gegen Gleiten, oder wir sagen, das bewegliche System befinde sich an der Grenze des Gleitens.

Das bewegliche System befindet sich hiernach innerhalb, aufserhalb oder an der Grenze des fortschreitenden Gleitens, wenn

$$\Theta > Q \,.\, \sin\varphi; \quad \Theta < Q \,.\, \sin\varphi; \quad \Theta = Q \,.\, \sin\varphi,$$

oder nach Gleichung 165), wenn

$$\mu \,.\, \cos\varphi \,.\, > \sin\varphi; \quad \mu \,.\, \cos\varphi \,.\, < \sin\varphi; \quad \mu \,.\, \cos\varphi = \sin\varphi$$

ist. Dividiren wir mit $\cos\varphi$, so gehen diese Bedingungen über in

$$166) \quad \mu \,.\, > \operatorname{tang}\varphi; \quad \mu \,.\, < \operatorname{tang}\varphi; \quad \mu = \operatorname{tang}\varphi.$$

Hieraus folgt, dafs die Zustände des Gleitens, und die Grenze des Gleitens abhängig sind von dem Verhältnifs des Reibungs-Koeffizienten zu der Tangente des Neigungswinkels der Resultirenden gegen eine Ebene, die normal ist zur Richtung des Gleitens.

Bei demselben Reibungs-Koeffizienten werden diese Zustände also nicht von der Gröfse der Resultirenden, sondern nur von ihrer Richtung abhängig sein; die Grenze des Gleitens wird bei einem bestimmten Werth des Neigungswinkels erreicht sein, und diesen besonderen Werth des Neigungungswinkels, welcher der Grenze des Gleitens entspricht, nennen wir den Reibungswinkel, Gleitwinkel, Ruhewinkel. Wir bezeichnen diesen besondern Werth von φ künftig immer mit ϑ und wir haben nach Gleichung 166) die Beziehung:

$$166a) \quad \operatorname{tang}\vartheta = \mu,$$

d. h. die Tangente des Gleitwinkels ist gleich dem Reibungs-Koeffizienten.

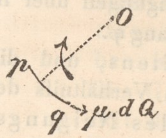
Widerstände gegen drehendes Gleiten, Reibungsmoment; Hebelsarm der Reibung.

§ 98. Um nun das statische Moment der Reibungswiderstände zu bestimmen, nehmen wir an, dafs das bewegliche System sich um eine gegebene Axe drehen könne; diese Axe ist entweder eine fixe Axe, oder sie kann doch für einen Augenblick als fixe Axe betrachtet werden.

Die Resultirende der fortschreitenden Bewegung aus allen auf das bewegliche System angebrachten Kräften ist dann durch den Widerstand des fixen Systems aufgehoben, und folglich ist diese Resultirende der Reibung erzeugende Druck.

In der umstehenden Figur sei die Drehaxe O normal zur Ebene des Papiers. Damit überhaupt Drehung erfolgen könne müssen (nach

§ 93) die Richtungen der von den Berührungspunkten des beweglichen Systems beschriebenen Wegelemente die Elemente der Berührungsfläche berühren, d. h. sie müssen in die Berührungsfläche jedes einzelnen Berührungselementes fallen, zugleich müssen diese Wegelemente in Ebenen liegen, die normal zur Drehaxe sind, sie werden also mit der Durchschnittslinie zusammenfallen, welche die Drehungsebene (Ebene des Papiers) mit den Berührungsebenen der einzelnen Elemente bildet.



pq sei ein Wegelement in dieser Durchschnittslinie für irgend einen Berührungspunkt. Die Richtung der Resultirenden Q bilde mit den einzelnen Berührungselementen den Winkel λ. Es ist dann der Druckantheil jedes Elementes nach Gleichung 164):

$$dQ = \frac{Q}{A} \cdot dF \cdot \sin\lambda$$

und die daraus hervorgehende Reibung:

$$\mu \cdot dQ = \frac{\mu \cdot Q}{A} \cdot dF \cdot \sin\lambda.$$

Dieser Widerstand liegt in einer Ebene, die normal zur Richtung von Q ist. Die Richtung desselben in dieser Ebene ist immer nach dem Grunsatz 4) in § 94. zu bestimmen.

Nun sind aber zwei Fälle möglich, nämlich:

I. die Ebene, in welcher der Reibungswiderstand liegt, fällt mit der Drehungsebene zusammen, oder:

II. die Ebene, in welcher der Reibungswiderstand liegt, schneidet die Drehungsebene.

I. Betrachten wir zunächst den ersten Fall. Derselbe tritt ein, wenn die Richtung des resultirenden Druckes mit der Drehaxe parallel ist. In diesem Falle mufs die Richtung des Reibungswiderstandes in jedem Berührungselement offenbar der Richtung in welcher die Drehung erfolgt entgegengesetzt sein, d. h. sie fällt mit der Richtung pq zusammen, und folglich ist das Moment des Reibungswiderstandes, wenn wir den Schwerpunktsabstand des Elementes von der Drehaxe mit r bezeichnen:

$$\mu \cdot dQ \cdot r = \mu \cdot \frac{Q}{A} \cdot dA \cdot r,$$

und daher die Summe der Momente sämmtlicher Reibungswiderstände, oder das statische Moment der Gesammtreibung, welches wir künftig mit (Θa) bezeichnen wollen:

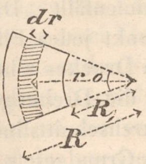
$$167)\ (\Theta a) = \Sigma\left[\mu . \frac{Q}{A} . dA . r\right] = \mu . Q . \frac{\Sigma(dA . r)}{A} .$$

Hieraus folgt:

Wenn ein festes System auf einem andern um eine gegebene Axe drehend gleitet, und wenn dabei die Richtung der Resultirenden aller auf das bewegliche System angebrachten Kräfte mit der Drehaxe zusammenfällt, so ist das statische Moment der Reibungswiderstände gleich dem Produkt, welches man erhält, wenn man den resultirenden Druck mit dem Reibungs-Koeffizienten und mit einem Quotienten multiplizirt, dessen Zähler gleich der Summe der Produkte aus der Projektion jedes Berührungselementes (auf eine zur Drehaxe normale Ebene) in den Abstand dieses Elementes von der Drehaxe, und dessen Nenner die Summe der Projektionen sämmtlicher Berührungselemente ist.

Man sieht, dafs in diesem Falle das statische Moment der Reibungswiderstände nur abhängig ist von der Gröfse und Lage der Projektionen der einzelnen Elemente, und nicht abhängig ist von der Form der Berührungsfläche; es werden also kegelförmige, kugelförmige, ebene etc. Zapfen unter der Voraussetzung, dafs die Richtung des Druckes mit der Drehaxe zusammenfällt, gleiche Reibungsmomente haben, wenn ihre Projektionen kongruent sind, und wenn die resultirenden Drucke sowohl, als die Reibungs-Koeffizienten gleich sind.

Der Ausdruck $\frac{\Sigma(dA . r)}{A}$ ist nur von der Gestalt und Lage der Projektion abhängig; er ist ein rein geometrischer, wir nennen ihn den Hebelsarm der Reibung, und bezeichnen denselben mit $\mathfrak{R}$. Der Hebelsarm der Reibung ist hiernach derjenige Werth, mit welchem μQ, d. i. der gesammte Reibungswiderstand multiplizirt werden mufs, um das statische Moment der Reibung zu erhalten, und man hat:



$$167a)\ (\Theta a) = \mu Q . \mathfrak{R}.$$

Ist die Projektion der Berührungsfläche auf eine Ebene normal zur Drehaxe ein ringförmiger Sektor, welcher einem Winkel o angehört, so ist:

$$dA = o \, . \, r \, . \, dr; \quad \Sigma(dA) = \int o \, . \, r \, . \, dr = \tfrac{1}{2} \, . \, o \, . \, r^2 + C,$$

$$dA \, . \, r = o \, . \, r^2 \, . \, dr; \quad \Sigma(dA . r) = \int o \, . \, r^2 \, . \, dr = \tfrac{1}{3} \, . \, o \, . \, r^3 + C.$$

und wenn wir die Integrale zwischen den Grenzen $r = R_{\prime}$ und $r = R$ nehmen, so ist der Hebelsarm der Reibung:

$$167\text{b)} \quad \mathfrak{R} = \tfrac{2}{3} \, . \, \frac{R^3 - R_{\prime}^{\,3}}{R^2 - R_{\prime}^{\,2}} \, .$$

Es ist also der Hebelsarm der Reibung eines ringförmigen Sektors unabhängig von dem Werthe des Winkels, welchem er angehört, und nur abhängig von dem Werthe des gröfsten und kleinsten Radius. Ist $R_{\prime} = 0$, so hat man den Hebelsarm der Reibung für eine Fläche, deren Projektion ein Kreis von Radius R oder jeder beliebige Sektor dieses Kreises ist:

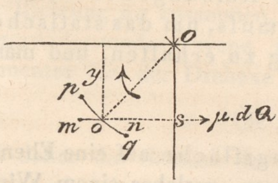
$$167\text{c)} \quad \mathfrak{R} = \tfrac{2}{3} \, . \, R.$$

Ist die Berührungsoberfläche eine krumme Fläche, so ist die Möglichkeit der Drehung nur vorhanden, wenn diese krumme Fläche eine Rotationsfläche ist, deren Axe mit der Drehaxe zusammenfällt. Ist dagegen die Berührungsfläche eine Ebene, so mufs dieselbe normal zur Drehaxe sein, wenn die Möglichkeit der Drehung vorhanden sein soll. Die Form der Berührungsfläche, d. h. die Gestalt der ebenen Figur, welche die sämmtlichen Berührungspunkte enthält, ist dabei gleichgiltig, der Hebelsarm der Reibung ist immer durch die Gleichung:

$$167\text{d)} \quad \mathfrak{R} = \frac{\Sigma(dA \, . \, r)}{A},$$

sei es durch Integriren, oder durch ein Näherungsverfahren zu berechnen.

II. Es bleibt noch der Fall zu erledigen, wo die Richtung des resultirenden Druckes nicht mit der Drehaxe zusammenfällt. Die Reibungswiderstände, welche auch hier im Schwerpunkt jedes Flächenelementes normal zur Richtung des resultirenden Druckes sind, liegen in Ebenen, welche die Drehungsebenen schneiden. Die Durchschnittslinie sei mn, so mufs nach dem Grundgesetz 4 in § 94 die Richtung mn auch die Richtung des Reibungswiderstandes $\mu \, . \, \frac{Q}{A} . dF \, . \sin \lambda$ sein, wie sich leicht übersehen läfst. Der



Hebelsarm einer Kraft, deren Richtung mn ist, wird durch Os

dargestellt, und setzen wir $Os = y$, so ist das Moment der im Elemente pq wirksamen Reibung:

$$168)\quad \mu \cdot \frac{Q}{A} \cdot dF \cdot \sin\lambda \cdot y.$$

Nehmen wir drei Koordinatenaxen an. Die erste Axe sei die Drehaxe, die zweite falle mit der Projektion von Q auf die Drehungsebene zusammeu; die dritte Axe OZ ist dann parallel mit der Durchschnittslinie mn, was sich durch eine einfache Betrachtung zeigen läfst.

Nun denken wir in jedem Berührungselement die Normale zu der Berührungsebene, in welcher dieses Element liegt. Diese Normale bildet mit der Richtung von Q den Komplementswinkel von λ, da λ den Winkel bezeichnete, den die Richtung von Q mit der Berührungsebene selbst bildet. Wenn nun diese Normale mit den Richtungen der drei Axen die Winkel φ, χ, ψ macht, und wenn die Richtung von Q mit denselben Axen die Winkel A, B, Γ bildet, so ist nach einem bekannten geometrischen Gesetz der Winkel, den die beiden Richtungen (Q und die Normale) mit einander bilden, nämlich $(90^0 - \lambda)$ durch die Gleichung zu bestimmen:

$$\cos(90^0 - \lambda) = \cos A \cdot \cos\varphi + \cos B \cdot \cos\chi + \cos\Gamma \cdot \cos\psi = \sin\lambda$$

und da $\Gamma = 90^0$ ist, so hat man $\cos A = \sin B$, und daher:

$$\sin\lambda = \sin B \cdot \cos\varphi + \cos B \cdot \cos\chi.$$

Hiernach geht nun die Gleichung 168) über in:

$$\mu Q \cdot \frac{(dF \cdot \sin B \cdot \cos\varphi + dF \cdot \cos B \cdot \cos\chi) \cdot y}{A}$$

und da auch $A = \Sigma(dF \cdot \sin\lambda)$ ist, so hat man zu setzen:

$$A = \Sigma(dF \cdot \sin B \cdot \cos\varphi + dF \cdot \cos B \cdot \cos\chi)$$
$$= \sin B \cdot \Sigma(dF \cdot \cos\varphi) + \cos B \cdot \Sigma(dF \cdot \cos\chi).$$

Man bemerke, dafs φ und χ die Winkel sind, welche die Normalen in den Elementen der Berührungsflächen mit der Axe der X und derjenigen der Y bilden, dafs folglich φ und χ auch die Winkel sind, welche je zwei Ebenen, die einzeln normal sind, auf einer der Axen und auf einer der Normalen mit einander einschliefsen. Die Ebenen normal auf der Normalen ist das Element der Berührungsfläche; die Ebene normal auf der ersten Axe ist die Drehungsebene, und die Ebene normal auf der zweiten Axe ist die Ebene parallel mit mn (zweite Projektionsebene). Hiernach ist $dF \cdot \cos\varphi$ die Projektion eines Berührungselementes auf die Drehungsebene, und $dF \cdot \cos\chi$ die Projektion eines Berührungselementes auf die zweite Koordinatenebene. Bezeichnen wir diese Elemente der Projektionen mit $dA_{,}$ und $dA_{,,}$ so ist das Moment des Reibungswiderstandes in einem Berührungselement:

$$d(\Theta a) = \mu Q \cdot \left[\frac{dA_{,} \cdot \sin B + dA_{,,} \cdot \cos B}{\Sigma(dA_{,}) \cdot \sin B + \Sigma(dA_{,,}) \cdot \cos B}\right] \cdot y$$

und daher ist die Summe der Momente der Reibungswiderstände:

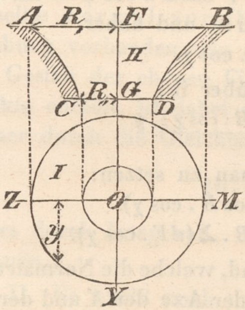
$$168\,\text{a)} \left\{ \begin{aligned} (\Theta a) &= \mu Q \cdot \Sigma \left[\frac{dA_{,} \cdot \sin B \cdot y + dA_{,,} \cdot \cos B \cdot y}{\Sigma(dA_{,}) \cdot \sin B + \Sigma(dA_{,,}) \cdot \cos B}\right] \\ &= \mu Q \cdot \left[\frac{\sin B \cdot \Sigma(dA_{,} \cdot y) + \cos B \cdot \Sigma(dA_{,,} \cdot y)}{\sin B \cdot \Sigma(dA_{,}) + \cos B \cdot \Sigma(dA_{,,})}\right]. \end{aligned} \right.$$

Für den Fall, dafs die Richtung des resultirenden Druckes parallel mit der Drehungsebene ist, hat man $B = o$, folglich ist dann das Moment der Reibung:

$$169\,\text{b)}\ (\Theta a) = \mu Q \cdot \frac{\Sigma(dA_{,,} \cdot y)}{\Sigma(dA_{,,})}.$$

Der Ausdruck in den Klammern ist auch hier der Hebelsarm der Reibung.

Gewöhnlich sind die reibenden Oberflächen Rotationsflächen, deren Erzeugungsaxe die Drehaxe ist. Denkt man durch die Richtung des Druckes und die Axe eine Ebene, und eine zweite Ebene normal zu dieser ebenfalls durch die Axe, so wird durch beide Ebenen die Rotationsfläche in Linien geschnitten, welche der Erzeugungslinie der Rotationsfläche kongruent sind. Um nun die Werthe der Gleichung 169a) zu bestimmen, sei in nebenstehender Figur:



I die Projektion der Rotationsfläche auf die Drehungsebene $= \Sigma(dA_{,})$,

II die Projektion der Rotationsfläche auf eine Ebene, die durch die Drehaxe geht, und normal zur Projektion OY des resultirenden Drucks auf die Drehungsebene YZ ist $= \Sigma(dA_{,,})$.

Die Projektion I ist immer eine Ringfläche oder ein voller Kreis, und der Ausdruck $\Sigma(dA_{,} \cdot y)$ ist nichts anderes, als die Summe der statischen Momente sämmtlicher Elemente dieses Ringstückes in Bezug auf die Axe OZ. Ist Y der Abstand des Schwerpunkts des halben Ringstückes $\frac{1}{2}\Sigma(dA)$ von der Axe OZ, so ist offenbar:

$$\Sigma(dA_{,} \cdot y) = 2 \cdot (Y \cdot \tfrac{1}{2}\Sigma(dA)).$$

Nun ist der Schwerpunkt der Halbkreisfläche von dem Mittelpunkt entfernt um $Y = \frac{4R}{3\pi}$, daher ist das statische Moment der Halbkreisfläche $Y \cdot \frac{1}{2}\Sigma(dA) = \frac{4R}{3\pi} \cdot \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{2}{3}R^3$, und wenn man mit $R_{\prime}$ und $R_{\prime\prime}$ den gröſsten und kleinsten Durchmesser der Rotationsfläche bezeichnet, so ist:

$$\Sigma(dA_{\prime} \,.\, y) = \tfrac{4}{3}(R_{\prime}^{3} - R_{\prime\prime}^{3}).$$

Die Komponente, welche **normal** zur Drehaxe ist $Q \,.\, \cos B$ erzeugt offenbar nur in dem Theil der Berührungsfläche Reibung, **gegen** den sie gerichtet ist, d. i. der Theil, welcher dem Bogen ZYM entspricht. Die Projektion dieses Theils auf die Ebene II ist die Figur $ABCD$. Betrachtet man den Ausdruck $\Sigma(dA_{\prime\prime} \,.\, y)$ so ist derselbe die Summe der Produkte aller Elemente der Fläche $ABCD$ in ihre Abstände von der Rotationsfläche, und diese Summe ist nichts anderes, als der **kubische Inhalt des Theiles des Rotationskörpers, welcher zwischen der Ebene** $ABCD$ **und der vordern Berührungsfläche** ZYM **liegt**; d. i. der halbe Inhalt des Rotationskörpers, den die **ganze** Berührungsfläche umschlieſst. Dieser Rotationskörper läſst sich aber auch nach der ersten **Guldin'schen Regel** ausdrücken (S. 155). Bezeichnet nämlich S den Flächeninhalt des Stückes $ACGF$, und Z den Abstand des Schwerpunktes dieses Stückes von der Drehaxe, so ist auch der Inhalt des halben Rotationskörpers:

$$\Sigma(dA_{\prime\prime} \,.\, y) = S \,.\, \pi \,.\, Z,$$

und hiernach geht die Gleichung 168a) über in:

$$168\text{c})\quad (\Theta a) = \mu Q \,.\, \frac{\sin B \,.\, \frac{4}{3}(R_{\prime}^{3} - R_{\prime\prime}^{3}) + \cos B \,.\, S \,.\, \pi \,.\, Z}{\sin B \,.\, \pi \,.\, (R_{\prime}^{2} - R_{\prime\prime}^{2}) + 2\cos B \,.\, S},$$

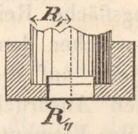
worin bezeichnet:

- Θa das statische Moment der Reibung einer Rotationsfläche;
- μ den Reibungs-Koeffizienten;
- Q den resultirenden Druck der auf das bewegliche System wirkenden Kräfte;
- B den Neigungswinkel der Richtung dieses Druckes gegen die Drehungsebene;
- $R_{\prime}$ den gröſsten, $R_{\prime\prime}$ den kleinsten Halbmesser der Berührungsfläche;
- S den Flächeninhalt der ebenen Figur, durch deren Rotation die Reibungsfläche entstanden ist;
- Z den Abstand des Schwerpunktes dieser Figur von der Drehaxe; folglich
- SZ das **statische Moment** der erzeugenden Figur in Bezug auf die Drehaxe.

Der **Hebelsarm der Reibung** drückt sich aus nach Gleichung 168c) durch:

$$168\text{d})\quad \mathfrak{N} = \frac{\sin B \,.\, \frac{4}{3}(R_{,}^3 - R_{,,}^3) + \cos B \,.\, S \,.\, \pi \,.\, Z}{\sin B \,.\, \pi \,.\, (R_{,}^2 - R_{,,}^2) + 2\cos B \,.\, S}$$

$$= \frac{4 \operatorname{tang} B \,.\, (R_{,}^3 - R_{,,}^3) + 3\pi \,.\, SZ}{3\pi \,.\, \operatorname{tang} B \,.\, (R_{,}^2 - R_{,,}^2) + 6S} \,.\, \cos B.$$



Es möge hier die Bestimmung des Hebelsarms der Reibung für verschiedene Zapfenformen folgen:

a) Cylindrische Zapfen von der Länge l.

Es ist $S = l \,.\, R_{,}$; $Z = \frac{1}{2}R_{,}$ folglich der Hebelsarm der Reibung:

$$169)\quad \mathfrak{N} = \frac{8 \operatorname{tang} B \,.\, (R_{,}^3 - R_{,,}^3) + 3\pi \,.\, l \,.\, R_{,}^2}{6\pi \,.\, \operatorname{tang} B \,.\, (R_{,}^2 - R_{,,}^2) + 12 l \,.\, R_{,}} \,.\, \cos B.$$

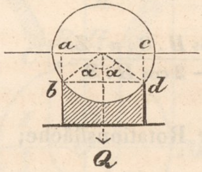
Setzen wir $R_{,,} = m \,.\, R_{,}$ und $l = n \,.\, R_{,}$ so ist:

$$169\text{a})\quad \mathfrak{N} = R_{,} \,.\, \cos B \,.\, \frac{8 \operatorname{tang} B \,.\, (1 - m^3) + 3\pi \,.\, n}{6\pi \,.\, \operatorname{tang} B \,.\, (1 - m^2) + 12 n},$$

und wenn der Druck normal zur Axe ist:

$$169\text{b})\quad \mathfrak{N} = \frac{\pi}{4} \,.\, R_{,}.$$

Dies setzt voraus, dafs der cylindrische Zapfen wenigstens zur Hälfte umschlossen ist. Wenn dagegen der Zapfen nur auf eine Bogenlänge gleich 2α umschlossen ist, und zwar so, dafs dieselbe gegen die Richtung des resultirenden Druckes symmetrisch vertheilt ist, so hat man den Inhalt des Körpers $a\,b\,c\,d$ oder den Werth:



$$\Sigma(dA_{,,} \,.\, y) = l \,.\, R_{,}^2 \,.\, (\alpha + \sin\alpha \,.\, \cos\alpha),$$

und $\Sigma(dA_{,,}) = 2l \,.\, R_{,} \,.\, \sin\alpha$,

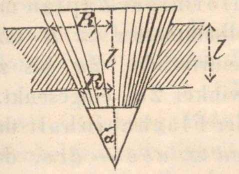
folglich:

$$169\text{c})\quad \mathfrak{N} = \tfrac{1}{2}R_{,} \,.\, \left(\frac{\alpha + \sin\alpha \,.\, \cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = R_{,} \,.\, \frac{\alpha + \frac{1}{2} \,.\, \sin 2\alpha}{2 \,.\, \sin\alpha}$$

$$= \tfrac{1}{2}R_{,} \,.\, \left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} + \cos\alpha\right).$$

Man sieht leicht, dafs wenn der Zapfen nur auf die Bogenlänge α umschlossen wäre, diese aber auf einer Seite der Richtung des resultirenden Druckes von der Mittellinie an gerechnet läge, mit andern Worten, dafs wenn man die halbe Umschliefsung fortliefse, der Werth $\Sigma(dA_{,,} \,.\, y)$ sowohl, als $\Sigma(dA_{,,})$ jeder halb so grofs werden würde, dafs also $\mathfrak{N}$ ungeändert bliebe. Diese Bemerkung trifft immer zu, wenn der Druck normal zur Axe ist, gleichviel welche Form der Zapfen hat.

Wenn α sehr klein wird, so ist $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ nahezu gleich 1, und



auch $\cos\alpha$ nahezu gleich 1, und wenn α gleich Null wird, so werden diese Werthe genau erreicht. Man hat daher für einen cylindrischen Zapfen, der nur in einer Seite aufliegt, oder, der doch nur eine sehr kleine Berührungsfläche hat, falls der Druck normal zur Axe ist:

$$169\text{d})\quad \mathfrak{R} = R_{,}.$$

b) Konischer Zapfen von der Länge l.

Es ist $S = \frac{R_{,} + R_{,,}}{2} \cdot l$;

$$S \cdot Z = \tfrac{1}{2} l \cdot R_{,,}^{2} + \tfrac{1}{6} l \cdot (R_{,} - R_{,,}) \cdot (R_{,} + 3R_{,,}) = \tfrac{1}{6} l \cdot R_{,} \cdot (R_{,} + 2R_{,,}),$$

folglich der Hebelsarm der Reibung:

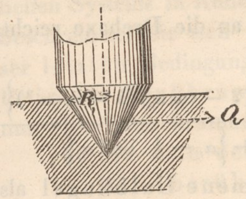
$$170)\quad \mathfrak{R} = \frac{8 \cdot \operatorname{tang} B \cdot (R_{,}^{3} - R_{,,}^{3}) + \pi l \cdot R_{,} \cdot (R_{,} + 2R_{,,})}{6\pi \cdot \operatorname{tang} B \cdot (R_{,}^{2} - R_{,,}^{2}) + 6l \cdot (R_{,} + R_{,,})} \cdot \cos B.$$

Setzen wir wieder $R_{,,} = m \cdot R_{,}$ und $l = n \cdot R_{,}$ so geht der Ausdruck über in:

$$170\text{a})\quad \mathfrak{R} = \tfrac{1}{6} R_{,} \cdot \cos B \cdot \frac{8 \cdot \operatorname{tang} B \cdot (1 - m^{3}) + \pi n \cdot (1 + 2m)}{\pi \cdot \operatorname{tang} B \cdot (1 - m^{2}) + n \cdot (1 + m)},$$

und wenn der Druck normal zur Drehaxe ist:

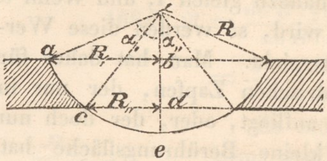
$$\mathfrak{R} = \frac{\pi}{6} R \cdot \frac{1 + 2m}{1 + m}.$$



Dieser Ausdruck wird um so kleiner, je kleiner m ist, und daher am kleinsten, wenn $m = 0$ ist, d. h. wenn der Zapfen ein voller Kegel ist, der vom Halbmesser $R_{,}$ bis zur Spitze aufliegt. Man hat dann:

$$\mathfrak{R} = \frac{\pi}{6} R_{,}.$$

Es folgt auch aus diesen Gleichungen, daſs, wenn der Druck normal zur Axe gerichtet ist, es bei einem kegelförmigen Zapfen gar nicht auf den Neigungswinkel des Kegels ankommt, sondern nur auf den gröſsten und kleinsten Radius der Berührungsfläche, und daſs ein konischer Zapfen in diesem Fall immer ein geringeres Reibungsmoment haben müsse, als ein cylindrischer Zapfen, dessen Durchmesser gleich dem gröſsten Durchmesser des Kegels ist. Endlich ersieht man, daſs wenn der Zapfen von einem gewissen Durchmesser $R_{,}$ ab nach der Spitze hin um ein gewisses Stück aufliegt, das Moment der Reibung um so geringer ist, je länger dieser aufliegende Theil ist.



c) Kugelförmiger Zapfen mit einem Kugelhalbmesser $= R$ und von dem Centriwinkel $2\alpha_{,}$ bis zu dem Centriwinkel $2\alpha_{,,}$ eingesenkt.

Es ist der Flächeninhalt des Stückes *abcd* $=$ *abe* $-$ *dce*, daher ist:

$$S = \tfrac{1}{2}R^2 \,.\, \left\{\alpha_{,} - \alpha_{,,} - \sin\alpha_{,} \,.\, \cos\alpha_{,} + \sin\alpha_{,,} \,.\, \cos\alpha_{,,}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}R^2 \,.\, \left\{\alpha_{,} - \alpha_{,,} - \tfrac{1}{2} \,.\, (\sin 2\alpha_{,} - \sin 2\alpha_{,,})\right\},$$

ferner ist das statische Moment des Stückes *abcd* durch eine einfache Rechnung zu finden:

$$SZ = \tfrac{1}{3}R^3 \,.\, \left\{1 - \cos\alpha_{,} \,.\, (1 + \tfrac{1}{2}\sin\alpha_{,}^2) - 1 + \cos\alpha_{,,} \,.\, (1 + \tfrac{1}{2}\sin\alpha_{,,}^2)\right\}$$

$$= \tfrac{1}{6}R^3 \,.\, \left\{\cos\alpha_{,,} \,.\, (3 - \cos\alpha_{,,}^2) - \cos\alpha_{,} \,.\, (3 - \cos\alpha_{,}^2)\right\}.$$

Nun ist noch $R_{,} = R \,.\, \sin\alpha_{,}$; $R_{,,} = R \,.\, \sin\alpha_{,,}$ und man hat nach Gleichung 168d) den Hebelsarm der Reibung:

$$171)\ \mathfrak{R} = \tfrac{1}{6}R \,.\, \cos B \,.\, \frac{8 \,.\, \operatorname{tang} B \,.\, (\sin\alpha_{,}^3 - \sin\alpha_{,,}^3) + \pi \,.\, \left\{3 \,.\, (\cos\alpha_{,,} - \cos\alpha_{,}) - (\cos\alpha_{,,}^3 - \cos\alpha_{,}^3)\right\}}{\pi \,.\, \operatorname{tang} B \,.\, (\sin\alpha_{,}^2 - \sin\alpha_{,,}^2) + \left\{(\alpha_{,} - \alpha_{,,}) - \tfrac{1}{2} \,.\, (\sin 2\alpha_{,} - \sin 2\alpha_{,,})\right\}}.$$

Für den Fall, dafs die Begrenzung bis an die Drehaxe reicht, ist $\alpha_{,,} = 0$, und man hat:

$$171\text{a})\ \mathfrak{R} = \tfrac{1}{6}R \,.\, \cos B \,.\, \frac{8 \,.\, \operatorname{tang} B \,.\, \sin\alpha_{,}^3 + \pi \,.\, \left\{2 - \cos\alpha_{,} \,.\, (3 - \cos\alpha_{,}^2)\right\}}{\pi \,.\, \operatorname{tang} B \,.\, \sin\alpha_{,}^2 + \left\{\alpha_{,} - \tfrac{1}{2} \,.\, \sin 2\alpha_{,}\right\}}.$$

und für den Fall, dafs man eine vollkommene Halbkugel als reibende Fläche hat, ist $\alpha_{,} = \tfrac{1}{2}\pi$, und man hat:

$$171\text{b})\ \mathfrak{R} = \tfrac{2}{3}R \,.\, \cos B \,.\, \frac{\frac{4}{\pi} \,.\, \operatorname{tang} B + 1}{2 \,.\, \operatorname{tang} B + 1}.$$

Wenn hierbei der Druck normal zur Drehaxe ist, so geht der Hebelsarm der Reibung für die Halbkugel über in:

$$171\text{c})\ \mathfrak{R} = \tfrac{2}{3}\text{R},$$

d. h. der Hebelsarm der Reibung für eine Halbkugel ist derselbe, gleichviel ob der Druck parallel mit der Drehaxe, oder normal zur Drehaxe wirkt.

Wenn nun ganz allgemein (Θa) das statische Moment der Reibung, und Pr das statische Moment der auf Drehung wirkenden bewegenden Kräfte, beides für eine gegebene Axe, bezeichnet, so ist immer (Θa) dem Moment Pr entgegengesetzt, folglich hat man als Moment der wirklich Drehung erzeugenden Kräfte:

$$172)\ (Pr - \Theta a) = f_{\prime} \cdot J_{\prime}$$

(nach Gleichung 154a, S. 167, wenn $f_{\prime}$ das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit, und $J_{\prime}$ das Trägheitsmoment des Systems in Bezug auf dieselbe Axe bezeichnet) folglich ist:

$$172a)\ f_{\prime} = \frac{Pr - (\Theta a)}{J_{\prime}}.$$

Je nachdem nun wieder $Pr > \Theta a$; $Pr = \Theta a$, oder $Pr < \Theta a$ ist, befindet sich das bewegliche System aufserhalb der Grenze des drehenden Gleitens, an der Grenze, oder innerhalb der Grenze desselben, und es lassen sich ähnliche Betrachtungen anstellen, wie am Schlusse des § 95.

Widerstände gegen Kippen; Stabilität; Rollen.

§ 99. Wir haben noch in § 93. derjenigen Veränderung der Lage des beweglichen Systems gegen ein fixes System gedacht, welche wir „Kippen“ nannten. Bei dem Kippen berührt die Drehungsaxe des beweglichen Systems beide Systeme, und nimmt einen oder mehre Punkte der Berührungsfläche auf. Diese in der Axe des Kippens liegenden Punkte bleiben bei der Bewegung des beweglichen Systems in Ruhe, während alle andern Punkte Bogenelemente beschreiben, die sich von dem fixen System abheben. Aus dieser letzten Bedingung folgt, dafs, wenn wir die Begrenzungslinie der Berührungsfläche denken (die Berührungsfläche mag nun eben oder krumm sein):

1) die Axe des Kippens immer diese Begrenzungslinie berühren mufs;

und aus der ersten Bedingung folgt:

2) dafs die Axe des Kippens in derjenigen Berührungsebene beider Systeme liegen mufs, die dem Punkte angehört, in welchem diese Axe die Begrenzungslinie berührt.

Die Bedingung 1) ist sofort ersichtlich, wenn man bemerkt, dafs für jede Axe, welche die Begrenzungslinie der Berührungsfläche schneidet, unmittelbar benachbarte Berührungspunkte existiren, die auf verschiedenen Seiten dieser Axe liegen. Bei der Drehung des Systems um diese Axe würden nun zwar die Punkte auf der einen Seite sich von der Berührungsebene, in welcher die Axe liegt abheben können, die Punkte der andern Seite müfs-