bewegenden Kräfte, beides für eine gegebene Axe, bezeichnet, so ist immer (Θa) dem Moment Pr entgegengesetzt, folglich hat man als Moment der wirklich Drehung erzeugenden Kräfte:

$$172)\ (Pr - \Theta a) = f_{,} \cdot J_{,}$$

(nach Gleichung 154a, S. 167, wenn $f_{,}$ das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit, und $J_{,}$ das Trägheitsmoment des Systems in Bezug auf dieselbe Axe bezeichnet) folglich ist:

$$172a)\ f_{,} = \frac{Pr - (\Theta a)}{J_{,}}.$$

Je nachdem nun wieder $Pr > \Theta a$; $Pr = \Theta a$, oder $Pr < \Theta a$ ist, befindet sich das bewegliche System aufserhalb der Grenze des drehenden Gleitens, an der Grenze, oder innerhalb der Grenze desselben, und es lassen sich ähnliche Betrachtungen anstellen, wie am Schlusse des § 95.

Widerstände gegen Kippen; Stabilität; Rollen.

§ 99. Wir haben noch in § 93. derjenigen Veränderung der Lage des beweglichen Systems gegen ein fixes System gedacht, welche wir „Kippen" nannten. Bei dem Kippen berührt die Drehungsaxe des beweglichen Systems beide Systeme, und nimmt einen oder mehre Punkte der Berührungsfläche auf. Diese in der Axe des Kippens liegenden Punkte bleiben bei der Bewegung des beweglichen Systems in Ruhe, während alle andern Punkte Bogenelemente beschreiben, die sich von dem fixen System abheben. Aus dieser letzten Bedingung folgt, dafs, wenn wir die Begrenzungslinie der Berührungsfläche denken (die Berührungsfläche mag nun eben oder krumm sein):

1) die Axe des Kippens immer diese Begrenzungslinie berühren mufs;

und aus der ersten Bedingung folgt:

2) dafs die Axe des Kippens in derjenigen Berührungsebene beider Systeme liegen mufs, die dem Punkte angehört, in welchem diese Axe die Begrenzungslinie berührt.

Die Bedingung 1) ist sofort ersichtlich, wenn man bemerkt, dafs für jede Axe, welche die Begrenzungslinie der Berührungsfläche schneidet, unmittelbar benachbarte Berührungspunkte existiren, die auf verschiedenen Seiten dieser Axe liegen. Bei der Drehung des Systems um diese Axe würden nun zwar die Punkte auf der einen Seite sich von der Berührungsebene, in welcher die Axe liegt abheben können, die Punkte der andern Seite müfsten dann aber in diese Ebene einschneiden, und das widerspricht nach den Bedingungen des § 93 der Möglichkeit des Kippens.

Will man nun untersuchen, ob ein bewegliches System im Gleichgewicht gegen Kippen sei, so hat man nach dem Satz No. 1. nur nöthig, diese Untersuchungen für solche Axen anzustellen, welche die Begrenzungslinie der Berührungsfläche berühren.

Welche von allen den Linien, welche die Begrenzungslinie der Berührungsfläche unter den gemachten Bedingungen berühren, diejenige Axe sei, um die ein System, das nicht im Gleichgewicht gegen Kippen ist wirklich kippt, ist von der Form der Berührungsfläche und von der Lage und Gröfse der auf das fixe System angebrachten bewegenden Kräfte abhängig, und läfst sich in vielen Fällen ohne Weiteres angeben, in andern Fällen dagegen bedarf es einer besondern Untersuchung. Ist die Axe des Kippens entweder durch direkte Bestimmung festgestellt, oder zufolge einer Schätzung angenommen, so hat man die Momente sämmtlicher auf das bewegliche System angebrachten Kräfte für diese Axe zu bestimmen, und zwar so, dafs man die Momentensumme bildet für diejenigen Kräfte, welche auf Kippen wirken, und dann die Momentensumme derjenigen Kräfte, welche dem Kippen entgegenwirken. Die Momentensumme, welche auf Kippen wirkt, sei $\Sigma(Ka)$, und die Momentensumme, welche dem Kippen entgegenwirkt, sei $-\Sigma(Pb)$, dann ist das Moment, welches wirkliche Drehung erzeugt (QR):

$$173)\quad (QR) = \Sigma(Ka) - \Sigma(Pb).$$

Ist nun $\Sigma(Ka) > \Sigma(Pb)$, so erfolgt Kippen, und wir sagen, das bewegliche System sei aufserhalb des Gleichgewichtes gegen Kippen; ist dagegen $\Sigma(Ka) < \Sigma(Pb)$, so kann kein Kippen erfolgen, denn nach der Voraussetzung müfste nun das bewegliche System in entgegengesetztem Sinne des Kippens Bewegung erlangen, d. h. es müfsten die einzelnen Berührungspunkte anstatt sich abzuheben, in das fixe System eindringen, was nicht möglich ist. Wir bezeichnen diesen Zustand, als „innerhalb des Gleichgewichtes gegen Kippen“; ist endlich

$$\Sigma(Ka) = \Sigma(Pb),$$

so ist das bewegliche System an der Grenze des Gleichgewichts gegen Kippen, oder „an der Grenze des Kippens“ denn jeder unendlich kleine Zuwachs von $\Sigma(Ka)$ bringt das System aufserhalb, und jeder unendlich kleine Zuwachs von $\Sigma(Pb)$ innerhalb der Grenze des Kippens.

