tender Bewegung ein Wegelement, das normal ist zu dem kürzesten Abstand des Schwerpunkts von der Drehaxe, während gleichzeitig sämmtliche Massenelemente um eine durch den Schwerpunkt gehende, mit der fixen Axe parallele Axe mit derselben Winkelgeschwindigkeit w rotiren. Das Aenderungsmaafs jener fortschreitenden Bewegung drückt sich aus durch die Summe aller auf den Abstand des Schwerpunkts reduzirten Drucke, dividirt durch die Masse und multiplizirt mit dem Verhältnifs des Quadrats des kürzesten Abstandes des Schwerpunkts von der fixen Axe zur Summe dieses Quadrates und dem Quadrat des Drehungshalbmessers für die durch den Schwerpunkt gedachte Axe.

Aus der Gleichung 161) folgt, dafs der Druck, der im Schwerpunkt auf fortschreitende Bewegung wirkt, und welcher durch die Reaktion im fixen Punkte aufgehoben werden mufs, indem er mit dieser Reaktion ein Kräftepaar bildet, sich ausdrückt durch:

$$161\text{a})\quad K = fM = \frac{\Sigma(Ka)}{R} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + \varrho^2)}\,.$$

Endlich ist das Moment des Kräftepaars, welches auf Drehung des Schwerpunkts um den fixen Punkt wirkt

$$161\text{b})\quad K.R = \Sigma(Ka) \cdot \frac{R^2}{R^2 + \varrho^2}$$

und das Moment des Kräftepaars, welches auf Drehung um die durch den Schwerpunkt gehende parallele Axe wirkt, nach Gleichung 145a) und 161):

$$161\text{c})\quad f_{\prime}J = \frac{\Sigma(Ka)}{J_{\prime}} \,.\, J = \Sigma(Ka)\,\frac{\varrho^2}{R^2 + \varrho^2}\,.$$

Durch Addition der Gleichungen 161b) und 161c) ergiebt sich wieder $\Sigma(Ka)$ als die Summe der Momente der Kräftepaare in der zur Drehaxe des Systems normalen Ebene.

d) Wirkung fester Systeme, die von mechanischen Kräften in Anspruch genommen werden, auf einander.

Grundsätze für die Wirkung fester Systeme auf einander.

§ 92. Denken wir zunächst zwei feste Systeme (§ 63) von Massenelementen, so können dieselben sich entweder berühren oder nicht. Berühren sich die festen Systeme, so mufs die Berührung wenigstens in einem Massenelement statt finden, sie kann auch in mehren zugleich erfolgen; in beiden Fällen können wir die sich berührenden Massenelemente als Flächenelemente ansehen, und es wird immer eine beiden gemeinschaftliche Normale denkbar sein. Wenn die beiden Systeme sich nicht berühren, so können sie entweder ihren Abstand von einander gar nicht ändern, oder sie können denselben vergröfsern oder vermindern. Wenn diese Verminderung des Abstandes dauernd erfolgt, oder wenn doch die Verminderung des Abstandes überwiegend ist, gegen die etwa inzwischen eintretende Vergröfserung desselben, so müssen sich die festen Systeme endlich treffen, d. h. es mufs endlich ihr Abstand Null werden, sie müssen endlich sich berühren, und dann ist wieder in jedem Berührungselement eine gemeinschaftliche Normale denkbar.

Wenn die festen Systeme sich nicht berühren, so findet erfahrungsmäfsig gleichwohl eine Einwirkung der einzelnen Massenelemente aufeinander statt (vergl. § 18. S. 20). Diese Art der Einwirkung, welche Folge der allgemeinen Gravitation ist, lassen wir einstweilen ganz aufser Betracht, da sie für die vorliegenden Zwecke, wo wir es immer nur mit Systemen zu thun haben, die verhältnifsmäfsig eine sehr geringe Zahl von Massenelementen besitzen, nur von fast ganz verschwindender Bedeutung ist. Hat man dagegen mit so ausgedehnten Systemen zu thun, wie sie durch ganze Himmelskörper dargestellt werden, so ist allerdings die eben angedeutete Einwirkung dieser Systeme aus der Ferne auf einander von der gröfsten Bedeutung.

Nach der eben vorgetragenen Darstellung haben wir hier nur den Fall zu betrachten, wo sich die beiden festen Systeme berühren; sei es nun, dafs diese Berührung von Hause aus stattgefunden hat, oder dafs sie erst entstanden ist, indem die festen Systeme einander trafen. In beiden Fällen beurtheilen wir die Wirkung der beiden Systeme auf einander nach folgenden Grundsätzen:

Wenn sich zwei feste Systeme berühren, so sind entweder Kräfte vorhanden, welche eine Trennung beider Systeme herbeiführen, oder es sind solche Kräfte nicht vorhanden, und dann bleiben die beiden Systeme während der Dauer der Betrachtung in Berührung. Dieser letzte Fall ist es, den wir hier zunächst voraussetzen.

Die beiden festen Systeme mögen sich während der Dauer der Betrachtung nicht trennen; sie können dabei gleichwohl ihre Berührungspunkte ändern. Hierbei ist es denkbar, dafs sich beide Systeme bewegen, oder, dafs sich nur eines von beiden bewegt. Wenn sich nur eines von beiden Systemen bewegt, das andere aber nicht, so nennen wir dieses das fixe System, das erste das bewegliche System.

Bewegen sich dagegen beide Systeme, indem sie dabei zugleich ihre Berührungspunkte ändern, so können wir im Sinne des Grundsatzes in § 24. No. 1 diese beiden gleichzeitigen Bewegungen immer so auffassen, als ob sie innerhalb der Dauer desselben Zeitelementes nach einander erfolgten, indem wir nämlich annehmen, dafs zuerst beide Systeme nach entsprechenden Richtungen gemeinschaftlich sich bewegen ohne ihre Berührungspunkte zu ändern, und dafs dann das eine System still stände, und das andere sich so bewege, dafs nun die Aenderung der Berührungspunkte erfolge. Es werden durch eine solche Betrachtung die Bewegungen zurückgeführt auf die Bewegung eines zusammenhängenden Gesammtsystems, und auf die Bewegung eines beweglichen Systems gegen ein fixes System.

Hierzu dienen folgende Untersuchungen. Die beiden Systeme werden mit I und II bezeichnet; wir betrachten zunächst alle Bewegungen des Systems II, und nehmen an, dafs das System I sich mit dem System II gemeinschaftlich bewege, ohne dafs die Berührungspunkte sich ändern; dann betrachten wir das System II als fixes System, und untersuchen, welche Bewegungen nun noch das System I. machen müsse, um die bedingte Aenderung der Berührungspunkte herbeizuführen.

Wenn das System II sich bewegt, so hat es im Allgemeinen eine fortschreitende Bewegung und eine drehende Bewegung um irgend eine Axe; soll nun das System I sich nicht von dem System II trennen, und auch die Berührungspunkte nicht ändern, so mufs es sich mit derselben Geschwindigkeit nach derselben Richtung fortschreitend bewegen, und auch mit derselben Winkelgeschwindigkeit um dieselbe Axe rotiren.

Es seien:

K^I und K^{II} die Summen der Komponenten der auf die beiden Systeme wirkenden Kräfte für die Richtung der fortschreitenden Bewegung des Systems II.

M^I und M^{II} die Massen der beiden Systeme.

f^I und f^{II} die Aenderungsmaafse der Geschwindigkeiten, welche die Kräfte K^I und K^{II} der Masse M^I und M^{II} zu ertheilen streben.

$(Pa)^I$ und $(Pa)^{II}$ die statischen Momente der auf die beiden Systeme wirkenden Kräfte in Bezug auf Drehung um die Axe, um welche sich das System wirklich dreht.

f_I^I und f_I^{II} die Aenderungsmaafse der Winkelgeschwindigkeiten für dieselbe Axe.

J_I^I und J_I^{II} die Trägheitsmomente der beiden Systeme in Bezug auf dieselbe Axe. Nach dem Früheren finden die Beziehungen statt:

$$K^I = M^I . f^I;\ K^I = M^{II} . f^{II};\ (Pa)^I = J_I^I . f_I^I;\ (Pa)^{II} = J_I^{II} . f_I^{II}.$$

Indem nun das System I den Bewegungen des Systems II genau folgt, so als ob beide ein System bilden, bewegt es sich mit Geschwindigkeiten, deren Aenderungsmaafse gleich denen des Systems II sind, nämlich gleich f^{II} und f_I^{II}. Die auf das System I wirkenden Kräfte haben aber das Bestreben, dem System I die Aenderungsmaafse f^I und f_I^I zu ertheilen, es wird also indem sich beide Systeme gemeinschaftlich bewegen in dem System I noch ein Bestreben auf Bewegung bleiben, dem während der Dauer dieser gemeinschaftlichen Bewegung nicht Genüge gethan ist, und welchem, wenn das System I nach Vollendung jener gemeinschaftlichen Bewegungen frei wird, noch die Aenderungsmaafse $(f^I - f^{II})$ beziehlich $(f_I^I - f_I^{II})$ in dem System I entsprechen würden. Diesem auf die Masse M^I wirkenden Bestreben auf Bewegung entspricht nach § 19. S. 23 ein Druck, und ein statisches Moment, welches wir mit K, beziehlich mit (Pa) bezeichnen wollen, und es ist:

$$162)\quad \begin{cases} K = M^I . (f_I^I - f_I^{II}) = K^I - \dfrac{M^I}{M^{II}} . K^{II} \\ (Pa) = J_I^I . (f^I - f^{II}) = (Pa) - \dfrac{J_I^I}{J_I^{II}} . (Pa)^{II}. \end{cases}$$

Die Komponenten der Kräfte, welche auf das System I wirken für Richtungen, die zu der Bewegungsrichtung des Systems II normal sind, bleiben dabei ungeändert, ebenso die Kräftepaare für Axen, die zu der Drehaxe des Systems II normal sind.

I. Hieraus folgt, dafs, wenn beide Systeme sich bewegen, man das eine von beiden immer als fixes System betrachten kann, das andere als bewegliches System, indem man vorher oder nachher die Bewegungen untersucht, welche das bewegliche System mit dem fixen gemeinschaftlich macht. Die Summe der Drucke und das Kräftepaar, welches bei jener Betrachtung auf das bewegliche System und zwar parallel mit der Richtung der Bewegung des als fix betrachteten Systems wirkend zu denken sind, bestimmen sich nach Gleichung 162), wobei namentlich die Vorzeichen bei der Bildung der algebraischen Summen zu beachten sind.

Wenn beide Systeme fallen, und es wirken in der Richtnng der Schwere keine andern Kräfte auf die einzelnen Systeme, so ist das Aenderungsmaafs $f^I = g$ und $f^{II} = g$, folglich $K = 0$. d. h.

II. Wenn zwei Systeme sich berühren und frei fallen, so ist der aus der Schwere hervorgehende Druck, mit welchem das eine System gegen das andere geprefst wird gleich Null.

Nehmen wir an, dafs das zweite System mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich bewegt. Die gleichförmige Bewegung bedingt nach § 14. S. 16, dafs die Kräfte, welche auf das zweite System angebracht sind, für die Richtung der Bewegung im Gleichgewicht seien, d. h. dafs K^{II} gleich Null sei. In diesem Falle ist auch f^{II} gleich Null, und wenn wir eine drehende Bewegung betrachten, so mufs für eine gleichförmige Winkelgeschwindigkeit auch das Aenderungsmaafs derselben $f_{\prime}^{II} = 0$ sein. Für diesen Fall nun gehen die Gleichungen 162) über in

$$162a)\quad K = K^I; \quad (Pa) = (Pa)^I.$$

III. d. h. Wenn zwei feste Systeme die sich berühren sich gleichzeitig bewegen, und das eine von beiden bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortschreitend oder mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit drehend um eine Axe, so bleibt sowohl die Summe der Komponenten des Druckes der auf das andere System angebrachten Kräfte für diese Richtung, als auch das resultirende Kräftepaar des andern Systems für diese Drehaxe ungeändert.

Nach dem Inhalt dieses Paragraphen läfst sich die Bewegung zweier festen Systeme, die sich berühren im Allgemeinen auf zwei Bewegungen zurückführen, von denen wir die eine, welche beide Systeme gemeinschaftlich haben die gemeinschaftliche Bewegung, die andere dagegen, welche eine Aenderung der Berührungspunkte der beiden Systeme zur Folge hat, die Verschiebung nennen wollen. Ebenso folgt aus den vorigen Untersuchungen, dafs bei der Betrachtung der Verschiebung wir immer das eine von beiden Systemen als fixes, das andere als bewegliches System ansehen können.

