tender Bewegung ein Wegelement, das normal ist zu dem kürzesten Abstand des Schwerpunkts von der Drehaxe, während gleichzeitig sämmtliche Massenelemente um eine durch den Schwerpunkt gehende, mit der fixen Axe parallele Axe mit derselben Winkelgeschwindigkeit w rotiren. Das Aenderungsmaaſs jener fortschreitenden Bewegung drückt sich aus durch die Summe aller auf den Abstand des Schwerpunkts reduzirten Drucke, dividirt durch die Masse und multiplizirt mit dem Verhältniſs des Quadrats des kürzesten Abstandes des Schwerpunkts von der fixen Axe zur Summe dieses Quadrates und dem Quadrat des Drehungshalbmessers für die durch den Schwerpunkt gedachte Axe.

Aus der Gleichung 161) folgt, daſs der Druck, der im Schwerpunkt auf fortschreitende Bewegung wirkt, und welcher durch die Reaktion im fixen Punkte aufgehoben werden muſs, indem er mit dieser Reaktion ein Kräftepaar bildet, sich ausdrückt durch:

$$161\text{a)}\quad K = fM = \frac{\Sigma(Ka)}{R} \cdot \frac{R^2}{(R^2+\varrho^2)}\,.$$

Endlich ist das Moment des Kräftepaars, welches auf Drehung des Schwerpunkts um den fixen Punkt wirkt

$$161\text{b)}\quad K.R = \Sigma(Ka) \cdot \frac{R^2}{R^2+\varrho^2}$$

und das Moment des Kräftepaars, welches auf Drehung um die durch den Schwerpunkt gehende parallele Axe wirkt, nach Gleichung 145a) und 161):

$$161\text{c)}\quad f_{\prime}J = \frac{\Sigma(Ka)}{J_{\prime}} \,.\, J = \Sigma(Ka)\frac{\varrho^2}{R^2+\varrho^2}\,.$$

Durch Addition der Gleichungen 161b) und 161c) ergiebt sich wieder $\Sigma(Ka)$ als die Summe der Momente der Kräftepaare in der zur Drehaxe des Systems normalen Ebene.

d) Wirkung fester Systeme, die von mechanischen Kräften in Anspruch genommen werden, auf einander.

Grundsätze für die Wirkung fester Systeme auf einander.

§ 92. Denken wir zunächst zwei feste Systeme (§ 63) von Massenelementen, so können dieselben sich entweder berühren oder nicht. Berühren sich die festen Systeme, so mufs die Berührung wenigstens in einem Massenelement statt finden, sie kann auch in mehren zugleich erfolgen; in beiden Fällen können wir die sich berührenden Massenelemente als Flächenelemente ansehen, und es wird immer eine beiden gemeinschaftliche Normale denkbar sein. Wenn die beiden Systeme sich nicht berühren, so können sie entweder ihren Abstand von einander gar nicht ändern, oder sie können denselben vergröfsern oder vermindern. Wenn diese Verminderung des Abstandes dauernd erfolgt, oder wenn doch die Verminderung des Abstandes überwiegend ist, gegen die etwa inzwischen eintretende Vergröfserung desselben, so müssen sich die festen Systeme endlich treffen, d. h. es mufs endlich ihr Abstand Null werden, sie müssen endlich sich berühren, und dann ist wieder in jedem Berührungselement eine gemeinschaftliche Normale denkbar.

Wenn die festen Systeme sich nicht berühren, so findet erfahrungsmäfsig gleichwohl eine Einwirkung der einzelnen Massenelemente aufeinander statt (vergl. § 18. S. 20). Diese Art der Einwirkung, welche Folge der allgemeinen Gravitation ist, lassen wir einstweilen ganz aufser Betracht, da sie für die vorliegenden Zwecke, wo wir es immer nur mit Systemen zu thun haben, die verhältnifsmäfsig eine sehr geringe Zahl von Massenelementen besitzen, nur von fast ganz verschwindender Bedeutung ist. Hat man dagegen mit so ausgedehnten Systemen zu thun, wie sie durch ganze Himmelskörper dargestellt werden, so ist allerdings die eben angedeutete Einwirkung dieser Systeme aus der Ferne auf einander von der gröfsten Bedeutung.

