

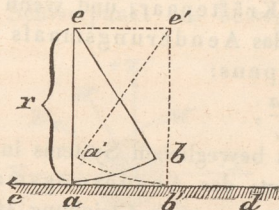
um eine Axe kippt, die stets durch dieselben Punkte des beweglichen Systems geht. Anders ist es, wenn die Möglichkeit des Rollens vorhanden ist.

Gesetze des Rollens; cylindrisches und konisches Rollen. Einfaches und gleitendes Rollen.

§ 101. Wir wollen nunmehr die Gesetze des Rollens untersuchen.

Das Rollen ist, wie im Paragraphen 99. angedeutet worden, eine besondere Art des Kippens, es setzt also immer eine Axe voraus, um welche die Drehung des beweglichen Systems erfolgt, und welche in der Berührungsebene beider Systeme liegt, sowie ein auf Drehung um diese Axe wirkendes Kräftepaar, endlich ist das Rollen durch die Möglichkeit bedingt, daß das bewegliche System auf dem fixen System sich abwickeln könne. Bevor wir hiernach die mechanischen Gesetze dieser Bewegung betrachten, wollen wir folgende Bemerkung hervorheben.

Es sei ab ein Kurvenelement, welches sich auf der Linie cd abwickeln soll, $ae = eb$ sei der Krümmungshalbmesser des Kurvenelements; und nach der Abwicklung sei das Bogenelement in die Lage $a'b'$ gekommen. Offenbar ist die Länge $ab' = ab$ gleich der Länge des Kurvenelements, und es steht sowohl der Krümmungshalbmesser ae , als auch der Krümmungshalbmesser $b'e'$ normal auf cd , da in beiden Lagen und bei dem Uebergange von der einen Lage in die andere das Bogenelement ab fortwährend die Linie cd berühren soll.



Hieraus folgt, daß ee' der Weg, den der Krümmungsmittelpunkt bei der Abwicklung beschrieben hat, nicht nur eine äquidistante Kurve von cd ist, sondern auch gleich der Länge ab' d. i. gleich der Länge des Bogenelementes ab ist. Nun sieht man, daß das Bogenelement aus der Lage abe , die es vor der Abwicklung hatte, in die Lage $a'b'e'$, in die es durch die Abwicklung gelangt ist, auch dadurch gebracht werden kann, daß man sich vorstellt, der Krümmungsmittelpunkt e und alle Punkte des Systems aeb haben zuerst fortschreitend den Weg ee' beschrieben, dessen Länge gleich der Länge des Bogenelementes ab , und dessen Richtung äquidistant der Grundkurve ist, und dann habe das System

eine Drehung gemacht nach einer Richtung, die entgegengesetzt der fortschreitenden Bewegung, und um einen Winkel der gleich demjenigen ist, welchen das Bogenelement einschließt. Hieraus folgt:

Jede Abwälzung eines Kurvenelementes auf einer Grundkurve kann zurückgeführt werden auf eine fortschreitende Bewegung, welche der Krümmungsmittelpunkt mit allen Punkten gemeinschaftlich macht, und auf eine nach entgegengesetzter Richtung erfolgende Drehung um den Krümmungsmittelpunkt, wobei der Berührungspunkt sich mit einer Peripheriegeschwindigkeit drehend bewegt, die gleich der Geschwindigkeit ist, mit welcher das ganze System sich fortschreitend bewegt.

Ist f das Aenderungsmaafs der fortschreitenden Bewegung, f_i das Aenderungsmaafs der drehenden Bewegung um den Krümmungsmittelpunkt, r der Krümmungshalbmesser, so muß zufolge der letzten Bedingung bei vollständiger Abwälzung sein:

$$175) f = -r \cdot f_i.$$

Ist $f \geq -f_i \cdot r$, so findet ein gleitendes Rollen statt, denn wir können uns immer vorstellen, das bewegliche System bewege sich gleitend ohne zu rollen mit einer Geschwindigkeit, deren Aenderungsmaafs dem Ueberschufs von f über $-f_i \cdot r$ entspricht, und dann erfolge die Abwicklung mit dem Aenderungsmaafs $-f_i \cdot r$.