Die Berührungspunkte der beiden Systeme sind immer als Punkte zu betrachten, die sowohl dem einen System, wie dem andern

System angehören. Diese Punkte werden aber je nachdem man sie zu dem einen System oder zu dem andern System gehörend betrachtet, verschiedene Wege durchlaufen. Die ursprünglichen Berührungspunkte des als fix betrachteten Systems werden nur Wege durchlaufen, welche der gemeinschaftlichen Bewegung entsprechen; die Berührungspunkte des beweglichen Systems dagegen werden gleichzeitig die Wege beschreiben, die aus der gemeinschaftlichen Bewegung hervorgehen, und diejenigen, welche durch die Verschiebung bedingt werden, sie werden also sich nach einer resultirenden Richtung bewegen, deren Komponenten jene Einzelwege sind. Wir nennen die resultirenden Bewegung, welche diese Punkte jenen beiden Komponenten zufolge machen, die absolute Bewegung der Berührungspunkte des beweglichen Systems.

Nach diesen Auseinandersetzungen haben wir nun folgende Dispositionen; wir handeln:

1) von der Verschiebung,
2) von der gemeinschaftlichen Bewegung,
3) von der absoluten Bewegung.

Von der Verschiebung zweier festen Systeme.

Gesetz über die Möglichkeit der Verschiebung; Kippen, Gleiten.

§ 93. Indem wir von zwei festen Systemen eins als fixes System, das andere als bewegliches System betrachten, setzen wir voraus, dafs beide Systeme stets in Berührung bleiben sollen (§ 92), dafs aber gleichwohl eine Aenderung der Berührungspunkte statt finden kann. Untersuchen wir zunächst, wie diese Aenderung der Berührungspunkte beschaffen sein kann.

Indem sich die Berührungspunkte ändern, bewegt sich das bewegliche System, und da wir wissen, dafs jede Bewegung eines festen Systems sich auf eine fortschreitende und auf eine drehende zurückführen läfst, so wird auch bei der Verschiebung des beweglichen Systems dasselbe entweder fortschreitend sich bewegen, oder drehend, oder beides zugleich.

Wenn das bewegliche System sich fortschreitend verschiebt, so durchlaufen alle Punkte desselben, folglich auch die Berührungspunkte gleich grofse und parallele Wegelemente (§ 65. S. 88). Wenn dagegen das bewegliche System sich drehend verschiebt, so beschreiben die Berührungspunkte im Allgemeinen Kreisbögen um eine gemeinschaftliche Axe.

Wie nun auch die Verschiebung beschaffen sein mag, ob sie fortschreitend oder drehend erfolgt, so dürfen doch niemals die Wegelemente, welche die Berührungspunkte des beweglichen Systems beschreiben, innerhalb des festen Systems fallen denn in diesem Falle würde das bewegliche System entweder in das fixe System eindringen, oder dasselbe verdrängen müssen, beides widerspricht den Voraussetzungen. Es müssen also die von dem Berührungspunkt des **beweglichen Systems** beschriebenen Wegelemente entweder das fixe System in jedem Augenblick **berühren**, oder, wenn sie das fixe System schneiden, sich von demselben **abheben.**

Eine Verschiebung, bei welcher alle Berührungspunkte Wegelemente beschreiben, die sich von dem fixen System abheben würde das bewegliche System zu einem freien machen, und der Bedingung widersprechen, dafs die beiden Systeme sich nicht trennen dürfen. Es ist aber denkbar, dafs eine Anzahl von Berührungspunkten sich von dem fixen System abhebt, während gewisse andere Berührungspunkte mit dem fixen System im Zusammenhange bleiben. Diese eigenthümliche Art der Verschiebung erfolgt immer, wenn das bewegliche System eine Drehung macht um eine Axe, die durch einen der Berührungspunkte geht, und beide Systeme berührt. Die Berührungspunkte, welche in dieser Axe liegen, bleiben bei der Drehung des beweglichen Systems unbewegt, folglich in Berührung mit dem fixen System, die übrigen Berührungspunkte beschreiben Bogenelemente in Ebenen normal zu dieser berührenden Axe, welche also im Allgemeinen das fixe System schneiden, und welche daher, wenn die angegebene Drehung wirklich erfolgt, von dem fixen System sich abheben müssen. Wir nennen eine Drehung des beweglichen Systems um eine Axe die beide Systeme berührt, während alle andern Berührungspunkte des beweglichen Systems, die nicht in diese Axe liegen sich von dem fixen System abheben: „**Kippen.**“

Bewegt sich dagegen das bewegliche System so, dafs alle Berührungspunkte Wegelemente beschreiben, die das fixe System berühren, so nennen wir die Verschiebnng der Berührungspunkte: „**Gleiten.**“ Nach dem Obigen wird es ohne Weiteres verständlich sein, wenn wir unterscheiden „fortschreitendes Gleiten“ und „drehendes Gleiten.“

Grundgesetze über die Widerstände der Verschiebung; Reibungswiderstände.

§ 94. Wenn zwei feste Systeme sich berühren, so wird es von der Form der Berührungsflächen abhängen, ob eine Verschiebung überhaupt möglich ist, und wenn dies der Fall ist, in welchem Sinne und nach welchen Richtungen Verschiebung erfolgen kann. In den meisten Fällen liegt es, auch ohne besondere Untersuchung, nahe, ob und welche Möglichkeit der Verschiebung vorhanden ist, in andern Fällen bedarf es zur Feststellung dieser Möglichkeit einer besondern Betrachtung, für welche das im vorigen Paragraphen ausgesprochene Gesetz einen Anhalt bietet.

Wenn sich zwei feste Systeme, von denen eins als fixes System betrachtet werden kann, berühren, und es ist für gewisse Richtungen die Möglichkeit der fortschreitenden Verschiebung, oder für gewisse Drehaxen die Möglichkeit der drehenden Verschiebung **nicht** vorhanden, so müssen alle auf das System angebrachten Kräfte, welche auf Fortschreiten nach dieser Richtung wirken, beziehlich sämmtliche Kräftepaare, welche auf Drehung um diese Axe wirken, im Gleichgewicht sein.

Ergiebt sich nun dieses Gleichgewicht nicht schon aus den auf das bewegliche System angebrachten Kräften, so mufs dasselbe durch den Widerstand des fixen Systems hergestellt werden.

Hieraus folgt, dafs das fixe System nach jeder Richtung, für welche die Möglichkeit des Verschiebens nicht statt findet, einen Widerstand leistet, welcher der Resultirenden aus allen Drucken, die auf Verschieben nach dieser Richtung wirken, gleich und entgegengesetzt ist.

Die Richtigkeit dieser Gesetze erhellt aus den Grundprinzipien der ganzen Mechanik, dafs nämlich eine Kraft, die nicht Bewegung erzeugt, nur durch eine gleich grofse und entgegengesetzt wirkende Gegenkraft aufgehoben werden könne.

Jede Kraft, die durch den Widerstand des fixen Systems aufgehoben wird, äufsert das Bestreben das bewegliche System in das fixe System einzudrängen. Aus diesem Bestreben geht erfahrungsmäfsig ein Widerstand hervor, der jeder Verschiebung in einer Ebene, die normal zu der Richtung jener Kraft ist, widerstrebt. Diesen Widerstand nennen wir den Reibungswiderstand.

Die Reibungswiderstände erscheinen hiernach als eine neue Gruppe von Kräften, die sich der Verschiebung des beweglichen

Systems entgegensetzen. Sie sind verschieden von den auf das bewegliche System angebrachten Kräften, obwohl sie von denselben abhängig sind, und erscheinen daher auch als neue auf das System angebrachte Kräfte; aber da sie immer nur der Verschiebung entgegenwirken, niemals selbst eine Verschiebung bewirken können, so nennt man sie auch passive Widerstände, im Gegensatz zu den auf das System ursprünglich angebrachten Kräften, die man die bewegenden Kräfte des Systems nennt.

Ueber die Wirkung dieser eigenthümlichen Kräfte stellen wir folgende Prinzipien auf:

1) Die Reibungswiderstände erscheinen immer als Drucke, die der Verschiebung des beweglichen Systems entgegenwirken, und da sie niemals selbst Bewegung erzeugen können, so findet keine Verschiebung statt, sobald die Reibungswiderstände gleich, oder gröfser sind, als der auf Verschiebung wirkende resultirende Druck der bewegenden Kräfte, oder sobald ihr statisches Moment gleich oder gröfser ist, als das auf Drehung um eine gegebene Axe wirkende statische Moment der bewegenden Kräfte;

2) die Angriffspunkte der Reibungswiderstände sind stets die Berührungspunkte der beiden Systeme;

3) die Gröfse der Reibungswiderstände ist immer abhängig von der Gröfse derjenigen Komponenten der in den Berührungspunkten wirkenden Drucke, welche durch den Widerstand des festen Systems aufgehoben werden. Wir nennen daher diese Komponenten „Reibung erzeugende Drucke";

4) die Richtung der Reibungswiderstände liegt stets in einer Ebene, die normal zu der Richtung der Reibung erzeugenden Drucke ist. In dieser Ebene kann der Reibungswiderstand jede beliebige Lage haben, doch immer so, dafs, wenn man den Reibungswiderstand zerlegt nach der Richtung, in welcher Verschiebung erfolgt, und normal dazu, die Komponente für die erstgenannte Richtung direkt entgegengesetzt ist der Richtung in welcher Verschiebung erfolgt.

Diese beiden zuletzt aufgestellten Grundsätze sind wohl zu beachten; sie sind verschieden von den bisher üblichen Annahmen; sie erklären aber die Erscheinungen der Reibung vollständig, lassen sich mit allen über die Reibung bestehenden Erfahrungen vereinigen, und führen bei ihrer Anwendung nicht zu Widersprüchen mit andern mechanischen Gesetzen, wie dies der Fall ist, wenn man die Reibungswiderstände ganz allein von den Normaldrucken abhängig macht.

Das Vorhandensein der Widerstände der Reibung ist nicht durch die Voraussetzungen herzuleiten, die wir ganz allgemein über die Wirkung der Kräfte aufgestellt haben; es ist uns nur durch die Erfahrung bekannt. Die Gröfse dieser Widerstände, und die Gesetze ihrer Abhängigkeit sind daher nur durch die Erfahrung festzustellen. Sobald wir aber diese Gesetze kennen, d. h. sobald wir die Gröfse und Eigenschaften dieser Kräfte selbst kennen, werden wir sie den allgemein festgestellten Gesetzen über die Wirkung der Kräfte vollständig unterwerfen können.

Die wichtigsten Versuche über die Reibung sind von Amontons, Coulomb, Vince, G. Rennie, N. Wood, und zuletzt von Morin angestellt worden. Alle diese Versuche haben einen Unterschied in der Reibung herausgestellt, zwischen dem Fall, wo längere Zeit dieselben Punkte beider Systeme in Berührung waren, und es darauf ankam die Verschiebung zu beginnen, und dem Fall, wo die Verschiebung bereits eingetreten war, und fortgesetzt werden sollte. Den ersten Fall bezeichnet man als die Reibung der Ruhe, und den andern als die Reibung der Bewegung.

Die Gesetze der Reibung sind sämmtlich unter folgenden Voraussetzungen ermittelt worden, und gelten folglich auch nur unter diesen Voraussetzungen:

a) dafs die Oberflächen der sich berührenden festen Systeme (Körper) einen gewissen Grad von Glätte und Regelmäfsigkeit besitzen;
b) dafs die Körper sich durch die Bewegung selbst nicht beträchtlich erwärmen;
c) dafs die Oberflächen der Körper durch die Bewegung keine irgend merkliche Abnutzung und Formveränderung erleiden.

Erfahrungsresultate über die Reibung des Gleitens.

§ 95. Die von Morin gemachten Versuche (§ 93. und 94.) über die Reibung des Gleitens (gleitende Reibung) haben folgende Gesetze theils bestätigt, theils herausgestellt:

1) Beziehung zwischen der Reibung der Ruhe und der Reibung der Bewegung.

Die gleitende Reibung der Ruhe ist denselben Gesetzen unterworfen, wie die Reibung der Bewegung, sie ist aber in den meisten praktischen Fällen mit viel geringerer Sicherheit zu bestimmen. Unter denselben Umständen ist die Reibung der Ruhe gröfser, als die Reibung der Bewegung. Jene Unsicherheiten werden für die Praxis in vielen Fällen wenig erheblich durch die Beobachtung Morins, dafs eine geringe Erschütterung der Berührungspunkte des einen Systems, also ein sehr geringer Stofs, im Stande ist, die Reibung der Ruhe in diejenige der Bewegung umzuwandeln. Diese Bemerkung veranlafst, dafs man bei allen Konstruktionen, bei welchen die Reibung vermöge ihres Widerstandes die Stabilität mit bewirkt, und bei denen Erschütterungen zu befürchten sind, die Reibung der Bewegung in die Rechnung einführen mufs.

2) Beziehung zwischen dem Reibungswiderstande und dem Reibung erzeugenden Druck.

Der Werth der gleitenden Reibung ist proportional dem Reibung erzeugenden Druck zwischen beiden Systemen. Das Verhältnifs zwischen dem Werth der Reibung Θ und dem Reibung erzeugenden Druck N nennt man den Reibungs-Koeffizienten; wir bezeichnen künftig den Reibungs-Koeffizienten stets mit μ, und es ist:

$$163)\quad \begin{cases} \mu = \dfrac{\Theta}{N} \\ \Theta = \mu \,.\, N. \end{cases}$$

3) Beziehung zwischen dem Reibungs-Koeffizienten und der Anzahl der Berührungspunkte.

Der Reibungs-Koeffizient ist unabhängig von der Anzahl der Berührungspunkte, sobald sich der Reibung erzeugende Druck mit der Anzahl der Berührungspunkte nicht ändert. Dieses Gesetz erleidet jedoch eine Modifikation von der weiter unten die Rede sein wird, wenn die Zahl der Berührungspunkte (Gröfse der Reibungsfläche) im Verhältnifs zu dem Reibung erzeugenden Druck sehr klein, oder sehr grofs ist.

4) Beziehung zwischen dem Reibungs-Koeffizienten und dem Gesetz, nach welchem die Berührungspunkte aufeinander folgen.

Wenn die Berührungspunkte des einen Systems zwar fortwährend mit anderen Punkten des zweiten Systems in Berührung kommen, diese Punkte des zweiten Systems jedoch immer von Neuem und in einer stetigen Folge von den Punkten des ersten Systems in Anspruch genommen werden, wie dies bei der Drehung von Zapfen in Lagern der Fall ist, so ist der Reibungs-Koeffizient geringer, als bei der gewöhnlichen gleitenden Reibung. Man nennt die Reibung unter den angedeuteten Verhältnissen „Zapfenreibung"; sie erscheint nur als besonderer Fall des drehenden Gleitens, nicht als eine besondere Art der Reibung.

5) Beziehung zwischen dem Reibungs-Koeffizienten und der Geschwindigkeit der Verschiebung.

Der Reibungs-Koeffizient ist unabhängig von der Geschwindigkeit, nnd so lange als konstant anzusehen, so lange der Reibung erzeugende Druck und die Beschaffenheit der Oberflächen sich nicht ändert.

6) Beziehung zwischen dem Reibungs-Koeffizienten und der Beschaffenheit der Oberflächen.

Der Reibungs-Koeffizient ist abhängig von der Natur des Materials, aus welchem das feste System besteht, er ist aufserdem abhängig davon, ob eine schlüpfrige Substanz (Schmiere) zwischen den Berührungspunkten sich befindet, von welcher Art und Beschaffenheit diese Schmiere ist, und von der Menge, in welcher die Schmiere sich zwischen den Berührungspunkten befindet.

Hinsichtlich der Menge der Schmiere sind zwei Fälle zu unterscheiden: a) der Fall, wo die Berührungspunkte mit der Schmiere nur leicht abgerieben werden, und b) der Fall, wo in Folge einer gröfseren Menge und einer angemessenen Konsistenz der Schmiere sich fortwährend eine zusammenhängende Lage von Schmiere zwischen den Berührungspunkten der beiden Systeme befindet, so dafs durch diese Zwischenlage die Berührungsflächen vollständig getrennt sind. Dieser Fall setzt voraus, dafs der Reibung erzeugende Druck in jedem einzelnen Berührungspunkte hinreichend klein sei, um die Schmiere nicht herauszudrängen.

In dem unter a) gedachten Falle ist das Material, aus welchem jedes der beiden Systeme besteht, von wesentlichem Einflufs auf den Werth des Reibungs-Koeffizienten, und es folgen die Resultate der Morin'schen Versuche weiter unten.

In dem unter b) erwähnten Falle ist nach den Versuchen von Morin dagegen der Reibungs-Koeffizient viel mehr abhängig von der Natur der Schmiere, als von der Beschaffenheit des Materials. Morin erwähnt: dafs wenn eine zusammenhängende Lage von Schweinefett oder Baumöl zwischen die Berührungsflächen gebracht wird, der Reibungs-Koeffizient einen ziemlich konstanten Werth zwischen 0,07 und 0,08 behält, gleichviel, ob die reibenden Materialien Holz und Metall, Holz und Holz, oder Metall und Metall sind.

Denselben Reibungs-Koeffizienten fand Morin auch für Talgschmiere, mit Ausnahme des Falles, wo Eisen auf Eisen gleitet, wofür Morin den Reibungs-Koeffizienten im Mittel = 0,10 gefunden hat. Aufserdem empfiehlt Morin Talg, Seife und Graphit als die Schmieren, welche für Hölzer den geringsten Reibungs-Koeffizienten geben, wogegen Oel und Feuchtigkeit für Hölzer einen gröfsern Reibungs-Koeffizienten ergeben. Für Metalle geben Oel und Schweinefett den günstigsten Reibungs-Koeffizienten.

Unter den Resultaten, welche man hinsichtlich der Reibung von Flächen erhalten hat, zwischen denen durch die Zwischenlage einer fettigen Schicht eine vollkommene Trennung der Berührungspunkte bewirkt ist, herrscht nach dem Obigen eine grofse Uebereinstimmung; nicht so ist dies der Fall, wenn man verschiedene Grade der Fettigkeit, die zwischen den oben durch die Fälle a) und b) bezeichneten Grenzzuständen liegen, in Betracht zieht. Die Resultate der Untersuchungen weichen hier vielfach von einander ab, und Moseley *) meint, dafs dies weniger in dem verschiedenen Grade der Fettigkeit, als in dem verschiedenen Verhältnifs der Gröfse der reibenden Flächen zu dem Reibung erzeugenden Drucke, welcher bei den Versuchen obgewaltet hat, begründet sei, eine Ansicht, der wir vollkommen beistimmen. Denn es leuchtet ein, bemerkt Moseley, dafs einer jeden besonderen Art von Fett ein besonderer Druck auf die Flächeneinheit entsprechen mufs, bei welchem eine vollkommene Trennung der beiden Flächen durch die Zwischenlage einer zusammenhängenden Schicht dieses Fettes bewirkt wird, so dafs, wenn der Druck auf die Flächeneinheit jenen Werth überschreitet, die vollkommene Trennung nicht mehr erreicht werden kann, in welcher Fülle man auch die fettige Substanz verwenden mag. Der Druck auf die Flächeneinheit bei welchem noch eine Trennung der beiden Flächen durch die zwischenliegende Schicht des Fettes möglich ist, und der, wenn man ihn allmählich vergröfsert, ein allmähliches Herausdrängen der Schmiere zur Folge hat, ist offenbar von der Natur der Schmiere abhängig; es fehlen über die Bestimmung dieses Druckes noch die nöthigen Versuche, ebenso wie über die Werthe der Reibungs-Koeffizienten für verschiedene Abstufungen, in denen die Schmiere, durch Steigerung jenes Druk-

*) Die mechanischen Prinzipien der Ingenieurkunst nnd Architektur von Heinrich Moseley. Aus dem Englischen übersetzt und mit Erläuterungen versehen von H. Scheffler. I. S. 182.

kes allmählich herausgedrängt wird. Aber selbst wenn der Reibung erzeugende Druck noch kein Herausdrängen der Schmiere und dadurch eine Verminderung der Fettigkeit bedingt, ist es denkbar, dafs bei einer sehr grofsen Ausdehnung der Berührungsflächen der Zusammenhang der einzelnen Elemente der schmierenden Substanz unter einander der Verschiebung auf eine merkliche Weise entgegenwirkt, und daher die Reibung vermehrt, so dafs der Reibungs-Koeffizient bei demselben Reibung erzeugenden Drucke in diesem Falle mit der Berührungsfläche wachsen mufs.

In den beiden eben genannten Fällen, nämlich, wenn der Druck auf die Flächeneinheit entweder so grofs wird, dafs er anfängt die Schmiere herauszudrücken, oder wenn der Druck auf die Flächeneinheit so gering ist, dafs die Konsistenz der Schmiere einen merklichen Werth im Vergleich zu dem Reibung erzeugenden Drucke hat, erleidet hiernach das Gesetz No. 3 eine Modifikation. Es ist zu bemerken, dafs Morin seine Versuche nur mit verhältnifsmäfsig geringer Belastung für die Flächeneinheit (etwa 14 bis 20 Pfund auf den Quadratzoll) angestellt hat; Versuche von G. Rennie zeigen, dafs bei grofsen Belastungen auf die Flächeneinheit der Reibungs-Koeffizient der Ruhe wächst, und zwar so, dafs er bis zu einer gewissen Grenze des Druckes konstant bleibt, dann aber sehr schnell mit dem Druck pro Flächeneinheit zunimmt. Die Resultate der Versuche von Rennie sind weiter unten zusammengestellt; sie zeigen, dafs wenn der Normaldruck einen Werth erreicht, der sich demjenigen nähert, bei welchem die Flächen angegriffen werden, der Reibungs-Koeffizient bis über das Dreifache desjenigen wachsen kann, der bei geringem Drucke konstant ist.

Bestimmung des Reibung erzeugenden Druckes; und Vertheilung desselben.

§ 96. Nach § 95. No. 2 ist die Gröfse der Reibungswiderstände, die dem Gleiten des beweglichen Systems entgegenwirken, proportional den Reibung erzeugenden Drucken, und nach § 94. No. 3 sind die Reibung erzeugenden Drucke diejenigen Komponenten der auf das bewegliche System angebrachten Drucke, welche durch den Widerstand des fixen Systems aufgehoben werden.

Nach dem zweiten Grundsatze in § 94. mufs die Resultirende aus den Komponenten sämmtlicher Kräfte für jede Richtung, nach welcher kein Verschieben statt finden kann, durch den Widerstand des fixen Systems aufgehoben werden; es ist folglich diese Resultirende „der Reibung erzeugende Druck" und der aus demselben entspringende Reibungswiderstand wirkt in einer Ebene die normal zur Richtung derselben (nach dem Gesetz No. 4 in § 94) ist. Es läfst sich hiernach immer leicht die Gröfse des ganzen Reibung erzeugenden Druckes bestimmen, allein es kommt bei der Bestimmung der statischen Momente der Reibungswiderstände häufig auch darauf an, festzustellen wie grofs der Reibung erzeugende Druck in jedem Elemente der Berührungsfläche sei, da nach § 94. No. 2 jeder Berührungspunkt als Angriffspunkt eines Reibungswiderstandes betrachtet werden kann. Hiernach wird es sich darum handeln, zu ermitteln, wie grofs der Druckantheil von dem gesammten Reibung erzeugenden Drucke sei, der auf jeden einzelnen Berührungspunkt gerechnet werden mufs.

Diese Druckantheile werden in den meisten praktischen Fällen kaum mit der nöthigen Richtigkeit und Schärfe zu bestimmen sein, sie werden bedingt durch die Elastizitätsverhältnisse der gedrückten Oberflächen, durch die Genauigkeit mit welcher die Gestalt dieser Oberflächen den absoluten geometrischen Formen nahe kommt, und durch die Lage der Angriffspunkte der auf das System angebrachten bewegenden Kräfte. Sehen wir, wie bei den vorliegenden Betrachtungen überall, von den Elastizitätsverhältnissen ab, nehmen wir gar keine Formveränderung als zulässig an, und betrachten wir also die beiden Systeme als absolut feste, so läfst sich für die Vertheilung des gesammten Reibung erzeugenden Druckes auf die einzelnen Berührungspunkte kein Gesetz herleiten, und es bleibt nur übrig in bestimmten Fällen darüber Hypothesen aufzustellen. In den meisten Fällen ist die Hypothese zulässig:

> dafs die Druckantheile, welche von dem gesammten Reibung erzeugenden Druck auf die einzelnen Berührungselemente treffen, sich verhalten wie die Projektionen der Berührungselemente auf eine Ebene, die normal ist zu dem Reibung erzeugenden Druck.

Es bezeichne:

λ, $\lambda_{\prime}$, $\lambda_{\prime\prime}$ die Winkel, welche die einzelnen Elemente der Berührungsfläche mit der Richtung des Reibung erzeugenden Druckes machen;

dF, $dF_{\prime}$, $dF_{\prime\prime}$ seien die Gröfsen der Flächenelemente;

$dA = dF \cdot \sin\lambda$, $dA_{\prime} = dF_{\prime} \cdot \sin\lambda_{\prime} \dots$ seien die Gröſsen der Projektionen der Flächenelemente;

$A = \Sigma(dA) = \Sigma(dF \cdot \sin\lambda)$ sei der Flächeninhalt der Projektion der sämmtlichen Elemente der Berührungsfläche auf eine Ebene, die normal ist zur Richtung des Reibung erzeugenden Druckes;

Q sei der gesammte Reibung erzeugende Druck, und

dQ, $dQ_{\prime}$, $dQ_{\prime\prime} \dots$ die Druckantheile der Flächenelemente.

