wir Rollen oder Wälzen. Die Möglichkeit des Rollens ist also dadurch bedingt, dafs sich die Oberfläche des beweglichen Systems auf derjenigen des fixen Systems abwickeln könne, und hierzu gehört, dafs die Berührung fortwährend in einer geraden Linie, oder in einem Punkte statt finde.

Es ist übrigens denkbar, dafs während das bewegliche System rollt, während es also immer um eine neue Axe kippt, dieses Kippen ein gleitendes Kippen sein könne, d. h. dafs in demselben Augenblick, wo das Kippen um eine bestimmte Axe erfolgt, diese Axe selbst gleitend fortrückt, und im nächsten Augenblick zwar die der eben vorhandenen Drehaxe benachbarten Punkte des beweglichen Systems, aber nicht die derselben benachbarten Punkte des fixen Systems, sondern entfernter liegende Punkte desselben zur Berührung gelangen, und die neue Drehaxe bilden. Diese Bewegung nennen wir „gleitendes Rollen". Sie läfst sich immer zurückführen auf ein Gleiten und auf ein Rollen.

Wie aber auch das Kippen beschaffen sein mag, so wird man in dem Augenblick, in welchem das bewegliche System kippt, allemal die Axe des Kippens als fixe Axe betrachten und auf dieselbe die Gesetze der Drehung eines festen Systems um eine fixe Axe anwenden können (§ 79).

Gesetze des einfachen und des gleitenden Kippens; Bestimmung der Axe des Kippens.

§ 100. Nehmen wir an, die Berührungspunkte zweier festen Systeme liegen sämmtlich in ein und derselben Ebene; wir wollen untersuchen, unter welchen Verhältnissen das bewegliche System kippen, unter welchen es gleitend kippen wird, und wie die Axe des Kippens zu finden sei.

Wir denken drei Koordinatenaxen, deren Anfangspunkt vorläufig der Schwerpunkt des beweglichen Systems sei; und von denen die erste Axe normal zur Berührungsebene der beiden Systeme sei, die beiden andern Axen also parallel mit dieser Berührungsebene liegen müssen.

Wir bilden aus den auf das bewegliche System angebrachten Kräften die drei Drucksummen:

$$\Sigma(K . \cos\alpha);\quad \Sigma(K . \cos\beta);\quad \Sigma(K . \cos\gamma).$$

Die Drucksumme $\Sigma(K . \cos\alpha)$ wird durch den Widerstand des fixen Systems aufgehoben, ist also der Reibung erzeugende Druck, und die daraus hervorgehende Reibung ist $\mu . \Sigma(K . \cos\alpha)$. Die beiden andern Drucksummen haben eine Resultirende:

$$Q = \sqrt{\left\{[\Sigma(K.\cos\beta)]^2 + [\Sigma(K.\cos\gamma)]^2\right\}},$$

welche mit den beiden in der Berührungsebene liegenden Axen die Winkel B und Γ bildet, und man hat bekanntlich:

$$\cos B = \sin \Gamma = \frac{\Sigma(K.\cos\beta)}{Q}$$

$$\cos \Gamma = \sin B = \frac{\Sigma(K.\cos\gamma)}{Q}.$$

Die Resultirende Q wirkt auf Verschieben, sie bewirkt ein Gleiten des beweglichen Systems nach der Richtung Q mit einem Druck, der sich ausdrückt durch:

$$174)\quad P = Q - \mu.\Sigma(K.\cos\alpha).$$

Nun können wir auch die Momente der Kräftepaare für die drei Axen bilden. Dieselben sind (Gleichung 141, S. 142):

$$(P'a') = \Sigma(K.\cos\beta.z) + \Sigma(K.\cos\gamma.y)$$
$$(P''a'') = \Sigma(K.\cos\alpha.z) + \Sigma(K.\cos\gamma.x)$$
$$(P'''a''') = \Sigma(K.\cos\alpha.y) + \Sigma(K.\cos\beta.x).$$

Das Kräftepaar $(P'a')$ wirkt auf Drehung in einer Ebene, welche parallel ist mit der Berührungsebene und deren Axe, folglich normal ist zur Berührungsebene Durch welchen Punkt der Berührungsebene diese Axe geht, ist von der Natur des betrachteten Falles abhängig. Da nun auch der Reibung erzeugende Druck $\Sigma(K.\cos\alpha)$ auf derselben Ebene normal ist, so ist das Moment des Reibungswiderstandes nach Gleichung 167) zu bestimmen, und es ist dasselbe

$$(\Theta a) = \mu.\Sigma(K.\cos\alpha).\frac{\Sigma(dF.r)}{\Sigma(dF)}$$
$$= \mu.\Sigma(K.\cos\alpha).\mathfrak{R}$$

(wenn $\mathfrak{R}$ den Hebelsarm der Reibung bezeichnet).

Hiernach erleidet das System eine Drehung um eine zu der Berührungsebene normale Axe, und es ist das wirksame Moment der Drehung:

$$174a)\quad P'a' - \Theta a = \Sigma(K.\cos\beta.z) + \Sigma(K.\cos\gamma.y) - \mu.\Sigma(K.\cos\alpha).\mathfrak{R}.$$

Die Kräftepaare $(P''a'')$ und $(P'''a''')$ lassen sich zu einem einzigen Kräftepaar zusammensetzen. Nach Gleichung 140) und 140a) ist das Moment (Pa) dieses Kräftepaars:

$$Pa = \sqrt{\left\{(P''a'')^2 + (P'''a''')^2\right\}}$$

und die Winkel, welche die Paarebene dieses Paars (die übrigens normal ist zur Berührungsebene) mit den beiden Axen in dieser Ebene bildet $B_{\prime}$ und $\Gamma_{\prime}$ sind durch die Gleichungen (140a) zu bestimmen:

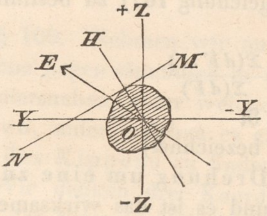
$$\cos B_{\prime} = \sin \Gamma_{\prime} = \frac{P'' \, . \, a''}{Pa}$$

$$\cos \Gamma_{\prime} = \sin B_{\prime} = \frac{P''' \, . \, a'''}{Pa}.$$

Die Ebene des Kräftepaars Pa ist diejenige, in welcher ein Bestreben auf Drehung des beweglichen Systems vorhanden ist; konstruiren wir diese Paarebene, so steht dieselbe normal auf der Berührungsebene, schneidet diese in einer geraden Linie, und diese Durchschnittslinie schneidet im Allgemeinen die Begrenzungslinie der Berührungsfigur; nun wissen wir aus dem vorigen Paragraphen, dafs die Axe des Kippens in der Berührungsebene liegen, und die Begrenzungsfigur berühren mufs. Da nun aber die Axe des Kippens auch normal zur Paarebene sein mufs, so mufs sie auf der obigen Durchschnittslinie normal, und zwar diejenige Normale sein, welche die Begrenzungslinie der Berührungsfigur berührt, und dabei so liegt, dafs sie der Richtung in welcher das resultirende Kräftepaar Pa auf Drehung wirkt entspricht.

Hierdurch ist nun im Allgemeinen die Lage der Axe des Kippens bestimmt.

In nebenstehender Skizze sei die schraffirte Figur die ebene Berührungsfläche. OY, OZ seien die zweite und dritte Axe durch den Schwerpunkt des beweglichen Systems gehend, OE sei die Richtung von Q, nach welcher das System gleitet; OH sei die Durchschnittslinie der Ebene des auf Kippen wirkenden Kräftepaars mit der Berührungsebene, dann ist MN die Axe des Kippens. Soll nun die Axe des Kippens für jeden Augenblick als fixe Axe betrachtet werden können, so müssen nach § 79



die auf Verschieben der Axe wirkenden Drucke durch die Reaktion in der fixen Axe im Gleichgewicht gehalten werden. Der auf Verschieben der Axe wirkende Druck wird gefunden, wenn man den rerultirenden Druck Q in zwei Komponenten zerlegt, von denen die eine normal zu $MN_{\prime}$ ist, die andere mit MN zusammenfällt. Da der Winkel HOE, welchen die Richtung OE mit der zur Axe normalen OH bildet, offenbar gleich $(B_{\prime} - B)$ ist, so ist die Komponente, welche auf Verschieben der Axe nach der Richtung OH wirkt:

$$Q \, . \cos (B_{\prime} - B)$$

und die Komponente, welche auf Verschieben nach der Richtung MN wirkt:

$$Q \,.\, \sin(B_{,} - B).$$

Die Drucke nun, welche dem Verschieben der Axe entgegenwirken, sind keine andern, als die Komponenten der Reibung, und da der Reibungswiderstand der Richtung von Q entgegengesetzt zu denken ist, so sind die Komponenten des Reibungswiderstandes für die Richtungen OH und MN

$$-\mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha) \,.\, \cos(B_{,} - B) \text{ und } -\mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha) \,.\, \sin(B_{,} - B).$$

Je nachdem nun:

$$Q \,.\, \cos(B_{,} - B) \leqq \mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha) \,.\, \cos(B_{,} - B)$$

$$\text{d. h.: } Q \,.\, \leqq \mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha), \text{ oder}$$

$$Q \,.\, \cos(B_{,} - B) > \mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha) \,.\, \cos(B_{,} - B)$$

$$\text{d. h.: } Q > \mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha)$$

ist, wird die Axe MN als fixe Axe oder als verschiebbare Axe zu betrachten sein; im ersten Falle wird das System einfach kippen ohne zu gleiten; im andern Falle wird ein gleitendes Kippen erfolgen.