Die Momentensumme $\Sigma(Pb)$ der Kräfte, welche dem Kippen entgegenwirken in Bezug auf irgend eine Axe nennt man die Stabilität des beweglichen Systems in Bezug auf Kippen um diese Axe, und das Verhältnifs

$$173\text{a})\quad \frac{\Sigma(Pb)}{\Sigma(Ka)} = S$$

nennen wir die Sicherheit gegen Kippen, oder das Maafs der Stabilität des beweglichen Systems.

Je nachdem das bewegliche System an der Grenze, innerhalb, oder aufserhalb der Grenze des Kippens ist, ist das Maafs der Stabilität $S = 1$; $S > 1$; $S < 1$.

Wenn ein bewegliches System aufserhalb des Gleichgewichts gegen Kippen ist, so ändert es seine Lage gegen das fixe System indem es sich um eine Axe dreht, die beide Systeme berührt. Diese Axe enthält einen oder mehrere Berührungspunkte, welche an der Drehung keinen Theil nehmen. Nun ist aber der Fall denkbar, dafs diese Berührungspunkte, welche nicht kippen, sich dennoch gleitend verschieben; dann wird die Axe des Kippens zwar ihre Lage gegen das fixe System ändern, aber sie wird nicht ihre Lage gegen das bewegliche System ändern, und wir werden die gleichzeitig erfolgenden Bewegungen nach dem Grundsatz in § 24. No. 1 einzeln als gleitende Bewegung und als kippende Bewegung betrachten können. Wir nennen diese Bewegung „gleitendes Kippen“.

Es ist nun ferner noch der Fall denkbar, dafs die Oberflächen der beiden sich berührenden festen Systeme so beschaffen sind, dafs sie sich auf einander abwickeln können, und dafs die kippende Bewegung gerade in einer solchen Weise erfolgt, dafs durch dieselbe eine Abwickelung bedingt wird. Treffen diese beiden Bedingungen zusammen, so werden in demselben Zeitelement, in welchem das bewegliche System um eine bestimmte Axe kippt, in beiden Systemen die dieser Axe benachbarten Punkte, welche bis dahin noch nicht sich berührten, Berührungspunkte werden; dadurch heben sich diejenigen Punkte, die bis dahin in der Drehaxe lagen von einander ab, und es bildet sich eine neue Drehaxe, welche die der frühern Drehaxe benachbarten Punkte sowohl des fixen, als auch des beweglichen Systems enthält. Bei jeder neuen kippenden Bewegung des beweglichen Systems findet derselbe Vorgang statt, und es erfolgt also ein fortwährendes Kippen immer um neue, stetig auf einander folgende Drehaxen, wobei sich die Oberfläche des beweglichen Systems auf derjenigen des fixen Systems abwickelt. Diese Bewegung nennen wir Rollen oder Wälzen. Die Möglichkeit des Rollens ist also dadurch bedingt, dafs sich die Oberfläche des beweglichen Systems auf derjenigen des fixen Systems abwickeln könne, und hierzu gehört, dafs die Berührung fortwährend in einer geraden Linie, oder in einem Punkte statt finde.

Es ist übrigens denkbar, dafs während das bewegliche System rollt, während es also immer um eine neue Axe kippt, dieses Kippen ein gleitendes Kippen sein könne, d. h. dafs in demselben Augenblick, wo das Kippen um eine bestimmte Axe erfolgt, diese Axe selbst gleitend fortrückt, und im nächsten Augenblick zwar die der eben vorhandenen Drehaxe benachbarten Punkte des beweglichen Systems, aber nicht die derselben benachbarten Punkte des fixen Systems, sondern entfernter liegende Punkte desselben zur Berührung gelangen, und die neue Drehaxe bilden. Diese Bewegung nennen wir „gleitendes Rollen". Sie läfst sich immer zurückführen auf ein Gleiten und auf ein Rollen.

Wie aber auch das Kippen beschaffen sein mag, so wird man in dem Augenblick, in welchem das bewegliche System kippt, allemal die Axe des Kippens als fixe Axe betrachten und auf dieselbe die Gesetze der Drehung eines festen Systems um eine fixe Axe anwenden können (§ 79).

Gesetze des einfachen und des gleitenden Kippens; Bestimmung der Axe des Kippens.

§ 100. Nehmen wir an, die Berührungspunkte zweier festen Systeme liegen sämmtlich in ein und derselben Ebene; wir wollen untersuchen, unter welchen Verhältnissen das bewegliche System kippen, unter welchen es gleitend kippen wird, und wie die Axe des Kippens zu finden sei.

Wir denken drei Koordinatenaxen, deren Anfangspunkt vorläufig der Schwerpunkt des beweglichen Systems sei; und von denen die erste Axe normal zur Berührungsebene der beiden Systeme sei, die beiden andern Axen also parallel mit dieser Berührungsebene liegen müssen.

Wir bilden aus den auf das bewegliche System angebrachten Kräften die drei Drucksummen:

$$\Sigma(K \,.\, \cos\alpha); \quad \Sigma(K \,.\, \cos\beta); \quad \Sigma(K \,.\, \cos\gamma).$$

Die Drucksumme $\Sigma(K \,.\, \cos\alpha)$ wird durch den Widerstand des fixen Systems aufgehoben, ist also der Reibung erzeugende Druck, und die daraus hervorgehende Reibung ist $\mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha)$. Die beiden andern Drucksummen haben eine Resultirende: