfernung der Peripherien beider Walzen sei e; es wird ein Stück A, dessen Dicke $ab = \delta$ ist in einer Richtung, die normal zur Centrallinie ist gegen die beiden Walzen geschoben, und zwar mit einem Druck P.

Unter welchen Umständen werden die Walzen das Stück erfassen, und zwischen sich hindurchziehen?

Wir zerlegen den Druck P in zwei parallele Drucke, die durch die Berührungspunkte a und b gehen, und von denen jeder $= \frac{1}{2}P$ ist. Nun haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich:

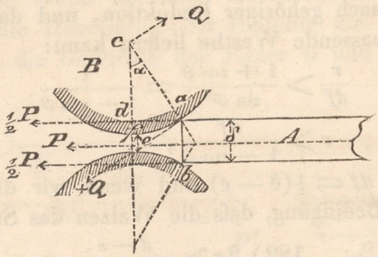
a) entweder das Stück A ist absolut fest, und unterliegt keiner Formveränderung, oder:

b) das Stück A läſst sich komprimiren, und die Dicke desselben ab kann vermindert werden.

Im ersten Falle ist gar keine Vorwärtsbewegung des Stückes A gegen die Walzen möglich, der ganze Druck $\frac{1}{2}P$ wird in jedem Berührungspunkt aufgehoben, und es bildet sich ein Reibungswerth $\mu \cdot \frac{1}{2}P$, in a und b normal zur Richtung von P, dessen Hebelsarm $r \cdot \sin\alpha$ ist, und welcher also mit dem Moment:

$$\mu \cdot \tfrac{1}{2}P \cdot r \cdot \sin\alpha$$

der Drehung jeder Walze entgegenwirkt.



Im andern Falle dagegen würde das Stück A in der Richtung aQ gegen die Walze (selbst wenn dieselbe still stände) abgleiten können; der Druck W, welcher sich der Formveränderung des Stückes in der Richtung ab entgegensetzt ist also nach dieser Richtung und normal dazu zu zerlegen in die beiden Drucke $W.\sin\alpha$ und $W.\cos\alpha$. Dieser letztgenannte Druck wird durch den Widerstand der Walze aufgehoben, erzeugt daher die Reibung $\mu \,.\, W \,.\, \cos\alpha$, und es bleibt folglich ein Bestreben auf Gleiten, welches sich ausdrückt durch:

$$W \,.\, \sin\alpha - \mu \,.\, W \,.\, \cos\alpha = W \,.\, \cos\alpha \,.\, (\tan\alpha - \mu).$$

Ist $\tan\alpha > \mu$ so wird das System A mit einem der Richtung aQ entgegengesetzten Druck gegen die Walzen sich verschieben, wenn aber $\tan\alpha \overline{\overline{<}} \mu$ ist, so wird eine Verschiebung des Stückes A gegen die Walze nicht statt finden, das Stück A wird mit der Walze fest zusammenhängen, und es wird daher das Stück A in Ruhe sein, wenn die Walze in Ruhe ist: dagegen mufs das Stück A der Bewegung der Walze folgen, wenn die Walze sich bewegt. Die Bedingung also, unter welcher das Stück A der Bewegung der Walze folgt, ist gegeben durch die Bedingung, dafs

$$\tan\alpha < \mu \text{ oder } \cot\alpha > \frac{1}{\mu}$$

sei. Nun ist:

$$\cot\alpha = \frac{cd}{da} = \frac{r - df}{\sqrt{[(2r - df) \,.\, df}}.$$

Setzen wir diesen Werth für $\cot\alpha$ ein, so ergiebt sich als Bedingungs-Gleichung:

$$(r - df)^2 > \frac{1}{\mu^2} \,.\, (2r \,.\, df - df^2)$$

$$r^2 - 2r \,.\, df \,.\left(1 + \frac{1}{\mu^2}\right) > - df^2 \,.\left(1 + \frac{1}{\mu^2}\right),$$

und daraus:

$$\frac{r}{df} > \left(1 + \frac{1}{\mu^2}\right) . \left\{1 \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \mu^2}}\right\}.$$

Führen wir anstatt μ den Reibungswinkel ϑ ein, indem wir setzen:

$$\mu = \tan\vartheta,$$

so ergiebt sich nach gehöriger Reduktion, und da nur das positive Zeichen passende Werthe liefern kann:

$$\frac{r}{df} > \frac{1 + \cos\vartheta}{\sin\vartheta^2} = \frac{1}{1 - \cos\vartheta}$$

$$r > \frac{df}{1 - \cos\vartheta},$$

nun ist offenbar $df = \frac{1}{2}(\delta - e)$ und wenn wir dies einsetzen, so ergiebt sich als Bedingung, dafs die Walzen das Stück A mitziehen.

$$182)\quad 2r > \frac{d - e}{1 - \cos\vartheta}$$

d. h. Wenn die Quetschwalzen ein gegen dieselben geführtes Stück erfassen und durchführen sollen, so mufs der Durchmesser der Quetschwalzen gröfser sein, als die Differenz zwischen der Dicke des Stückes und der kürzesten Entfernung der Peripherieen der Walzen, dividirt durch den Sinus versus des Reibungswinkels.

Setzen wir voraus, dafs **kein Gleiten** zwischen den Berührungspunkten a und b und den Walzen statt finden kann, so ist das Stüek A und die Walzen als **ein** zusammenhängendes System zu betrachten; reduziren wir nun das Kräftepaar, welches auf Drehen jeder Walze wirkt auf die beiden Kräfte $+Q$ und $-Q$, so würden die Punkte a und b als Angriffspunkte der Kräfte $+Q$ auf das Stück A zu betrachten sein, und wenn wir die Kraft Q in dem Punkte a in die beiden Komponenten $Q \,.\, \cos\alpha$ und $Q \,.\, \sin\alpha$ zerlegen, so wirkt in dem Punkte A die Kraft:

$$Q \,.\, \cos\alpha + \tfrac{1}{2} P$$

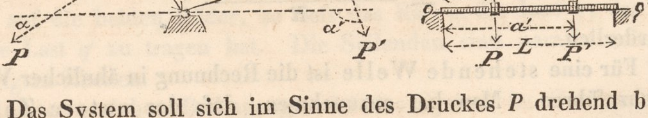
auf unterziehen des Stückes A nach der Richtung der Walzen, und die Kraft:

$$Q \,.\, \sin\alpha,$$

welche durch die ihr gleiche und entgegengesetzte Kraft $-Q.\sin\alpha$ in dem Punkte b im Gleichgewicht gehalten wird, nimmt die Festigkeit des Stückes auf Zerdrücken in Anspruch. Diese Kraft mufs gröfser sein, als die Kraft mit welcher das System A einer Formveränderung widersteht.

3. Axenreibung.

Auf einer liegenden Welle, die in zwei Lagern geht, und deren Länge l ist, sitzen zwei Räder von den Halbmessern R und R' in Entfernungen a und a' von dem einen Endpunkte; an den Peripherieen der Räder wirken die Drucke P und P' in Ebenen, die normal zur Welle sind, aber so, dafs die Drucke mit einer horizontalen, zu der Welle normalen Koordinatenaxe die Winkel α und α' bilden; die Hebelsarme der Reibung für die Wellenzapfen sind $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$; die Gewichte der Räder G und G', das Gewicht der Welle G''.



Das System soll sich im Sinne des Druckes P drehend bewegen, welches ist das **statische Moment der Reibung**? welches **das auf Drehung wirkende Moment**?

Wir haben es hier mit einem System mit fixer Axe zu thun und reduziren die Drucke zunächst auf die fixen Punkte, indem wir durch den ersten fixen Punkt eine **horizontale** (erste) zur Welle normale und eine vertikale (zweite) Axe annehmen. Wir haben mit Rücksicht auf Gleichung 142b), § 79:

$$183)\quad \begin{cases} Q_I' = \dfrac{P.\cos\alpha.(L-a) + P'.\cos\alpha'.(L-a')}{L} \\ Q_I'' = \dfrac{(P.\sin\alpha + G).(L-a) + (P'.\sin\alpha' + G').(L-a')}{L} + \frac{1}{2}G''. \end{cases}$$

$$183a)\quad \begin{cases} Q_{II}' = \dfrac{P.\cos\alpha.a + P'.\cos\alpha'.a'}{L} \\ Q_{II}'' = \dfrac{(P.\sin\alpha + G).a + (P'.\sin\alpha' + G').a'}{L} + \frac{1}{2}G. \end{cases}$$

Hieraus folgt, dafs der resultirende Druck im ersten fixen Punkt ist:

$$183b)\quad Q_I = \sqrt{(Q_I'^2 + Q_I''^2)}$$

und im zweiten fixen Punkt:

$$183c)\quad Q_{II} = \sqrt{(Q_{II}'^2 + Q_{II}''^2)}.$$

Hiernach ist das statische Moment der Reibung:

$$183d)\quad \mathfrak{R}'.Q_I + \mathfrak{R}'.Q_{II}$$

und das auf Drehung wirkende Moment:

$$184)\quad P.R - (P'.R' + Q_I.\mathfrak{R}' + Q_{II}.\mathfrak{R}'').$$

An der Grenze des drehenden Gleitens ist dies Moment gleich Null, wir nennen den Werth von P, welcher dem Grenzzustand des Gleitens entspricht P_0, und es ergiebt sich demnach:

$$184a)\quad \begin{cases} P_0 = \dfrac{P'.R' + Q_I.\mathfrak{R}' + Q_{II}.\mathfrak{R}''}{R} \\ \quad = P'.\dfrac{R'}{R} + \dfrac{Q_I.\mathfrak{R}' + Q_{II}.\mathfrak{R}''}{R}. \end{cases}$$

Mit Vernachlässigung der Zapfenreibung würde man nur haben für den Zustand des Gleichgewichts:

$$P_0 = P'.\frac{R'}{R}$$

es ist folglich zur Ueberwindung der Zapfenreibung im Angriffspunkte von P noch ein Mehrdruck

$$= \frac{Q_I.\mathfrak{R}'' + Q_{II}.\mathfrak{R}''}{R}$$

erforderlich.

Für eine stehende Welle ist die Rechnung in ähnlicher Weise durchzuführen. Man hat anzunehmen, dafs der untere Zapfen den ganzen Vertikaldruck auszuhalten hat.

Wenn die Richtungen von P und P' vertikal, und die Hebelsarme der Reibung für beide Zapfen gleich grofs sind, so hat man $\alpha = \alpha' = 90^0$, und man hat in den beiden fixen Punkten nur Vertikaldrucke, nämlich:

$$184\,a)\quad \begin{cases} Q_I = \dfrac{(P+G).(L-a)+(P'+G').(L-a')}{L} + \frac{1}{2}G'' \\ Q_{II} = \dfrac{(P+G).a+(P'+G').a'}{L} + \frac{1}{2}G'' \end{cases}$$

$$\text{und } Q_I + Q_{II} = P + P' + G + G' + G'' = Q,$$

folglich:

das statische Moment der Reibung:

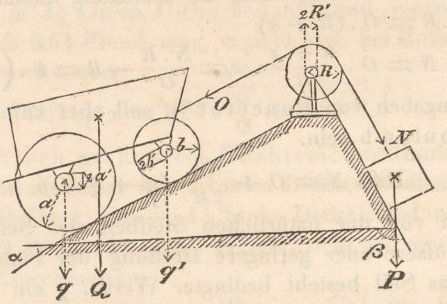
$$\mathfrak{R}\,.\,Q,$$

und daher der Werth von P an der Grenze des Gleichgewichts:

$$P = P'\,.\,\frac{R'}{R} + Q\,.\,\frac{\mathfrak{R}}{R}.$$

Gleichgewicht an der Rolle — Steifheit der Seile; Gleichgewicht auf zwei geneigten Ebenen — Wagenrollen.

§ 103. Es seien zwei geneigte Ebenen gegeben, deren Neigungswinkel gegen die Horizontale α und β sind, auf der einen bewegt sich ein Wagen, dessen Ladung Q ist, auf der andern ein gleitendes Gewicht P. Beide sind durch ein Seil verbunden, das über eine Rolle vom Halbmesser R geht, die in Zapfen ruht, deren



Halbmesser $R_{\prime}$ ist. Die Räder des Wagens haben die Halbmesser a und b und die Zapfenhalbmesser a' und b', die Last Q vertheilt sich auf die beiden Räder, so dafs das Rad a die Last q, das Rad b die Last q' zu tragen hat. Die Seilenden sind parallel mit den geneigten Ebenen.

Unter welchen Bedingungen ist das System im Grenzzustande des Gleichgewichts?

1. Gleichgewicht an der Rolle.

Die Spannungen der Seilenden seien N und O. Wir wollen annehmen, dafs die Bewegung im Sinne des Gewichtes P oder der