Bestimmen wir nun das Moment sämmtlicher auf das bewegliche System angebrachten Kräfte für diese Axe MN, so ist dasselbe das auf Kippen wirkende Kräftepaar, und wenn wir dasselbe mit (Ka) bezeichnen, so ist das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit des Kippens:

$$174\text{b)}\quad f_{,} = \frac{Ka}{J_{,}},$$

worin $J_{,}$ das Trägheitsmoment des beweglichen Systems in Bezug auf die Axe des Kippens bedeutet; das Aenderungsmaafs des fortschreitenden Gleitens ist aber nach Gleichung 165b) (S. 202) und 174) (S. 217):

$$f = \frac{P}{M} = \frac{Q - \mu \,.\, \Sigma(\cos\alpha)}{M}.$$

$$174\text{c)}\quad f = \frac{\sqrt{\left\{[\Sigma(K \,.\, \cos\beta)]^2 + [\Sigma(K \,.\, \cos\gamma)]^2\right\}} - \mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha)}{M}$$

Das bewegliche System kippt nun mit einer Winkelgeschwindigkeit deren Aenderungsmaafs $f_{,}$ ist, sobald das Moment Ka gröfser als Null ist, es ist dabei im Gleichgewicht gegen Gleiten, wenn $Q < \mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha)$ ist; wenn dagegen $Q > \mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha)$ ist, so gleitet es zugleich mit einer Geschwindigkeit, deren Aenderungsmaafs f (Gleichung 174c) ist.

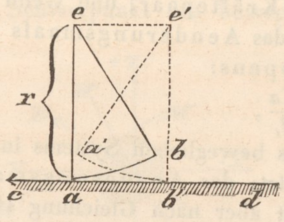
Diese Bestimmungen gelten, so lange das bewegliche System um eine Axe kippt, die stets durch dieselben Punkte des beweglichen Systems geht. Anders ist es, wenn die Möglichkeit des Rollens vorhanden ist.

Gesetze des Rollens; cylindrisches und konisches Rollen. Einfaches und gleitendes Rollen.

§ 101. Wir wollen nunmehr die Gesetze des Rollens untersuchen.

Das Rollen ist, wie im Paragraphen 99. angedeutet worden, eine besondere Art des Kippens, es setzt also immer eine Axe voraus, um welche die Drehung des beweglichen Systems erfolgt, und welche in der Berührungsebene beider Systeme liegt, sowie ein auf Drehung um diese Axe wirkendes Kräftepaar, endlich ist das Rollen durch die Möglichkeit bedingt, dafs das bewegliche System auf dem fixen System sich abwickeln könne. Bevor wir hiernach die mechanischen Gesetze dieser Bewegung betrachten, wollen wir folgende Bemerkung hervorheben.

Es sei ab ein Kurvenelement, welches sich auf der Linie cd abwickeln soll, $ae = eb$ sei der Krümmungshalbmesser des Kurvenelements; und nach der Abwickelung sei das Bogenelement in die Lage $a'b'$ gekommen.



Offenbar ist die Länge $ab' = ab$ gleich der Länge des Kurvenelements, und es steht sowohl der Krümmungshalbmesser ae, als auch der Krümmungshalbmesser $b'e'$ normal auf cd, da in beiden Lagen und bei dem Uebergange von der einen Lage in die andere das Bogenelement ab fortwährend die Linie cd berühren soll. Hieraus folgt, dafs ee' der Weg, den der Krümmungsmittelpunkt bei der Abwickelung beschrieben hat, nicht nur eine äquidistante Kurve von cd ist, sondern auch gleich der Länge ab' d. i. gleich der Länge des Bogenelementes ab ist. Nun sieht man, dafs das Bogenelement aus der Lage abe, die es vor der Abwickelung hatte, in die Lage $a'b'e'$, in die es durch die Abwickelung gelangt ist, auch dadurch gebracht werden kann, dafs man sich vorstellt, der Krümmungsmittelpunkt e und alle Punkte des Systems aeb haben zuerst fortschreitend den Weg ee' beschrieben, dessen Länge gleich der Länge des Bogenelementes ab, und dessen Richtung äquidistant der Grundkurve ist, und dann habe das System