Nun hat man nach dem obigen Gesetz:

$$\Sigma(dQ) = Q = dQ + dQ_{\prime} + dQ_{\prime\prime} + \dots$$

und nach der obigen Hypothese:

$$dQ : dQ_{\prime} : dQ_{\prime\prime} : \dots = dA : dA_{\prime} : dA_{\prime\prime} : \dots$$

folglich:

$$dQ : (dQ + dQ_{\prime} + dQ_{\prime\prime} + \dots) = dA : (dA + dA_{\prime} + dA_{\prime\prime} + \dots)$$

das ist:

$$164)\quad dQ = \frac{\Sigma(dQ)}{\Sigma(dA)} \cdot dA = \frac{Q}{A} \cdot dA = \frac{Q}{A} \cdot dF \cdot \sin\lambda.$$

Den Werth $\frac{Q}{A}$ oder den Druck auf die Flächeneinheit der Projektion nennt man den spezifischen Druck der Projektion, und die Gleichung 164) sagt daher:

der Druckantheil, den ein Element der Berührungsfläche von dem gesammten Reibung erzeugenden Druck zu erleiden hat, und welcher in diesem Flächenelement einen Reibungswiderstand erzeugt, der normal zur Richtung dieses Druckes ist, drückt sich aus durch den spezifischen Druck der Projektion der gesammten Berührungsfläche auf eine Ebene, die normal ist zu der Richtung des Reibung erzeugenden Druckes, multiplizirt mit der Projektion dieses Elementes auf dieselbe Ebene.

Es haben also ganz allgemein gleich groſse Projektionen der Berührungsfläche gleiche Druckantheile auszuhalten, und folglich gleich groſse Reibungswiderstände zu erleiden.

In ein und demselben Berührungselement erleiden die einzelnen Punkte gleich groſse Druckelemente, und es sind daher die in den einzelnen Punkten eines Berührungselements wirksamen Reibungswiderstände als gleich groſse und parallele Kräfte anzusehen, so daſs man stets den Angriffspunkt der Reibungswiderstände in den Schwerpunkt des Berührnngselementes verlegen kann.

Wenn sämmtliche Berührungselemente in ein und derselben Ebene liegen, oder wenn sie auch in verschiedenen Ebenen liegen, die aber sämmtlich denselben Neigungswinkel λ mit der Richtung des Reibung erzeugenden Druckes bilden, so ist $\sin\lambda$ in Gleichung 164) konstant, und man hat $A = F . \sin\lambda$, folglich geht die Gleichung 164) über in

$$164a) \quad dQ = \frac{Q}{F} . dF,$$

für diesen Fall ist also der Druckantheil jedes Elementes gleich dem Druck auf die Einheit der ganzen Berührungsfläche, multiplizirt mit der Gröfse des Flächenelementes.

Widerstände gegen fortschreitendes Gleiten; Reibungswinkel.

§ 97. Da die Widerstände der Reibung immer nur dem Gleiten entgegenwirken, so kommen sie überhaupt nur zur Geltung, wenn ein Gleiten, sei es ein fortschreitendes oder drehendes Gleiten möglich ist. Wir haben in § 93 gesehen, dafs die berührenden Oberflächen nur unter gewissen Voraussetzungen die Möglichkeit des Gleitens zulassen. Die folgenden Betrachtungen setzen nun überall die Möglichkeit des Gleitens voraus, und unter diesen Voraussetzungen wollen wir sowohl die Resultirende der Widerstände des fortschreitenden Gleitens, als auch das statische Moment der Widerstände des drehenden Gleitens bestimmen.

Die Richtung des fortschreitenden Gleitens sei gegeben, und die Gröfse und Richtung der Resultirenden aus allen auf das bewegliche System angebrachten Kräften sei bestimmt; der Werth derselben sei Q, und der Winkel, welchen ihre Richtung mit einer Ebene bildet, die normal zu der Richtung des Gleitens ist, sei φ. Wenn wir nun Q nach zwei Richtungen zerlegen, von denen eine nach der gegebenen Richtung des Gleitens, und die andere normal dazu, fällt, so ergeben sich die Komponenten: $Q . \sin\varphi$ und $Q . \cos\varphi$. Nun mufs die Komponente $Q . \cos\varphi$ die in der Richtung normal zur Richtung des Gleitens liegt durch den Widerstand des fixen Systems aufgehoben werden (§ 94.) und folglich bildet diese Komponente den Reibung erzeugenden Druck. Ist nun μ der Reibungs-Koeffizient, so ist die Gröfse des Reibungswiderstandes, welchen wir jetzt und künftig immer mit Θ bezeichnen:

$$165) \quad \Theta = \mu . Q . \cos\varphi,$$

und da der Reibungswiderstand immer der auf Verschieben wirkenden

Komponente entgegenwirkt, so bleibt für den auf fortschreitendes Verschieben wirkenden Druck noch übrig:

165a) $P = Q.\sin\varphi - \Theta = Q.(\sin\varphi - \mu.\cos\varphi) = Q.\cos\varphi.(\tang\varphi - \mu)$.

Hierin liegt folgendes Gesetz:

> Wenn ein bewegliches System auf einem fixen System nach irgend einer Richtung fortschreitend gleiten kann, so ist der auf Gleiten wirkende Druck gleich derjenigen Komponenten der Resultirenden aller auf das bewegliche System angebrachten Kräfte, welche in einer zur Richtung des Gleitens normalen Ebene liegt, multiplizirt mit der Differerenz zwischen der Tangente des Neigungswinkels der Resultirenden gegen diese normale Ebene und dem Reibungs-Koeffizienten.

Dieser Druck ist also vollkommen unabhängig:

1) von der Gröfse der Berührungsfläche;

2) von der Form der Berührungsfläche.

Bei Gradführungen in Koulissen ist es z. B. unter sonst gleichen Verhältnissen in Bezug auf die Reibungswiderstände gleichgiltig, ob diese Koulissen prismatisch, cylindrisch oder flach gestaltet sind.

Ist der Reibungswiderstand Θ gröfser; als der auf Gleiten wirkende Druck, so findet kein Gleiten statt (§ 94. No. 1). Wir sagen dann, das bewegliche System befinde sich innerhalb des Gleichgewichts gegen Gleiten.

Wenn der Reibungswiderstand kleiner ist, als der auf Verschieben wirkende Druck, so findet Gleiten statt, und zwar ist das Aenderungsmaafs der Geschwindigkeit, mit der das bewegliche System in diesem Augenblick gleitet (§ 86. Gleichung 154b), S. 160):

165b) $f = \frac{\text{Druck}}{\text{Masse}} = \frac{Q}{M}.(\sin\varphi - \mu.\cos\varphi)$,

wenn M die Masse des beweglichen Systems bezeichnet.

Wir sagen in diesem Fall, das bewegliche System befinde sich aufserhalb des Gleichgewichts gegen Gleiten.

In dem Falle endlich, wo der Reibungswiderstand gleich dem auf Verschieben wirkenden Druck ist, findet zwar auch noch Gleichgewicht gegen Gleiten statt, allein jede Verminderung des Reibungswiderstandes bringt das System aufserhalb, und jede Vermehrung desselben innerhalb des Gleichgewichts gegen Gleiten. Wir nennen dieses Verhältnifs den Grenzzustand des Gleichgewichts gegen Gleiten, oder wir sagen, das bewegliche System befinde sich an der Grenze des Gleitens.

Das bewegliche System befindet sich hiernach innerhalb, aufserhalb oder an der Grenze des fortschreitenden Gleitens, wenn

$$\Theta > Q \,.\, \sin\varphi;\quad \Theta < Q \,.\, \sin\varphi;\quad \Theta = Q \,.\, \sin\varphi,$$

oder nach Gleichung 165), wenn

$$\mu \,.\, \cos\varphi \,.> \sin\varphi;\quad \mu \,.\, \cos\varphi \,.< \sin\varphi;\quad \mu \,.\, \cos\varphi = \sin\varphi$$

ist. Dividiren wir mit $\cos\varphi$, so gehen diese Bedingungen über in

$$166)\quad \mu \,.> \operatorname{tang}\varphi;\quad \mu \,.< \operatorname{tang}\varphi;\quad \mu = \operatorname{tang}\varphi.$$

Hieraus folgt, dafs die Zustände des Gleitens, und die Grenze des Gleitens abhängig sind von dem Verhältnifs des Reibungs-Koeffizienten zu der Tangente des Neigungswinkels der Resultirenden gegen eine Ebene, die normal ist zur Richtung des Gleitens.

Bei demselben Reibungs-Koeffizienten werden diese Zustände also nicht von der Gröfse der Resultirenden, sondern nur von ihrer Richtung abhängig sein; die Grenze des Gleitens wird bei einem bestimmten Werth des Neigungswinkels erreicht sein, und diesen besonderen Werth des Neigungungswinkels, welcher der Grenze des Gleitens entspricht, nennen wir den Reibungswinkel, Gleitwinkel, Ruhewinkel. Wir bezeichnen diesen besondern Werth von φ künftig immer mit ϑ und wir haben nach Gleichung 166) die Beziehung:

$$166\text{a})\quad \operatorname{tang}\vartheta = \mu,$$

d. h. die Tangente des Gleitwinkels ist gleich dem Reibungs-Koeffizienten.

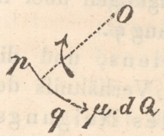
Widerstände gegen drehendes Gleiten, Reibungsmoment; Hebelsarm der Reibung.

§ 98. Um nun das statische Moment der Reibungswiderstände zu bestimmen, nehmen wir an, dafs das bewegliche System sich um eine gegebene Axe drehen könne; diese Axe ist entweder eine fixe Axe, oder sie kann doch für einen Augenblick als fixe Axe betrachtet werden.

Die Resultirende der fortschreitenden Bewegung aus allen auf das bewegliche System angebrachten Kräften ist dann durch den Widerstand des fixen Systems aufgehoben, und folglich ist diese Resultirende der Reibung erzeugende Druck.

In der umstehenden Figur sei die Drehaxe O normal zur Ebene des Papiers. Damit überhaupt Drehung erfolgen könne müssen (nach

§ 93) die Richtungen der von den Berührungspunkten des beweglichen Systems beschriebenen Wegelemente die Elemente der Berührungsfläche berühren, d. h. sie müssen in die Berührungsfläche jedes einzelnen Berührungselementes fallen, zugleich müssen diese Wegelemente in Ebenen liegen, die normal zur Drehaxe sind, sie werden also mit der Durchschnittslinie zusammenfallen, welche die Drehungsebene (Ebene des Papiers) mit den Berührungsebenen der einzelnen Elemente bildet.



pq sei ein Wegelement in dieser Durchschnittslinie für irgend einen Berührungspunkt. Die Richtung der Resultirenden Q bilde mit den einzelnen Berührungselementen den Winkel λ. Es ist dann der Druckantheil jedes Elementes nach Gleichung 164):

$$dQ = \frac{Q}{A} \cdot dF \cdot \sin\lambda$$

und die daraus hervorgehende Reibung:

$$\mu \cdot dQ = \frac{\mu \cdot Q}{A} \cdot dF \cdot \sin\lambda.$$

Dieser Widerstand liegt in einer Ebene, die normal zur Richtung von Q ist. Die Richtung desselben in dieser Ebene ist immer nach dem Grunsatz 4) in § 94. zu bestimmen.

Nun sind aber zwei Fälle möglich, nämlich:

I. die Ebene, in welcher der Reibungswiderstand liegt, fällt mit der Drehungsebene zusammen, oder:

II. die Ebene, in welcher der Reibungswiderstand liegt, schneidet die Drehungsebene.

I. Betrachten wir zunächst den ersten Fall. Derselbe tritt ein, wenn die Richtung des resultirenden Druckes mit der Drehaxe parallel ist. In diesem Falle mufs die Richtung des Reibungswiderstandes in jedem Berührungselement offenbar der Richtung in welcher die Drehung erfolgt entgegengesetzt sein, d. h. sie fällt mit der Richtung pq zusammen, und folglich ist das Moment des Reibungswiderstandes, wenn wir den Schwerpunktsabstand des Elementes von der Drehaxe mit r bezeichnen:

$$\mu \cdot dQ \cdot r = \mu \cdot \frac{Q}{A} \cdot dA \cdot r,$$

und daher die Summe der Momente sämmtlicher Reibungswiderstände, oder das statische Moment der Gesammtreibung, welches wir künftig mit (Θa) bezeichnen wollen:

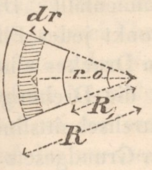
$$167)\ (\Theta a) = \Sigma\left[\mu . \frac{Q}{A} . dA . r\right] = \mu . Q . \frac{\Sigma(dA . r)}{A}.$$

Hieraus folgt:

Wenn ein festes System auf einem andern um eine gegebene Axe drehend gleitet, und wenn dabei die Richtung der Resultirenden aller auf das bewegliche System angebrachten Kräfte mit der Drehaxe zusammenfällt, so ist das statische Moment der Reibungswiderstände gleich dem Produkt, welches man erhält, wenn man den resultirenden Druck mit dem Reibungs-Koeffizienten und mit einem Quotienten multiplizirt, dessen Zähler gleich der Summe der Produkte aus der Projektion jedes Berührungselementes (auf eine zur Drehaxe normale Ebene) in den Abstand dieses Elementes von der Drehaxe, und dessen Nenner die Summe der Projektionen sämmtlicher Berührungselemente ist.

Man sieht, dafs in diesem Falle das statische Moment der Reibungswiderstände nur abhängig ist von der Gröfse und Lage der Projektionen der einzelnen Elemente, und nicht abhängig ist von der Form der Berührungsfläche; es werden also kegelförmige, kugelförmige, ebene etc. Zapfen unter der Voraussetzung, dafs die Richtung des Druckes mit der Drehaxe zusammenfällt, gleiche Reibungsmomente haben, wenn ihre Projektionen kongruent sind, und wenn die resultirenden Drucke sowohl, als die Reibungs-Koeffizienten gleich sind.

Der Ausdruck $\frac{\Sigma(dA . r)}{A}$ ist nur von der Gestalt und Lage der Projektion abhängig; er ist ein rein geometrischer, wir nennen ihn den Hebelsarm der Reibung, und bezeichnen denselben mit $\mathfrak{R}$. Der Hebelsarm der Reibung ist hiernach derjenige Werth, mit welchem μQ, d. i. der gesammte Reibungswiderstand multiplizirt werden mufs, um das statische Moment der Reibung zu erhalten, und man hat:



$$167a)\ (\Theta a) = \mu Q . \mathfrak{R}.$$

Ist die Projektion der Berührungsfläche auf eine Ebene normal zur Drehaxe ein ringförmiger Sektor, welcher einem Winkel o angehört, so ist:

$$dA = o \,.\, r \,.\, dr; \qquad \Sigma(dA) = \int o \,.\, r \,.\, dr = \tfrac{1}{2} \,.\, o \,.\, r^2 + C,$$

$$dA \,.\, r = o \,.\, r^2 \,.\, dr; \quad \Sigma(dA.r) = \int o \,.\, r^2 \,.\, dr = \tfrac{1}{3} \,.\, o \,.\, r^3 + C.$$

und wenn wir die Integrale zwischen den Grenzen $r = R_{\prime}$ und $r = R$ nehmen, so ist der Hebelsarm der Reibung:

$$167\text{b)} \quad \mathfrak{R} = \tfrac{2}{3} \,.\, \frac{R^3 - R_{\prime}^3}{R^2 - R_{\prime}^2}\,.$$

Es ist also der Hebelsarm der Reibung eines ringförmigen Sektors unabhängig von dem Werthe des Winkels, welchem er angehört, und nur abhängig von dem Werthe des gröfsten und kleinsten Radius. Ist $R_{\prime} = 0$, so hat man den Hebelsarm der Reibung für eine Fläche, deren Projektion ein Kreis von Radius R oder jeder beliebige Sektor dieses Kreises ist:

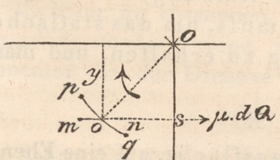
$$167\text{c)} \quad \mathfrak{R} = \tfrac{2}{3} \,.\, R.$$

Ist die Berührungsoberfläche eine krumme Fläche, so ist die Möglichkeit der Drehung nur vorhanden, wenn diese krumme Fläche eine Rotationsfläche ist, deren Axe mit der Drehaxe zusammenfällt. Ist dagegen die Berührungsfläche eine Ebene, so mufs dieselbe normal zur Drehaxe sein, wenn die Möglichkeit der Drehung vorhanden sein soll. Die Form der Berührungsfläche, d. h. die Gestalt der ebenen Figur, welche die sämmtlichen Berührungspunkte enthält, ist dabei gleichgiltig, der Hebelsarm der Reibung ist immer durch die Gleichung:

$$167\text{d)} \quad \mathfrak{R} = \frac{\Sigma(dA \,.\, r)}{A},$$

sei es durch Integriren, oder durch ein Näherungsverfahren zu berechnen.

II. Es bleibt noch der Fall zu erledigen, wo die Richtung des resultirenden Druckes nicht mit der Drehaxe zusammenfällt. Die Reibungswiderstände, welche auch hier im Schwerpunkt jedes Flächenelementes normal zur Richtung des resultirenden Druckes sind,



liegen in Ebenen, welche die Drehungsebenen schneiden. Die Durchschnittslinie sei mn, so mufs nach dem Grundgesetz 4 in § 94 die Richtung mn auch die Richtung des Reibungswiderstandes $\mu \,.\, \frac{Q}{A} . dF \,.\, \sin\lambda$ sein, wie sich leicht übersehen läfst. Der Hebelsarm einer Kraft, deren Richtung mn ist, wird durch Os

dargestellt, und setzen wir $Os = y$, so ist das Moment der im Elemente pq wirksamen Reibung:

$$168)\quad \mu \cdot \frac{Q}{A} \cdot dF \cdot \sin\lambda \cdot y.$$

Nehmen wir drei Koordinatenaxen an. Die erste Axe sei die Drehaxe, die zweite falle mit der Projektion von Q auf die Drehungsebene zusammeu; die dritte Axe OZ ist dann parallel mit der Durchschnittslinie mn, was sich durch eine einfache Betrachtung zeigen läſst.

Nun denken wir in jedem Berührungselement die Normale zu der Berührungsebene, in welcher dieses Element liegt. Diese Normale bildet mit der Richtung von Q den Komplementswinkel von λ, da λ den Winkel bezeichnete, den die Richtung von Q mit der Berührungsebene selbst bildet. Wenn nun diese Normale mit den Richtungen der drei Axen die Winkel φ, χ, ψ macht, und wenn die Richtung von Q mit denselben Axen die Winkel A, B, Γ bildet, so ist nach einem bekannten geometrischen Gesetz der Winkel, den die beiden Richtungen (Q und die Normale) mit einander bilden, nämlich $(90^0 - \lambda)$ durch die Gleichung zu bestimmen:

$$\cos(90^0 - \lambda) = \cos A \cdot \cos\varphi + \cos B \cdot \cos\chi + \cos\Gamma \cdot \cos\psi = \sin\lambda$$

und da $\Gamma = 90^0$ ist, so hat man $\cos A = \sin B$, und daher:

$$\sin\lambda = \sin B \cdot \cos\varphi + \cos B \cdot \cos\chi.$$

Hiernach geht nun die Gleichung 168) über in:

$$\mu Q \cdot \frac{(dF \cdot \sin B \cdot \cos\varphi + dF \cdot \cos B \cdot \cos\chi) \cdot y}{A}$$

und da auch $A = \Sigma(dF \cdot \sin\lambda)$ ist, so hat man zu setzen:

$$A = \Sigma(dF \cdot \sin B \cdot \cos\varphi + dF \cdot \cos B \cdot \cos\chi)$$
$$= \sin B \cdot \Sigma(dF \cdot \cos\varphi) + \cos B \cdot \Sigma(dF \cdot \cos\chi).$$

Man bemerke, daſs φ und χ die Winkel sind, welche die Normalen in den Elementen der Berührungsflächen mit der Axe der X und derjenigen der Y bilden, daſs folglich φ und χ auch die Winkel sind, welche je zwei Ebenen, die einzeln normal sind, auf einer der Axen und auf einer der Normalen mit einander einschlieſsen. Die Ebenen normal auf der Normalen ist das Element der Berührungsfläche; die Ebene normal auf der ersten Axe ist die Drehungsebene, und die Ebene normal auf der zweiten Axe ist die Ebene parallel mit mn (zweite Projektionsebene). Hiernach ist $dF \cdot \cos\varphi$ die Projektion eines Berührungselementes auf die Drehungsebene, und $dF \cdot \cos\chi$ die Projektion eines Berührungselementes auf die zweite Koordinatenebene. Bezeichnen wir diese Elemente der Projektionen mit $dA_{\prime}$ und $dA_{\prime\prime}$ so ist das Moment des Reibungswiderstandes in einem Berührungselement:

$$d(\Theta a) = \mu Q \cdot \left[\frac{dA_{,} \cdot \sin B + dA_{,,} \cdot \cos B}{\Sigma(dA_{,}) \cdot \sin B + \Sigma(dA_{,,}) \cdot \cos B}\right] \cdot y$$

und daher ist die Summe der Momente der Reibungswiderstände:

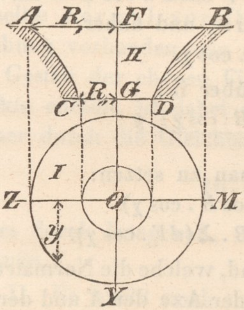
$$168\text{a)} \left\{ \begin{aligned} (\Theta a) &= \mu Q \cdot \Sigma \left[\frac{dA_{,} \cdot \sin B \cdot y + dA_{,,} \cdot \cos B \cdot y}{\Sigma(dA_{,}) \cdot \sin B + \Sigma(dA_{,,}) \cdot \cos B}\right] \\ &= \mu Q \cdot \left[\frac{\sin B \cdot \Sigma(dA_{,} \cdot y) + \cos B \cdot \Sigma(dA_{,,} \cdot y)}{\sin B \cdot \Sigma(dA_{,}) + \cos B \cdot \Sigma(dA_{,,})}\right]. \end{aligned} \right.$$

Für den Fall, dafs die Richtung des resultirenden Druckes **parallel** mit der Drehungsebene ist, hat man $B = o$, folglich ist dann das Moment der Reibung:

$$169\text{b)} \ (\Theta a) = \mu Q \cdot \frac{\Sigma(dA_{,,} \cdot y)}{\Sigma(dA_{,,})}.$$

Der Ausdruck in den Klammern ist auch hier der **Hebelsarm der Reibung**.

Gewöhnlich sind die reibenden Oberflächen Rotationsflächen, deren Erzeugungsaxe die Drehaxe ist. Denkt man durch die Richtung des Druckes und die Axe eine Ebene, und eine zweite Ebene normal zu dieser ebenfalls durch die Axe, so wird durch beide Ebenen die Rotationsfläche in Linien geschnitten, welche der **Erzeugungslinie** der Rotationsfläche kongruent sind. Um nun die Werthe der Gleichung 169a) zu bestimmen, sei in nebenstehender Figur:



I die Projektion der Rotationsfläche auf die Drehungsebene $= \Sigma(dA_{,})$,

II die Projektion der Rotationsfläche auf eine Ebene, die durch die Drehaxe geht, und normal zur Projektion OY des resultirenden Drucks auf die Drehungsebene YZ ist $= \Sigma(dA_{,,})$.

Die Projektion I ist immer eine **Ringfläche** oder ein voller Kreis, und der Ausdruck $\Sigma(dA_{,} \cdot y)$ ist nichts anderes, als die Summe der statischen Momente sämmtlicher Elemente dieses Ringstückes in Bezug auf die Axe OZ. Ist Y der Abstand des Schwerpunkts des halben Ringstückes $\frac{1}{2}\Sigma(dA)$ von der Axe OZ, so ist offenbar:

$$\Sigma(dA_{,} \cdot y) = 2 \cdot (Y \cdot \tfrac{1}{2}\Sigma(dA)).$$

Nun ist der Schwerpunkt der Halbkreisfläche von dem Mittelpunkt entfernt um $Y = \frac{4R}{3\pi}$, daher ist das **statische Moment** der Halbkreisfläche $Y \cdot \frac{1}{2}\Sigma(dA) = \frac{4R}{3\pi} \cdot \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{2}{3}R^3$, und wenn man mit $R_{\prime}$ und $R_{\prime\prime}$ den gröfsten und kleinsten Durchmesser der Rotationsfläche bezeichnet, so ist:

$$\Sigma(dA_{\prime} \cdot y) = \tfrac{4}{3}(R_{\prime}^3 - R_{\prime\prime}^3).$$

Die Komponente, welche normal zur Drehaxe ist $Q \cdot \cos B$ erzeugt offenbar nur in dem Theil der Berührungsfläche Reibung, gegen den sie gerichtet ist, d. i. der Theil, welcher dem Bogen ZYM entspricht. Die Projektion dieses Theils auf die Ebene II ist die Figur $ABCD$. Betrachtet man den Ausdruck $\Sigma(dA_{\prime\prime} \cdot y)$ so ist derselbe die Summe der Produkte aller Elemente der Fläche $ABCD$ in ihre Abstände von der Rotationsfläche, und diese Summe ist nichts anderes, als der kubische Inhalt des Theiles des Rotationskörpers, welcher zwischen der Ebene $ABCD$ und der vordern Berührungsfläche ZYM liegt; d. i. der halbe Inhalt des Rotationskörpers, den die ganze Berührungsfläche umschliefst. Dieser Rotationskörper läfst sich aber auch nach der ersten Guldin'schen Regel ausdrücken (S. 155). Bezeichnet nämlich S den Flächeninhalt des Stückes $ACGF$, und Z den Abstand des Schwerpunktes dieses Stückes von der Drehaxe, so ist auch der Inhalt des halben Rotationskörpers:

$$\Sigma(dA_{\prime\prime} \cdot y) = S \cdot \pi \cdot Z,$$

und hiernach geht die Gleichung 168a) über in:

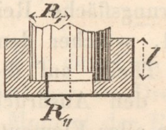
$$168c)\quad (\Theta a) = \mu Q \cdot \frac{\sin B \cdot \frac{4}{3}(R_{\prime}^3 - R_{\prime\prime}^3) + \cos B \cdot S \cdot \pi \cdot Z}{\sin B \cdot \pi \cdot (R_{\prime}^2 - R_{\prime\prime}^2) + 2\cos B \cdot S},$$

worin bezeichnet:

Θa das statische Moment der Reibung einer Rotationsfläche;
μ den Reibungs-Koeffizienten;
Q den resultirenden Druck der auf das bewegliche System wirkenden Kräfte;
B den Neigungswinkel der Richtung dieses Druckes gegen die Drehungsebene;
$R_{\prime}$ den gröfsten, $R_{\prime\prime}$ den kleinsten Halbmesser der Berührungsfläche;
S den Flächeninhalt der ebenen Figur, durch deren Rotation die Reibungsfläche entstanden ist;
Z den Abstand des Schwerpunktes dieser Figur von der Drehaxe; folglich
SZ das statische Moment der erzeugenden Figur in Bezug auf die Drehaxe.

Der Hebelsarm der Reibung drückt sich aus nach Gleichung 168c) durch:

$$168\text{d})\ \mathfrak{R} = \frac{\sin B \,.\, \frac{4}{3}(R_{\prime}^3 - R_{\prime\prime}^3) + \cos B \,.\, S \,.\, \pi \,.\, Z}{\sin B \,.\, \pi \,.\, (R_{\prime}^2 - R_{\prime\prime}^2) + 2\cos B \,.\, S}$$
$$= \frac{4 \tang B \,.\, (R_{\prime}^3 - R_{\prime\prime}^3) + 3\pi \,.\, SZ}{3\pi \,.\, \tang B \,.\, (R_{\prime}^2 - R_{\prime\prime}^2) + 6S} \,.\, \cos B.$$



Es möge hier die Bestimmung des Hebelsarms der Reibung für verschiedene Zapfenformen folgen:

a) Cylindrische Zapfen von der Länge l.

Es ist $S = l \,.\, R_{\prime}$; $Z = \frac{1}{2} R_{\prime}$ folglich der Hebelsarm der Reibung:

$$169)\ \mathfrak{R} = \frac{8 \tang B \,.\, (R_{\prime}^3 - R_{\prime\prime}^3) + 3\pi \,.\, l \,.\, R_{\prime}^2}{6\pi \,.\, \tang B \,.\, (R_{\prime}^2 - R_{\prime\prime}^2) + 12 l \,.\, R_{\prime}} \,.\, \cos B.$$

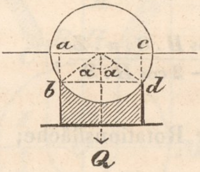
Setzen wir $R_{\prime\prime} = m \,.\, R_{\prime}$ und $l = n \,.\, R_{\prime}$ so ist:

$$169\text{a})\ \mathfrak{R} = R_{\prime} \,.\, \cos B \,.\, \frac{8 \tang B \,.\, (1 - m^3) + 3\pi \,.\, n}{6\pi \,.\, \tang B \,.\, (1 - m^2) + 12n},$$

und wenn der Druck normal zur Axe ist:

$$169\text{b})\ \mathfrak{R} = \frac{\pi}{4} \,.\, R_{\prime}.$$

Dies setzt voraus, daſs der cylindrische Zapfen wenigstens zur Hälfte umschlossen ist. Wenn dagegen der Zapfen nur auf eine Bogenlänge gleich 2α umschlossen ist, und zwar so, daſs dieselbe gegen die Richtung des resultirenden Druckes symmetrisch vertheilt ist, so hat man den Inhalt des Körpers $a\,b\,c\,d$ oder den Werth:



$$\Sigma(dA_{\prime\prime} \,.\, y) = l \,.\, R_{\prime}^2 \,.\, (\alpha + \sin\alpha \,.\, \cos\alpha),$$

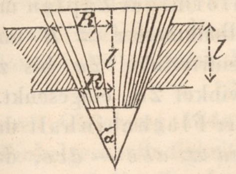
und $\Sigma(dA_{\prime\prime}) = 2l \,.\, R_{\prime} \,.\, \sin\alpha$,

folglich:

$$169\text{c})\ \mathfrak{R} = \tfrac{1}{2} R_{\prime} \,.\, \left(\frac{\alpha + \sin\alpha \,.\, \cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = R_{\prime} \,.\, \frac{\alpha + \frac{1}{2} \,.\, \sin 2\alpha}{2 \,.\, \sin\alpha}$$
$$= \tfrac{1}{2} R_{\prime} \,.\, \left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} + \cos\alpha\right).$$

Man sieht leicht, daſs wenn der Zapfen nur auf die Bogenlänge α umschlossen wäre, diese aber auf einer Seite der Richtung des resultirenden Druckes von der Mittellinie an gerechnet läge, mit andern Worten, daſs wenn man die halbe Umschlieſsung fortlieſse, der Werth $\Sigma(dA_{\prime\prime} \,.\, y)$ sowohl, als $\Sigma(dA_{\prime\prime})$ jeder halb so groſs werden würde, daſs also $\mathfrak{R}$ ungeändert bliebe. Diese Bemerkung trifft immer zu, wenn der Druck normal zur Axe ist, gleichviel welche Form der Zapfen hat.

Wenn α sehr klein wird, so ist $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ nahezu gleich 1, und



auch $\cos\alpha$ nahezu gleich 1, und wenn α gleich Null wird, so werden diese Werthe genau erreicht. Man hat daher für einen cylindrischen Zapfen, der nur in einer Seite aufliegt, oder, der doch nur eine sehr kleine Berührungsfläche hat, falls der Druck normal zur Axe ist:

$$169\text{d})\quad \mathfrak{R} = R_{,}.$$

b) Konischer Zapfen von der Länge l.

Es ist $S = \frac{R_{,} + R_{,,}}{2} \cdot l$;

$$S \cdot Z = \tfrac{1}{2} l \cdot R_{,,}^2 + \tfrac{1}{6} l \cdot (R_{,} - R_{,,}) \cdot (R_{,} + 3R_{,,}) = \tfrac{1}{6} l \cdot R_{,} \cdot (R_{,} + 2R_{,,}),$$

folglich der Hebelsarm der Reibung:

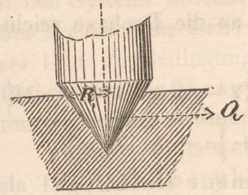
$$170)\quad \mathfrak{R} = \frac{8 \cdot \operatorname{tang} B \cdot (R_{,}^3 - R_{,,}^3) + \pi l \cdot R_{,} \cdot (R_{,} + 2R_{,,})}{6\pi \cdot \operatorname{tang} B \cdot (R_{,}^2 - R_{,,}^2) + 6l \cdot (R_{,} + R_{,,})} \cdot \cos B.$$

Setzen wir wieder $R_{,,} = m \cdot R_{,}$ und $l = n \cdot R_{,}$ so geht der Ausdruck über in:

$$170\text{a})\quad \mathfrak{R} = \tfrac{1}{6} R_{,} \cdot \cos B \cdot \frac{8 \cdot \operatorname{tang} B \cdot (1 - m^3) + \pi n \cdot (1 + 2m)}{\pi \cdot \operatorname{tang} B \cdot (1 - m^2) + n \cdot (1 + m)},$$

und wenn der Druck normal zur Drehaxe ist:

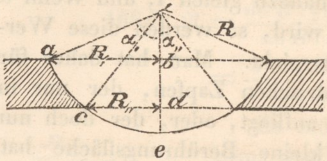
$$\mathfrak{R} = \frac{\pi}{6} R \cdot \frac{1 + 2m}{1 + m}.$$



Dieser Ausdruck wird um so kleiner, je kleiner m ist, und daher am kleinsten, wenn $m = 0$ ist, d. h. wenn der Zapfen ein voller Kegel ist, der vom Halbmesser $R_{,}$ bis zur Spitze aufliegt. Man hat dann:

$$\mathfrak{R} = \frac{\pi}{6} R_{,}.$$

Es folgt auch aus diesen Gleichungen, daſs, wenn der Druck normal zur Axe gerichtet ist, es bei einem kegelförmigen Zapfen gar nicht auf den Neigungswinkel des Kegels ankommt, sondern nur auf den gröſsten und kleinsten Radius der Berührungsfläche, und daſs ein konischer Zapfen in diesem Fall immer ein geringeres Reibungsmoment haben müsse, als ein cylindrischer Zapfen, dessen Durchmesser gleich dem gröſsten Durchmesser des Kegels ist. Endlich ersieht man, daſs wenn der Zapfen von einem gewissen Durchmesser $R_{,}$ ab nach der Spitze hin um ein gewisses Stück aufliegt, das Moment der Reibung um so geringer ist, je länger dieser aufliegende Theil ist.



c) Kugelförmiger Zapfen mit einem Kugelhalbmesser $= R$ und von dem Centriwinkel $2\alpha_{,}$ bis zu dem Centriwinkel $2\alpha_{,,}$ eingesenkt.

Es ist der Flächeninhalt des Stückes $abcd = abe - dce$, daher ist:

$$S = \tfrac{1}{2}R^2 . \left\{\alpha_{,} - \alpha_{,,} - \sin\alpha_{,} . \cos\alpha_{,} + \sin\alpha_{,,} . \cos\alpha_{,,}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}R^2 . \left\{\alpha_{,} - \alpha_{,,} - \tfrac{1}{2} . (\sin 2\alpha_{,} - \sin 2\alpha_{,,})\right\},$$

ferner ist das statische Moment des Stückes $abcd$ durch eine einfache Rechnung zu finden:

$$SZ = \tfrac{1}{3}R^3 . \left\{1 - \cos\alpha_{,} . (1 + \tfrac{1}{2}\sin\alpha_{,}^2) - 1 + \cos\alpha_{,,} . (1 + \tfrac{1}{2}\sin\alpha_{,,}^2)\right\}$$

$$= \tfrac{1}{6}R^3 . \left\{\cos\alpha_{,,} . (3 - \cos\alpha_{,,}^2) - \cos\alpha_{,} . (3 - \cos\alpha_{,}^2)\right\}.$$

Nun ist noch $R_{,} = R . \sin\alpha_{,}$; $R_{,,} = R . \sin\alpha_{,,}$ und man hat nach Gleichung 168d) den Hebelsarm der Reibung:

$$171)\quad \mathfrak{R} = \tfrac{1}{6}R . \cos B . \frac{8 . \operatorname{tang} B . (\sin\alpha_{,}^3 - \sin\alpha_{,,}^3) + \pi . \left\{3 . (\cos\alpha_{,,} - \cos\alpha_{,}) - (\cos\alpha_{,,}^3 - \cos\alpha_{,}^3)\right\}}{\pi . \operatorname{tang} B . (\sin\alpha_{,}^2 - \sin\alpha_{,,}^2) + \left\{(\alpha_{,} - \alpha_{,,}) - \tfrac{1}{2} . (\sin 2\alpha_{,} - \sin 2\alpha_{,,})\right\}}.$$

Für den Fall, dafs die Begrenzung bis an die Drehaxe reicht, ist $\alpha_{,,} = 0$, und man hat:

$$171\text{a})\quad \mathfrak{R} = \tfrac{1}{6}R . \cos B . \frac{8 . \operatorname{tang} B . \sin\alpha_{,}^3 + \pi . \left\{2 - \cos\alpha_{,} . (3 - \cos\alpha_{,}^2)\right\}}{\pi . \operatorname{tang} B . \sin\alpha_{,}^2 + \left\{\alpha_{,} - \tfrac{1}{2} . \sin 2\alpha_{,}\right\}}.$$

und für den Fall, dafs man eine vollkommene Halbkugel als reibende Fläche hat, ist $\alpha_{,} = \tfrac{1}{2}\pi$, und man hat:

$$171\text{b})\quad \mathfrak{R} = \tfrac{2}{3}R . \cos B . \frac{\frac{4}{\pi} . \operatorname{tang} B + 1}{2 . \operatorname{tang} B + 1}.$$

Wenn hierbei der Druck normal zur Drehaxe ist, so geht der Hebelsarm der Reibung für die Halbkugel über in:

$$171\text{c})\quad \mathfrak{R} = \tfrac{2}{3}\text{R},$$

d. h. der Hebelsarm der Reibung für eine Halbkugel ist derselbe, gleichviel ob der Druck parallel mit der Drehaxe, oder normal zur Drehaxe wirkt.

Wenn nun ganz állgemein (Θa) das statische Moment der Reibung, und Pr das statische Moment der auf Drehung wirkenden bewegenden Kräfte, beides für eine gegebene Axe, bezeichnet, so ist immer (Θa) dem Moment Pr entgegengesetzt, folglich hat man als Moment der wirklich Drehung erzeugenden Kräfte:

$$172)\ (Pr - \Theta a) = f_{\prime} . J_{\prime}$$

(nach Gleichung 154a, S. 167, wenn $f_{\prime}$ das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit, und $J_{\prime}$ das Trägheitsmoment des Systems in Bezug auf dieselbe Axe bezeichnet) folglich ist:

$$172a)\ f_{\prime} = \frac{Pr - (\Theta a)}{J_{\prime}}.$$

Je nachdem nun wieder $Pr > \Theta a$; $Pr = \Theta a$, oder $Pr < \Theta a$ ist, befindet sich das bewegliche System aufserhalb der Grenze des drehenden Gleitens, an der Grenze, oder innerhalb der Grenze desselben, und es lassen sich ähnliche Betrachtungen anstellen, wie am Schlusse des § 95.

Widerstände gegen Kippen; Stabilität; Rollen.

§ 99. Wir haben noch in § 93. derjenigen Veränderung der Lage des beweglichen Systems gegen ein fixes System gedacht, welche wir „Kippen“ nannten. Bei dem Kippen berührt die Drehungsaxe des beweglichen Systems beide Systeme, und nimmt einen oder mehre Punkte der Berührungsfläche auf. Diese in der Axe des Kippens liegenden Punkte bleiben bei der Bewegung des beweglichen Systems in Ruhe, während alle andern Punkte Bogenelemente beschreiben, die sich von dem fixen System abheben. Aus dieser letzten Bedingung folgt, dafs, wenn wir die Begrenzungslinie der Berührungsfläche denken (die Berührungsfläche mag nun eben oder krumm sein):

1) die Axe des Kippens immer diese Begrenzungslinie berühren mufs;

und aus der ersten Bedingung folgt:

2) dafs die Axe des Kippens in derjenigen Berührungsebene beider Systeme liegen mufs, die dem Punkte angehört, in welchem diese Axe die Begrenzungslinie berührt.

Die Bedingung 1) ist sofort ersichtlich, wenn man bemerkt, dafs für jede Axe, welche die Begrenzungslinie der Berührungsfläche schneidet, unmittelbar benachbarte Berührungspunkte existiren, die auf verschiedenen Seiten dieser Axe liegen. Bei der Drehung des Systems um diese Axe würden nun zwar die Punkte auf der einen Seite sich von der Berührungsebene, in welcher die Axe liegt abheben können, die Punkte der andern Seite müfsten dann aber in diese Ebene einschneiden, und das widerspricht nach den Bedingungen des § 93 der Möglichkeit des Kippens.

Will man nun untersuchen, ob ein bewegliches System im Gleichgewicht gegen Kippen sei, so hat man nach dem Satz No. 1. nur nöthig, diese Untersuchungen für solche Axen anzustellen, welche die Begrenzungslinie der Berührungsfläche berühren.

Welche von allen den Linien, welche die Begrenzungslinie der Berührungsfläche unter den gemachten Bedingungen berühren, diejenige Axe sei, um die ein System, das nicht im Gleichgewicht gegen Kippen ist wirklich kippt, ist von der Form der Berührungsfläche und von der Lage und Gröſse der auf das fixe System angebrachten bewegenden Kräfte abhängig, und läſst sich in vielen Fällen ohne Weiteres angeben, in andern Fällen dagegen bedarf es einer besondern Untersuchung. Ist die Axe des Kippens entweder durch direkte Bestimmung festgestellt, oder zufolge einer Schätzung angenommen, so hat man die Momente sämmtlicher auf das bewegliche System angebrachten Kräfte für diese Axe zu bestimmen, und zwar so, daſs man die Momentensumme bildet für diejenigen Kräfte, welche auf Kippen wirken, und dann die Momentensumme derjenigen Kräfte, welche dem Kippen entgegenwirken. Die Momentensumme, welche auf Kippen wirkt, sei $\Sigma(Ka)$, und die Momentensumme, welche dem Kippen entgegenwirkt, sei $-\Sigma(Pb)$, dann ist das Moment, welches wirkliche Drehung erzeugt (QR):

$$173) \quad (QR) = \Sigma(Ka) - \Sigma(Pb).$$

Ist nun $\Sigma(Ka) > \Sigma(Pb)$, so erfolgt Kippen, und wir sagen, das bewegliche System sei auſserhalb des Gleichgewichtes gegen Kippen; ist dagegen $\Sigma(Ka) < \Sigma(Pb)$, so kann kein Kippen erfolgen, denn nach der Voraussetzung müſste nun das bewegliche System in entgegengesetztem Sinne des Kippens Bewegung erlangen, d. h. es müſsten die einzelnen Berührungspunkte anstatt sich abzuheben, in das fixe System eindringen, was nicht möglich ist. Wir bezeichnen diesen Zustand, als „innerhalb des Gleichgewichtes gegen Kippen"; ist endlich

$$\Sigma(Ka) = \Sigma(Pb),$$

so ist das bewegliche System an der Grenze des Gleichgewichts gegen Kippen, oder „an der Grenze des Kippens" denn jeder unendlich kleine Zuwachs von $\Sigma(Ka)$ bringt das System auſserhalb, und jeder unendlich kleine Zuwachs von $\Sigma(Pb)$ innerhalb der Grenze des Kippens.

Die Momentensumme $\Sigma(Pb)$ der Kräfte, welche dem Kippen entgegenwirken in Bezug auf irgend eine Axe nennt man die Stabilität des beweglichen Systems in Bezug auf Kippen um diese Axe, und das Verhältnifs

$$173\,\mathrm{a})\quad \frac{\Sigma(Pb)}{\Sigma(Ka)} = S$$

nennen wir die Sicherheit gegen Kippen, oder das Maafs der Stabilität des beweglichen Systems.

Je nachdem das bewegliche System an der Grenze, innerhalb, oder aufserhalb der Grenze des Kippens ist, ist das Maafs der Stabilität $S = 1$; $S > 1$; $S < 1$.

Wenn ein bewegliches System aufserhalb des Gleichgewichts gegen Kippen ist, so ändert es seine Lage gegen das fixe System indem es sich um eine Axe dreht, die beide Systeme berührt. Diese Axe enthält einen oder mehrere Berührungspunkte, welche an der Drehung keinen Theil nehmen. Nun ist aber der Fall denkbar, dafs diese Berührungspunkte, welche nicht kippen, sich dennoch gleitend verschieben; dann wird die Axe des Kippens zwar ihre Lage gegen das fixe System ändern, aber sie wird nicht ihre Lage gegen das bewegliche System ändern, und wir werden die gleichzeitig erfolgenden Bewegungen nach dem Grundsatz in § 24. No. 1 einzeln als gleitende Bewegung und als kippende Bewegung betrachten können. Wir nennen diese Bewegung „gleitendes Kippen“.

Es ist nun ferner noch der Fall denkbar, dafs die Oberflächen der beiden sich berührenden festen Systeme so beschaffen sind, dafs sie sich auf einander abwickeln können, und dafs die kippende Bewegung gerade in einer solchen Weise erfolgt, dafs durch dieselbe eine Abwickelung bedingt wird. Treffen diese beiden Bedingungen zusammen, so werden in demselben Zeitelement, in welchem das bewegliche System um eine bestimmte Axe kippt, in beiden Systemen die dieser Axe benachbarten Punkte, welche bis dahin noch nicht sich berührten, Berührungspunkte werden; dadurch heben sich diejenigen Punkte, die bis dahin in der Drehaxe lagen von einander ab, und es bildet sich eine neue Drehaxe, welche die der frühern Drehaxe benachbarten Punkte sowohl des fixen, als auch des beweglichen Systems enthält. Bei jeder neuen kippenden Bewegung des beweglichen Systems findet derselbe Vorgang statt, und es erfolgt also ein fortwährendes Kippen immer um neue, stetig auf einander folgende Drehaxen, wobei sich die Oberfläche des beweglichen Systems auf derjenigen des fixen Systems abwickelt. Diese Bewegung nennen wir Rollen oder Wälzen. Die Möglichkeit des Rollens ist also dadurch bedingt, dafs sich die Oberfläche des beweglichen Systems auf derjenigen des fixen Systems abwickeln könne, und hierzu gehört, dafs die Berührung fortwährend in einer geraden Linie, oder in einem Punkte statt finde.

Es ist übrigens denkbar, dafs während das bewegliche System rollt, während es also immer um eine neue Axe kippt, dieses Kippen ein gleitendes Kippen sein könne, d. h. dafs in demselben Augenblick, wo das Kippen um eine bestimmte Axe erfolgt, diese Axe selbst gleitend fortrückt, und im nächsten Augenblick zwar die der eben vorhandenen Drehaxe benachbarten Punkte des beweglichen Systems, aber nicht die derselben benachbarten Punkte des fixen Systems, sondern entfernter liegende Punkte desselben zur Berührung gelangen, und die neue Drehaxe bilden. Diese Bewegung nennen wir „gleitendes Rollen". Sie läfst sich immer zurückführen auf ein Gleiten und auf ein Rollen.

Wie aber auch das Kippen beschaffen sein mag, so wird man in dem Augenblick, in welchem das bewegliche System kippt, allemal die Axe des Kippens als fixe Axe betrachten und auf dieselbe die Gesetze der Drehung eines festen Systems um eine fixe Axe anwenden können (§ 79).

Gesetze des einfachen und des gleitenden Kippens; Bestimmung der Axe des Kippens.

§ 100. Nehmen wir an, die Berührungspunkte zweier festen Systeme liegen sämmtlich in ein und derselben Ebene; wir wollen untersuchen, unter welchen Verhältnissen das bewegliche System kippen, unter welchen es gleitend kippen wird, und wie die Axe des Kippens zu finden sei.

Wir denken drei Koordinatenaxen, deren Anfangspunkt vorläufig der Schwerpunkt des beweglichen Systems sei; und von denen die erste Axe normal zur Berührungsebene der beiden Systeme sei, die beiden andern Axen also parallel mit dieser Berührungsebene liegen müssen.

Wir bilden aus den auf das bewegliche System angebrachten Kräften die drei Drucksummen:

$$\Sigma(K \cdot \cos\alpha); \quad \Sigma(K \cdot \cos\beta); \quad \Sigma(K \cdot \cos\gamma).$$

Die Drucksumme $\Sigma(K \cdot \cos\alpha)$ wird durch den Widerstand des fixen Systems aufgehoben, ist also der Reibung erzeugende Druck, und die daraus hervorgehende Reibung ist $\mu \cdot \Sigma(K \cdot \cos\alpha)$. Die beiden andern Drucksummen haben eine Resultirende:

$$Q = \sqrt{\left\{[\Sigma(K \cdot \cos\beta)]^2 + [\Sigma(K \cdot \cos\gamma)]^2\right\}},$$

welche mit den beiden in der Berührungsebene liegenden Axen die Winkel B und Γ bildet, und man hat bekanntlich:

$$\cos B = \sin \Gamma = \frac{\Sigma(K \cdot \cos\beta)}{Q}$$

$$\cos \Gamma = \sin B = \frac{\Sigma(K \cdot \cos\gamma)}{Q}.$$

Die Resultirende Q wirkt auf Verschieben, sie bewirkt ein Gleiten des beweglichen Systems nach der Richtung Q mit einem Druck, der sich ausdrückt durch:

$$174) \quad P = Q - \mu \cdot \Sigma(K \cdot \cos\alpha).$$

Nun können wir auch die Momente der Kräftepaare für die drei Axen bilden. Dieselben sind (Gleichung 141, S. 142):

$$(P'a') = \Sigma(K \cdot \cos\beta \cdot z) + \Sigma(K \cdot \cos\gamma \cdot y)$$
$$(P''a'') = \Sigma(K \cdot \cos\alpha \cdot z) + \Sigma(K \cdot \cos\gamma \cdot x)$$
$$(P'''a''') = \Sigma(K \cdot \cos\alpha \cdot y) + \Sigma(K \cdot \cos\beta \cdot x).$$

Das Kräftepaar $(P'a')$ wirkt auf Drehung in einer Ebene, welche parallel ist mit der Berührungsebene und deren Axe, folglich normal ist zur Berührungsebene Durch welchen Punkt der Berührungsebene diese Axe geht, ist von der Natur des betrachteten Falles abhängig. Da nun auch der Reibung erzeugende Druck $\Sigma(K \cdot \cos\alpha)$ auf derselben Ebene normal ist, so ist das Moment des Reibungswiderstandes nach Gleichung 167) zu bestimmen, und es ist dasselbe

$$(\Theta a) = \mu \cdot \Sigma(K \cdot \cos\alpha) \cdot \frac{\Sigma(dF \cdot r)}{\Sigma(dF)}$$
$$= \mu \cdot \Sigma(K \cdot \cos\alpha) \cdot \mathfrak{R}$$

(wenn $\mathfrak{R}$ den Hebelsarm der Reibung bezeichnet).