Betrachten wir die drehende Bewegung, welche bei der Abwälzung statt finden muß, und beachten wir, daß wenn ein festes System eine drehende Bewegung macht, dies nur um eine allen Elementen gemeinschaftliche gradlinige Axe und mit einer gemeinschaftlichen Winkelgeschwindigkeit erfolgen kann, so ergibt sich sofort aus dem obigen Satze, daß eine Abwälzung eines festen Systems nur möglich ist, wenn die Mittelpunkte der Krümmungskreise sämtlicher berührenden Kurvenelemente in ein und derselben geraden Linie liegen.

Diese gerade Linie ist entweder parallel mit der Berührungslinie, oder sie schneidet dieselbe, denn: aus dem Begriff der Berührung folgt, daß die beiden festen Systeme eine gemeinschaftliche Berührungsebene haben; die Axe des Rollens liegt in dieser Berührungsebene; die Normalen auf der Berührungsebene,

welche in den einzelnen Punkten der Axe des Rollens errichtet sind, sind auch normal zu dem rollenden System, gehen also durch die Krümmungsmittelpunkte der berührenden Kurvenelemente dieses Systems, und da diese Normalen alle in ein und derselben Ebene liegen (die zur Berührungsebene normal ist, und durch die Axe des Rollens geht), so liegen die Krümmungsmittelpunkte sämtlich mit der Axe des Rollens in ein und derselben Ebene, da sie nun auch alle in gerader Linie liegen müssen, so muß diese gerade Linie der Axe des Rollens entweder parallel sein, oder dieselbe schneiden.

Ist die gerade Linie, welche die sämtlichen Krümmungsmittelpunkte aufnimmt und welche wir als Krümmungsaxe bezeichnen wollen, parallel mit der Axe des Rollens, so ist der Krümmungshalbmesser (r) für sämtliche Berührungspunkte konstant und wir nennen diesen Fall des Rollens *cylindrisches Rollen*; wenn dagegen die Krümmungsaxe die Axe des Rollens schneidet, so bezeichnen wir das Abwälzen des beweglichen Systems als *konisches Rollen*. Bei dem konischen Rollen ist der Krümmungshalbmesser r nicht konstant, sondern veränderlich, aber es ist, unter $r, r', r'' \dots$ die Krümmungsradien verschiedener Berührungselemente, und unter $a, a', a'' \dots$ die Abstände dieser Elemente von dem Durchschnittspunkte zwischen der Axe des Rollens und der Krümmungsaxe verstanden:

$$r : r' : r'' \dots = a : a' : a'' \dots$$

Da nun ferner das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit f_i mit welcher die Elemente um die Krümmungsaxe sich drehen für alle Elemente denselben Werth haben muß, so folgt aus Gleichung 175), daß das Aenderungsmaafs der fortschreitenden Bewegung f für die einzelnen Berührungselemente verschieden sein muß. Nun gehören aber diese sämtlichen Berührungselemente einem System an, und es bedingt daher der Fall, daß die einzelnen Elemente mit verschiedener Geschwindigkeit fortschreiten, eine Drehung um eine gemeinschaftliche Axe (§ 65). Diese gemeinschaftliche Axe ist normal zur Berührungsebene, da in der Berührungsebene sämtliche Wegelemente liegen. Ist f_u das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit für die Drehung um diese Axe, und R der (veränderliche) Abstand der einzelnen Berührungselemente von dieser Axe, so ist offenbar

$$f = f_u \cdot R = -r \cdot f_i$$

$$175 \text{ a) } \frac{f_i}{f_u} = -\frac{R}{r},$$

d. h. wenn ein System **konisch** rollt, so verhalten sich die Aenderungsmasse der Winkelgeschwindigkeiten, mit denen das System um die Krümmungsaxe und um eine zur Berührungsebene normale Axe rotirt, umgekehrt wie der Krümmungshalbmesser irgend eines Punktes zu dem Abstände dieses Punktes von der letztgenannten Axe.

Da nun dies Verhältniß für alle Elemente in irgend einem Augenblicke denselben Werth hat, so ist:

$$\frac{R}{r} = \frac{R'}{r'} = \frac{R''}{r''}; r:r':r'' = R:R':R'' \dots = a:a':a'' \dots$$

und hieraus folgt, daß die zur Berührungsebene normale Axe, um welche das System rotirt, durch den Punkt gehen müsse, in welchem die Krümmungsaxe die Axe des Rollens schneidet.

Für den geraden Kegel mit kreisförmiger Grundfläche sei ab die Normale zur Berührungsebene in irgend einem Punkte; der Schnitt des Kegels durch eine Ebene, welche durch ab geht und zur Axe des Rollens ac normal ist, ist eine Ellipse, das berührende Kurvenelement ein elliptisches, und zwar dasjenige, welches dem Endpunkt der langen Axe ab entspricht. Für dieses Kurvenelement ist der Krümmungshalbmesser:

$$r = \frac{p^2}{q}$$

wenn p die halbe kurze, q die halbe lange Axe ist. Es ist aber auch $p^2 = mn$, wenn m und n die Radien der die Ellipse begrenzenden Kreise des Kegels sind. Man hat also:

$$r = \frac{ae \cdot bf}{\frac{1}{2}ab} = \frac{R \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2}ab} \cdot \frac{\frac{1}{2}ab}{\cos \alpha} = R \cdot \tan \alpha = ag,$$

folglich ist die Axe cf die Krümmungsaxe des Kegels, und es ist für den Kegel:

$$175b) \frac{f_l}{f_u} = -\frac{R}{r} = -\cotang \alpha = -\frac{ce}{ae} = -\frac{h}{m},$$

worin α den Winkel bezeichnet, unter welchem die Krümmungsaxe die Axe des Rollens schneidet, m der Radius des Kegels in irgend einem Berührungspunkt, h die Höhe des Kegels für die Kreisebene, deren Radius m ist.

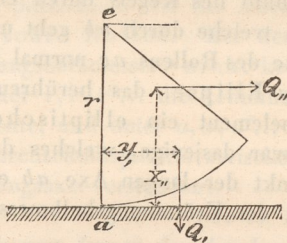
Denken wir nunmehr ein bewegliches System, für welches die Möglichkeit des cylindrischen Rollens vorhanden ist, und

untersuchen wir, wie die Drucksumme zu bestimmen ist, welche auf Fortschreiten des Krümmungsmittelpunktes wirkt, und wie das Moment des Kräftepaars zu finden ist, welches auf Drehung des Systems um die Krümmungsaxe wirkt.

Im Allgemeinen werden die auf das bewegliche System angebrachten Kräfte sich nach § 76. A. No. 1 (S. 119) zurückführen lassen auf drei einzelne Kräfte, die einzeln parallel sind mit drei angenommenen Axen (Gleichung 126). Die Richtung ae normal zur Berührungsebene sei die erste, die Richtung cd (Figur auf S. 220), d. i. die in der Berührungsebene liegende zur Axe des Rollens normale Richtung sei die zweite, und die Axe des Rollens sei die dritte Koordinatenaxe; Q_1, Q_2, Q_3 seien die mit den drei Axen parallelen Kräfte, deren Angriffspunkte durch die Koordinatengleichungen 126) zu bestimmen sind.

Die Kraft Q_3 parallel mit der Axe des Rollens wirkt auf Verschieben des Systems nach der Richtung dieser Axe, hat aber in Bezug auf Drehung um diese Axe kein Moment, sie fällt daher, indem wir die Gesetze des Rollens untersuchen, ganz aus der Betrachtung.

Die Kraft Q_2 kann in zwei parallele Kräfte zerlegt werden, von denen die eine durch die Krümmungsaxe e , die andere durch die



Axe des Rollens a geht, und welche sich bestimmen durch die Gleichungen:

$$Q_2^{(a)} = Q_2 \cdot \frac{(r - X_2)}{r}; \quad Q_2^{(e)} = Q_2 \cdot \frac{X_2}{r},$$

beide Kräfte wirken auf Fortschreiten des ganzen Systems.

Die Kraft Q_1 , welche normal ist zur Berührungsebene, kann keine fortschreitende Bewegung in der Richtung des Rollens ab , erzeugen, dagegen kann sie auf Drehung in der Ebene des Rollens wirken, sie giebt das auf Kippen wirkende Kräftepaar, und das Moment desselben drückt sich aus durch $Q_1 \cdot Y_1$. Dieses Kräftepaar können wir immer verwandeln in ein anderes, dessen Kräfte durch die Axen e und a gehen, und die sich daher bestimmen nach Gleichung 139), S. 137 durch die Werthe:

$$+ \frac{Q_1 \cdot Y_1}{r} \quad \text{und} \quad - \frac{Q_1 \cdot Y_1}{r},$$

wobei übrigens auf das Vorzeichen von Y_1 wohl zu achten ist.

Endlich wirkt noch in der Axe a die Komponente der gleitenden Reibung, welche wir mit Θ bezeichnen wollen, dieselbe ist immer der Richtung der Kraft Q_u , welche auf Fortschreiten des Systems wirkt, entgegengesetzt.

Nun haben wir in der Axe e die Kräfte wirkend:

$$176) \frac{Q_u \cdot X_u}{r} + \frac{Q_l \cdot Y_l}{r} = Q_{(e)}$$

und in der Axe a die Kräfte:

$$176a) Q_u \cdot \frac{(r - X_u)}{r} - \frac{Q_l \cdot Y_l}{r} - \Theta = Q_{(a)}$$

Denken wir nun in dem Angriffspunkte der Kraft $Q_{(e)}$ zwei Kräfte angetragen, die parallel mit der Richtung des Fortschreitens und gleich $+ Q_{(a)}$ und $- Q_{(a)}$ sind, so hat man die Kräfte des beweglichen Systems zurückgeführt auf eine Drucksumme $Q_{(e)} + Q_{(a)}$ und auf ein Kräftepaar dessen Kräfte $+ Q_{(a)}$ in der Axe a und $- Q_{(a)}$ in der Axe e wirkend, den Hebelsarm $ae = r$ haben.

Die Drucksumme wirkt auf fortschreitende Bewegung des Systems und ergibt sich:

$$Q_{(e)} + Q_{(a)} = Q_u - \Theta$$

und das Moment wirkt auf Drehung des Systems in der Ebene des Rollens und ist gleich:

$$Q_{(a)} \cdot r = Q_u \cdot (r - X_u) - Q_l \cdot Y_l - r \cdot \Theta.$$

Bezeichnet nun $J_l = Q_l^2 \cdot M$ das Trägheitsmoment des beweglichen Systems in Bezug auf eine Axe, die parallel mit der Axe des Rollens durch den Krümmungsmittelpunkt geht, so hat man das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit für Drehung um diese Axe:

$$176b) f_l = \frac{Q_{(a)} \cdot r}{J_l} = \frac{Q_u \cdot (r - X_u) - Q_l \cdot Y_l - r \cdot \Theta}{J_l}$$

und das Aenderungsmaafs der fortschreitenden Bewegung:

$$176c) f = \frac{Q_u - \Theta}{M}.$$

Da nun die Bedingung des cylindrischen Rollens nach dem Obigen sich darstellte durch (Gleichung 175):

$$f = -f_l \cdot r,$$

so folgt die Komponente der gleitenden Reibung, welche in der Axe a wirksam sein muß, durch Entwicklung aus den Gleichungen 176b) und 176c), indem wir erst mit r multiplizieren und die Werthe gleichsetzen:

$$176\text{d)} \left\{ \begin{aligned} \Theta &= \frac{Q_u \cdot [J_i + Mr \cdot (r - X_u)] - Mr \cdot Q_i \cdot Y_i}{J_i + Mr^2} \\ &= Q_u - \frac{r \cdot M}{J_i + Mr^2} \cdot (Q_u \cdot X_u + Q_i \cdot Y_i) \\ &= Q_u - \frac{Mr^2}{J_i + Mr^2} \cdot Q_{(c)} \end{aligned} \right.$$

folglich durch Einsetzung dieses Werths in die Gleichungen 176b) und 176c), nach gehöriger Reduktion:

$$177) \left\{ \begin{aligned} f_i &= - \frac{Q_u \cdot X_u + Q_i \cdot Y_i}{J_i + Mr^2} = - Q_{(c)} \cdot \frac{r}{J_i + Mr^2} \\ f &= r \cdot \frac{Q_u \cdot X_u + Q_i \cdot Y_i}{J_i + Mr^2} = Q_{(c)} \cdot \frac{r^2}{J_i + Mr^2} \end{aligned} \right.$$

worin J_i das Trägheitsmoment des Systems in Bezug auf Drehung um eine mit der Axe des Rollens parallele durch den Krümmungsmittelpunkt gehende Axe, und M die Gesamtmasse des Systems bezeichnet.

Da der Werth Θ durch die gleitende Reibung bedingt ist, so ist der grösste Werth, welchen Θ haben kann, offenbar:

$$\Theta = \mu \cdot Q_i.$$

So lange nun der aus der Bedingung des Rollens berechnete Werth der Komponente der gleitenden Reibung Θ kleiner ausfällt, als dieser Maximalwerth μQ_i , wird ein vollständiges Rollen erfolgen, sobald aber Θ gröfser ausfällt als μQ_i , kann die Bedingung der Gleichung 175) nicht mehr erfüllt werden, und es entsteht ein gleitendes Rollen.

Man hat für diesen Fall, indem man in Gleichung 176b) für Θ den Werth μQ_i setzt:

$$177\text{a)} \quad f_i = \frac{Q_u \cdot (r - X_u) - Q_i \cdot (Y + r \cdot \mu)}{J_i}$$

und aus Gleichung 176c):

$$177\text{b)} \quad f = \frac{Q_u - \mu \cdot Q_i}{M}$$

d. h. es ist das Aenderungsmaafs der fortschreitenden Bewegung wie beim gleitenden Kippen (Gleichung 174c).

Erfahrungsmässig giebt es auch beim Rollen gewisse Widerstände, die sich dem Abwickeln der Berührungspunkte entgegensetzen und die, wie die Reibung, als passive Widerstände zu betrachten sind. Man pflegt diese Widerstände, deren Natur noch nicht gehörig aufgeklärt ist, die wälzende Reibung zu nennen. Man kann die wälzende Reibung immer als ein Kräftepaar denken, welches der Drehung des beweglichen Systems entgegenwirkt. Nennen wir das Moment dieses Kräftepaars \mathfrak{B} , so ist

der Werth \mathfrak{B} in den Gleichungen 176) bis 177) überall als ein Kräftepaar mit entgegengesetztem Zeichen hinzuzufügen. Wenn man die Kräfte dieses Kräftepaars auf den Abstand r reduzirt, so sind dieselben offenbar $+\frac{\mathfrak{B}}{r}$ und $-\frac{\mathfrak{B}}{r}$ und es gehen die Gleichungen 176) und 176a) mit Berücksichtigung der wälzenden Reibung über in folgende:

$$178) \begin{cases} Q_{(c)} = \frac{Q_{II} \cdot X_{II}}{r} + \frac{Q_I \cdot Y_I}{r} - \frac{\mathfrak{B}}{r} \\ Q_{(a)} = \frac{Q_{II} \cdot (r - X_{II})}{r} - \frac{Q_I \cdot Y_I}{r} - \Theta + \frac{\mathfrak{B}}{r}. \end{cases}$$

Worin $Q_{(c)}$ den Druck bezeichnet, welcher in der Krümmungsaxe auf Fortschreiten derselben wirksam bleibt, $Q_{(a)}$ aber die Drucksumme bedeutet, welche in der Axe des Rollens wirksam zu denken ist. Nach (freilich ziemlich zweifelhaften) Versuchen von Coulomb muſs man schliesen, daſs das Moment \mathfrak{B} proportional sei der Drucksumme Q_I , welche normal gegen die Bahn des Rollens gerichtet ist, und daſs betrage:

beim Rollen von Pockholz auf Eichenholz	$\mathfrak{B} = 0,0184 Q_I$
- - - Ulmenholz - - -	$= 0,0311 Q_I$
- - - Guſſeiſen auf Guſſeiſen	$= 0,0178 Q_I$
(Weisbach und Rittinger) bis	$= 0,0187 Q_I$
- - - Eisenbahnräder auf Schienen	$= 0,019 Q_I$
(de Pambour) bis	$= 0,021 Q_I$