Nach der eben vorgetragenen Darstellung haben wir hier nur den Fall zu betrachten, wo sich die beiden festen Systeme berühren; sei es nun, dafs diese Berührung von Hause aus stattgefunden hat, oder dafs sie erst entstanden ist, indem die festen Systeme einander trafen. In beiden Fällen beurtheilen wir die Wirkung der beiden Systeme auf einander nach folgenden Grundsätzen:

Wenn sich zwei feste Systeme berühren, so sind entweder Kräfte vorhanden, welche eine Trennung beider Systeme herbeiführen, oder es sind solche Kräfte nicht vorhanden, und dann bleiben die beiden Systeme während der Dauer der Betrachtung in Berührung. Dieser letzte Fall ist es, den wir hier zunächst voraussetzen.

Die beiden festen Systeme mögen sich während der Dauer der Betrachtung nicht trennen; sie können dabei gleichwohl ihre Berührungspunkte ändern. Hierbei ist es denkbar, dafs sich beide Systeme bewegen, oder, dafs sich nur eines von beiden bewegt. Wenn sich nur eines von beiden Systemen bewegt, das andere aber nicht, so nennen wir dieses das fixe System, das erste das bewegliche System.

Bewegen sich dagegen beide Systeme, indem sie dabei zugleich ihre Berührungspunkte ändern, so können wir im Sinne des Grundsatzes in § 24. No. 1 diese beiden gleichzeitigen Bewegungen immer so auffassen, als ob sie innerhalb der Dauer desselben Zeitelementes nach einander erfolgten, indem wir nämlich annehmen, dafs zuerst beide Systeme nach entsprechenden Richtungen gemeinschaftlich sich bewegen ohne ihre Berührungspunkte zu ändern, und dafs dann das eine System still stände, und das andere sich so bewege, dafs nun die Aenderung der Berührungspunkte erfolge. Es werden durch eine solche Betrachtung die Bewegungen zurückgeführt auf die Bewegung eines zusammenhängenden Gesammtsystems, und auf die Bewegung eines beweglichen Systems gegen ein fixes System.

Hierzu dienen folgende Untersuchungen. Die beiden Systeme werden mit I und II bezeichnet; wir betrachten zunächst alle Bewegungen des Systems II, und nehmen an, dafs das System I sich mit dem System II gemeinschaftlich bewege, ohne dafs die Berührungspunkte sich ändern; dann betrachten wir das System II als fixes System, und untersuchen, welche Bewegungen nun noch das System I. machen müsse, um die bedingte Aenderung der Berührungspunkte herbeizuführen.

Wenn das System II sich bewegt, so hat es im Allgemeinen eine fortschreitende Bewegung und eine drehende Bewegung um irgend eine Axe; soll nun das System I sich nicht von dem System II trennen, und auch die Berührungspunkte nicht ändern, so mufs es sich mit derselben Geschwindigkeit nach derselben Richtung fortschreitend bewegen, und auch mit derselben Winkelgeschwindigkeit um dieselbe Axe rotiren.

Es seien:

K^{I} und K^{II} die Summen der Komponenten der auf die beiden Systeme wirkenden Kräfte für die Richtung der fortschreitenden Bewegung des Systems II.

M^{I} und M^{II} die Massen der beiden Systeme.

f^{I} und f^{II} die Aenderungsmaafse der Geschwindigkeiten, welche die Kräfte K^{I} und K^{II} der Masse M^{I} und M^{II} zu ertheilen streben.

$(Pa)^{I}$ und $(Pa)^{II}$ die statischen Momente der auf die beiden Systeme wirkenden Kräfte in Bezug auf Drehung um die Axe, um welche sich das System wirklich dreht.

$f_{\prime}{}^{I}$ und $f_{\prime}{}^{II}$ die Aenderungsmaafse der Winkelgeschwindigkeiten für dieselbe Axe.

$J_{\prime}{}^{I}$ und $J_{\prime}{}^{II}$ die Trägheitsmomente der beiden Systeme in Bezug auf dieselbe Axe. Nach dem Früheren finden die Beziehungen statt:

$$K^{I} = M^{I}.f^{I};\ K^{I} = M^{II}.f^{II};\ (Pa)^{I} = J_{\prime}^{I}.f_{\prime}^{I};\ (Pa)^{II} = J_{\prime}^{II}.f_{\prime}^{II}.$$

Indem nun das System I den Bewegungen des Systems II genau folgt, so als ob beide ein System bilden, bewegt es sich mit Geschwindigkeiten, deren Aenderungsmaafse gleich denen des Systems II sind, nämlich gleich f^{II} und $f_{\prime}^{II}$. Die auf das System I wirkenden Kräfte haben aber das Bestreben, dem System I die Aenderungsmaafse f^{I} und $f_{\prime}^{I}$ zu ertheilen, es wird also indem sich beide Systeme gemeinschaftlich bewegen in dem System I noch ein Bestreben auf Bewegung bleiben, dem während der Dauer dieser gemeinschaftlichen Bewegung nicht Genüge gethan ist, und welchem, wenn das System I nach Vollendung jener gemeinschaftlichen Bewegungen frei wird, noch die Aenderungsmaafse $(f^{I} - f^{II})$ beziehlich $(f_{\prime}^{I} - f_{\prime}^{II})$ in dem System I entsprechen würden. Diesem auf die Masse M^{I} wirkenden Bestreben auf Bewegung entspricht nach § 19. S. 23 ein Druck, und ein statisches Moment, welches wir mit K, beziehlich mit (Pa) bezeichnen wollen, und es ist:

$$162)\quad \left\{\begin{array}{l} K = M^{I}.(f_{\prime}^{I} - f_{\prime}^{II}) = K^{I} - \dfrac{M^{I}}{M^{II}}\cdot K^{II} \\ (Pa) = J_{\prime}^{I}.(f^{I} - f^{II}) = (Pa) - \dfrac{J_{\prime}^{I}}{J_{\prime}^{II}}\cdot (Pa)^{II}. \end{array}\right.$$

Die Komponenten der Kräfte, welche auf das System I wirken für Richtungen, die zu der Bewegungsrichtung des Systems II normal sind, bleiben dabei ungeändert, ebenso die Kräftepaare für Axen, die zu der Drehaxe des Systems II normal sind.

I. Hieraus folgt, dafs, wenn beide Systeme sich bewegen, man das eine von beiden immer als fixes System betrachten kann, das andere als bewegliches System, indem man vorher oder nachher die Bewegungen untersucht, welche das bewegliche System mit dem fixen gemeinschaftlich macht. Die Summe der Drucke und das Kräftepaar, welches bei jener Betrachtung auf das bewegliche System und zwar parallel mit der Richtung der Bewegung des als fix betrachteten Systems wirkend zu denken sind, bestimmen sich nach Gleichung 162), wobei namentlich die Vorzeichen bei der Bildung der algebraischen Summen zu beachten sind.

Wenn beide Systeme fallen, und es wirken in der Richtnng der Schwere keine andern Kräfte auf die einzelnen Systeme, so ist das Aenderungsmaafs $f^I = g$ und $f^{II} = g$, folglich $K = 0$. d. h.

II. Wenn zwei Systeme sich berühren und frei fallen, so ist der aus der Schwere hervorgehende Druck, mit welchem das eine System gegen das andere geprefst wird gleich Null.

Nehmen wir an, dafs das zweite System mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich bewegt. Die gleichförmige Bewegung bedingt nach § 14. S. 16, dafs die Kräfte, welche auf das zweite System angebracht sind, für die Richtung der Bewegung im Gleichgewicht seien, d. h. dafs K^{II} gleich Null sei. In diesem Falle ist auch f^{II} gleich Null, und wenn wir eine drehende Bewegung betrachten, so mufs für eine gleichförmige Winkelgeschwindigkeit auch das Aenderungsmaafs derselben $f_i^{II} = 0$ sein. Für diesen Fall nun gehen die Gleichungen 162) über in

$$162a)\quad K = K^I; \quad (Pa) = (Pa)^I.$$

III. d. h. Wenn zwei feste Systeme die sich berühren sich gleichzeitig bewegen, und das eine von beiden bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortschreitend oder mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit drehend um eine Axe, so bleibt sowohl die Summe der Komponenten des Druckes der auf das andere System angebrachten Kräfte für diese Richtung, als auch das resultirende Kräftepaar des andern Systems für diese Drehaxe ungeändert.

Nach dem Inhalt dieses Paragraphen läfst sich die Bewegung zweier festen Systeme, die sich berühren im Allgemeinen auf zwei Bewegungen zurückführen, von denen wir die eine, welche beide Systeme gemeinschaftlich haben die gemeinschaftliche Bewegung, die andere dagegen, welche eine Aenderung der Berührungspunkte der beiden Systeme zur Folge hat, die Verschiebung nennen wollen. Ebenso folgt aus den vorigen Untersuchungen, dafs bei der Betrachtung der Verschiebung wir immer das eine von beiden Systemen als fixes, das andere als bewegliches System ansehen können.

Die Berührungspunkte der beiden Systeme sind immer als Punkte zu betrachten, die sowohl dem einen System, wie dem andern

System angehören. Diese Punkte werden aber je nachdem man sie zu dem einen System oder zu dem andern System gehörend betrachtet, verschiedene Wege durchlaufen. Die ursprünglichen Berührungspunkte des als fix betrachteten Systems werden nur Wege durchlaufen, welche der gemeinschaftlichen Bewegung entsprechen; die Berührungspunkte des beweglichen Systems dagegen werden gleichzeitig die Wege beschreiben, die aus der gemeinschaftlichen Bewegung hervorgehen, und diejenigen, welche durch die Verschiebung bedingt werden, sie werden also sich nach einer resultirenden Richtung bewegen, deren Komponenten jene Einzelwege sind. Wir nennen die resultirenden Bewegung, welche diese Punkte jenen beiden Komponenten zufolge machen, die absolute Bewegung der Berührungspunkte des beweglichen Systems.

Nach diesen Auseinandersetzungen haben wir nun folgende Dispositionen; wir handeln:

1) von der Verschiebung,
2) von der gemeinschaftlichen Bewegung,
3) von der absoluten Bewegung.

Von der Verschiebung zweier festen Systeme.

Gesetz über die Möglichkeit der Verschiebung; Kippen, Gleiten.

§ 93. Indem wir von zwei festen Systemen eins als fixes System, das andere als bewegliches System betrachten, setzen wir voraus, dafs beide Systeme stets in Berührung bleiben sollen (§ 92), dafs aber gleichwohl eine Aenderung der Berührungspunkte statt finden kann. Untersuchen wir zunächst, wie diese Aenderung der Berührungspunkte beschaffen sein kann.

Indem sich die Berührungspunkte ändern, bewegt sich das bewegliche System, und da wir wissen, dafs jede Bewegung eines festen Systems sich auf eine fortschreitende und auf eine drehende zurückführen läfst, so wird auch bei der Verschiebung des beweglichen Systems dasselbe entweder fortschreitend sich bewegen, oder drehend, oder beides zugleich.

Wenn das bewegliche System sich fortschreitend verschiebt, so durchlaufen alle Punkte desselben, folglich auch die Berührungspunkte gleich grofse und parallele Wegelemente (§ 65. S. 88). Wenn dagegen das bewegliche System sich drehend verschiebt, so beschreiben die Berührungspunkte im Allgemeinen Kreisbögen um eine gemeinschaftliche Axe.