Im Allgemeinen ist also zu setzen:

$$178a) \mathfrak{B} = \chi \cdot Q_I$$

und man hat daher:

$$178b) \begin{cases} Q_{(c)} = \frac{Q_{II} \cdot X_{II}}{r} + \frac{Q_I \cdot (Y_I - \chi)}{r} \\ Q_{(a)} = \frac{Q_{II} \cdot (r - X_{II})}{r} - \frac{Q_I \cdot (Y_I - \chi)}{r} - \Theta. \end{cases}$$

Hiernach ist in sämtlichen Gleichungen von 176) bis 177a), in welchen Y_I (die Ordinate der Drucksumme Q_I) vorkommt, diese Ordinate um den Werth χ zu vermindern, wenn man die wälzende Reibung berücksichtigen will.

Die Gesetze des konischen Rollens in derselben Allgemeinheit zu entwickeln, wie die des cylindrischen Rollens führt auf sehr komplizirte Ausdrücke. In besonderen Fällen werden sich diese Gesetze nach Analogie der eben durchgeführten Untersuchungen und mit Berücksichtigung der Bedingungs-Gleichung 175a), S. 222 ohne groſse Schwierigkeiten ermitteln lassen.

Anwendungen der Reibungsgesetze: Balkenschub — Quetschwalzen —
 Axenreibung.

§ 102. Die in dem vorigen Paragraphen entwickelten Gesetze wollen wir auf einige bestimmte Fälle anwenden, indem wir einige der am häufigsten vorkommenden Aufgaben besprechen.

1. Balkenschub.

Ein Stab oder ein Balken ist zwischen zwei Wände gelegt, die den Winkel $ABC = \alpha$ einschließen; die Länge des Stabes ist l , und in dem Abstände n von dem einen Ende wirke eine Kraft G auf den Stab; gegeben ist die Neigung des Stabes gegen die eine Wand AB durch den Winkel $CDB = \beta$ und die Richtung der Kraft G durch den Winkel $BEG = \gamma$, welchen die Krafrichtung G mit derselben Wand macht; zu ermitteln ist:

- 1) wie kann sich der Stab verschieben?
- 2) welche Kraft ist parallel mit der Wand AB erforderlich, um den Stab im Gleichgewicht zu halten? und
- 3) welchen Werth muß der Winkel β haben, damit der Stab durch die Reibungswiderstände und den Widerstand des fixen Systems allein im Gleichgewicht gehalten werde?

Die Verschiebung des Stabes kann nur durch die bewegende Kraft G erfolgen, und zwar dadurch, daß der Angriffspunkt dieser Kraft in dem Sinne desselben fortrückt; man sieht, daß dabei der Stab mit seinen beiden Enden gleiten muß, und zwar das Ende D nach A hin, das Ende C nach B hin. Durch den Widerstand des fixen Systems werden dabei in den Punkten C und D Kräfte aufgehoben, welche normal zu den Richtungen des Gleitens, und die daher Reibung erzeugende Drucke sind; diese Kräfte bezeichnen wir mit C und D , dann entstehen in den Punkten C und D die Reibungswiderstände μC und $\mu' D$, wenn μ und μ' die betreffenden Reibungs Koeffizienten sind. Diese Reibungswiderstände wirken in Richtungen, die der Verschiebung entgegengesetzt sind. Offenbar wird in dem Zustande des Systems nichts geändert, wenn wir in dem Punkte C das fixe System fortgenommen, und dafür die durch dasselbe herbeigeführten Widerstände, nämlich die Reibung μC und den, dem aufgehobenen Druckantheil gleichen und entgegengesetzten Widerstand — C als angebrachte Kräfte wirksam denken. Nun verfahren wir nach der Methode des § 97, indem wir die sämtlichen Kräfte nach der Richtung des Gleitens des Punktes D und normal dazu zerlegen. Die Summe der Normaldrucke giebt den Reibung erzeugenden Druck D .