Hiernach erleidet das System eine Drehung um eine zu der Berührungsebene normale Axe, und es ist das wirksame Moment der Drehung:

$$174\text{a}) \quad P'a' - \Theta a = \Sigma(K \cdot \cos\beta \cdot z) + \Sigma(K \cdot \cos\gamma \cdot y) - \mu \cdot \Sigma(K \cdot \cos\alpha) \cdot \mathfrak{R}.$$

Die Kräftepaare $(P''a'')$ und $(P'''a''')$ lassen sich zu einem einzigen Kräftepaar zusammensetzen. Nach Gleichung 140) und 140a) ist das Moment (Pa) dieses Kräftepaars:

$$Pa = \sqrt{\left\{(P''a'')^2 + (P'''a''')^2\right\}}$$

und die Winkel, welche die Paarebene dieses Paars (die übrigens normal ist zur Berührungsebene) mit den beiden Axen in dieser Ebene bildet $B_{\prime}$ und $\Gamma_{\prime}$ sind durch die Gleichungen (140a) zu bestimmen:

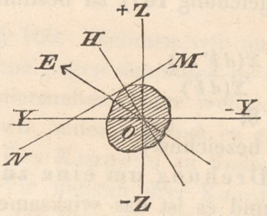
$$\cos B_{\prime} = \sin \Gamma_{\prime} = \frac{P'' . a''}{Pa}$$

$$\cos \Gamma_{\prime} = \sin B_{\prime} = \frac{P''' . a'''}{Pa}.$$

Die Ebene des Kräftepaars Pa ist diejenige, in welcher ein Bestreben auf Drehung des beweglichen Systems vorhanden ist; konstruiren wir diese Paarebene, so steht dieselbe normal auf der Berührungsebene, schneidet diese in einer geraden Linie, und diese Durchschnittslinie schneidet im Allgemeinen die Begrenzungslinie der Berührungsfigur; nun wissen wir aus dem vorigen Paragraphen, dafs die Axe des Kippens in der Berührungsebene liegen, und die Begrenzungsfigur berühren mufs. Da nun aber die Axe des Kippens auch normal zur Paarebene sein mufs, so mufs sie auf der obigen Durchschnittslinie normal, und zwar diejenige Normale sein, welche die Begrenzungslinie der Berührungsfigur berührt, und dabei so liegt, dafs sie der Richtung in welcher das resultirende Kräftepaar Pa auf Drehung wirkt entspricht.

Hierdurch ist nun im Allgemeinen die Lage der Axe des Kippens bestimmt.

In nebenstehender Skizze sei die schraffirte Figur die ebene Berührungsfläche. OY, OZ seien die zweite und dritte Axe durch den Schwerpunkt des beweglichen Systems gehend, OE sei die Richtung von Q, nach welcher das System gleitet; OH sei die Durchschnittslinie der Ebene des auf Kippen wirkenden Kräftepaars mit der Berührungsebene, dann ist MN die Axe des Kippens. Soll nun die Axe des Kippens für jeden Augenblick als fixe Axe betrachtet werden können, so müssen nach § 79



die auf Verschieben der Axe wirkenden Drucke durch die Reaktion in der fixen Axe im Gleichgewicht gehalten werden. Der auf Verschieben der Axe wirkende Druck wird gefunden, wenn man den rerultirenden Druck Q in zwei Komponenten zerlegt, von denen die eine normal zu $MN_{\prime}$ ist, die andere mit MN zusammenfällt. Da der Winkel HOE, welchen die Richtung OE mit der zur Axe normalen OH bildet, offenbar gleich $(B_{\prime} - B)$ ist, so ist die Komponente, welche auf Verschieben der Axe nach der Richtung OH wirkt:

$$Q . \cos (B_{\prime} - B)$$

und die Komponente, welche auf Verschieben nach der Richtung MN wirkt:

$$Q \,.\, \sin (B_{\prime} - B).$$

Die Drucke nun, welche dem Verschieben der Axe entgegenwirken, sind keine andern, als die Komponenten der Reibung, und da der Reibungswiderstand der Richtung von Q entgegengesetzt zu denken ist, so sind die Komponenten des Reibungswiderstandes für die Richtungen OH und MN

$$-\mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha) \,.\, \cos(B_{\prime} - B) \text{ und } -\mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha) \,.\, \sin(B_{\prime} - B).$$

Je nachdem nun:

$$Q \,.\, \cos(B_{\prime} - B) \leqq \mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha) \,.\, \cos(B_{\prime} - B)$$

$$\text{d. h.: } Q \,.\, \leqq \mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha), \text{ oder}$$

$$Q \,.\, \cos(B_{\prime} - B) > \mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha) \,.\, \cos(B_{\prime} - B)$$

$$\text{d. h.: } Q > \mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha)$$

ist, wird die Axe MN als fixe Axe oder als verschiebbare Axe zu betrachten sein; im ersten Falle wird das System einfach kippen ohne zu gleiten; im andern Falle wird ein gleitendes Kippen erfolgen.

Bestimmen wir nun das Moment sämmtlicher auf das bewegliche System angebrachten Kräfte für diese Axe MN, so ist dasselbe das auf Kippen wirkende Kräftepaar, und wenn wir dasselbe mit (Ka) bezeichnen, so ist das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit des Kippens:

$$174\text{b)}\quad f_{\prime} = \frac{Ka}{J_{\prime}},$$

worin $J_{\prime}$ das Trägheitsmoment des beweglichen Systems in Bezug auf die Axe des Kippens bedeutet; das Aenderungsmaafs des fortschreitenden Gleitens ist aber nach Gleichung 165b) (S. 202) und 174) (S. 217):

$$f = \frac{P}{M} = \frac{Q - \mu \,.\, \Sigma(\cos\alpha)}{M}.$$

$$174\text{c)}\quad f = \frac{\sqrt{\left\{[\Sigma(K \,.\, \cos\beta)]^2 + [\Sigma(K \,.\, \cos\gamma)]^2\right\}} - \mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha)}{M}$$

Das bewegliche System kippt nun mit einer Winkelgeschwindigkeit deren Aenderungsmaafs $f_{\prime}$ ist, sobald das Moment Ka gröfser als Null ist, es ist dabei im Gleichgewicht gegen Gleiten, wenn $Q < \mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha)$ ist; wenn dagegen $Q > \mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha)$ ist, so gleitet es zugleich mit einer Geschwindigkeit, deren Aenderungsmaafs f (Gleichung 174c) ist.

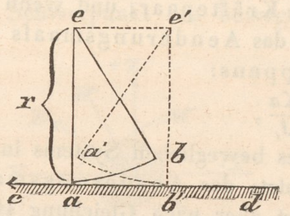
Diese Bestimmungen gelten, so lange das bewegliche System um eine Axe kippt, die stets durch dieselben Punkte des beweglichen Systems geht. Anders ist es, wenn die Möglichkeit des Rollens vorhanden ist.

Gesetze des Rollens; cylindrisches und konisches Rollen. Einfaches und gleitendes Rollen.

§ 101. Wir wollen nunmehr die Gesetze des Rollens untersuchen.

Das Rollen ist, wie im Paragraphen 99. angedeutet worden, eine besondere Art des Kippens, es setzt also immer eine Axe voraus, um welche die Drehung des beweglichen Systems erfolgt, und welche in der Berührungsebene beider Systeme liegt, sowie ein auf Drehung um diese Axe wirkendes Kräftepaar, endlich ist das Rollen durch die Möglichkeit bedingt, dafs das bewegliche System auf dem fixen System sich abwickeln könne. Bevor wir hiernach die mechanischen Gesetze dieser Bewegung betrachten, wollen wir folgende Bemerkung hervorheben.

Es sei ab ein Kurvenelement, welches sich auf der Linie cd abwickeln soll, $ae = eb$ sei der Krümmungshalbmesser des Kurvenelements; und nach der Abwickelung sei das Bogenelement in die Lage $a'b'$ gekommen. Offenbar ist die Länge $ab' = ab$ gleich der Länge des Kurvenelements, und es steht sowohl der Krümmungshalbmesser ae, als auch der Krümmungshalbmesser $b'e'$ normal auf cd, da in beiden Lagen und bei dem Uebergange von der einen Lage in die andere das Bogenelement ab fortwährend die Linie cd berühren soll.



Hieraus folgt, dafs ee' der Weg, den der Krümmungsmittelpunkt bei der Abwickelung beschrieben hat, nicht nur eine äquidistante Kurve von cd ist, sondern auch gleich der Länge ab' d. i. gleich der Länge des Bogenelementes ab ist. Nun sieht man, dafs das Bogenelement aus der Lage abe, die es vor der Abwickelung hatte, in die Lage $a'b'e'$, in die es durch die Abwickelung gelangt ist, auch dadurch gebracht werden kann, dafs man sich vorstellt, der Krümmungsmittelpunkt e und alle Punkte des Systems aeb haben zuerst fortschreitend den Weg ee' beschrieben, dessen Länge gleich der Länge des Bogenelementes ab, und dessen Richtung äquidistant der Grundkurve ist, und dann habe das System eine Drehung gemacht nach einer Richtung, die entgegengesetzt der fortschreitenden Bewegung, und um einen Winkel der gleich demjenigen ist, welchen das Bogenelement einschliefst. Hieraus folgt:

Jede Abwälzung eines Kurvenelementes auf einer Grundkurve kann zurückgeführt werden auf eine fortschreitende Bewegung, welche der Krümmungsmittelpunkt mit allen Punkten gemeinschaftlich macht, und auf eine nach entgegengesetzter Richtung erfolgende Drehung um den Krümmungsmittelpunkt, wobei der Berührungspunkt sich mit einer Peripheriegeschwindigkeit drehend bewegt, die gleich der Geschwindigkeit ist, mit welcher das ganze System sich fortschreitend bewegt.

Ist f das Aenderungsmaafs der fortschreitenden Bewegung, $f_{\prime}$ das Aenderungsmaafs der drehenden Bewegung um den Krümmungsmittelpunkt, r der Krümmungshalbmesser, so mufs zufolge der letzten Bedingung bei vollständiger Abwälzung sein:

$$175)\quad f = -r \, . \, f_{\prime}.$$

Ist $f \gtreqless -f_{\prime} \, . \, r$, so findet ein gleitendes Rollen statt, denn wir können uns immer vorstellen, das bewegliche System bewege sich gleitend ohne zu rollen mit einer Geschwindigkeit, deren Aenderungsmaafs dem Ueberschufs von f über $-f_{\prime} \, . \, r$ entspricht, und dann erfolge die Abwickelung mit dem Aenderungsmaafs $-f_{\prime} \, . \, r$.

Betrachten wir die drehende Bewegung, welche bei der Abwälzung statt finden mufs, und beachten wir, dafs wenn ein festes System eine drehende Bewegung macht, dies nur um eine allen Elementen gemeinschaftliche gradlinige Axe und mit einer gemeinschaftlichen Winkelgeschwindigkeit erfolgen kann, so ergiebt sich sofort aus dem obigen Satze, dafs eine Abwälzung eines festen Systems nur möglich ist, wenn die Mittelpunkte der Krümmungskreise sämmtlicher berührenden Kurvenelemente in ein und derselben geraden Linie liegen.

Diese gerade Linie ist entweder parallel mit der Berührungslinie, oder sie schneidet dieselbe, denn: aus dem Begriff der Berührung folgt, dafs die beiden festen Systeme eine gemeinschaftliche Berührungsebene haben; die Axe des Rollens liegt in dieser Berührungsebene; die Normalen auf der Berührungsebene, welche in den einzelnen Punkten der Axe des Rollens errichtet sind, sind auch normal zu dem rollenden System, gehen also durch die Krümmungsmittelpunkte der berührenden Kurvenelemente dieses Systems, und da diese Normalen alle in ein und derselben Ebene liegen (die zur Berührungsebene normal ist, und durch die Axe des Rollens geht), so liegen die Krümmungsmittelpunkte sämmtlich mit der Axe des Rollens in ein und derselben Ebene, da sie nun auch alle in gerader Linie liegen müssen, so mufs diese gerade Linie der Axe des Rollens entweder parallel sein, oder dieselbe schneiden.

Ist die gerade Linie, welche die sämmtlichen Krümmungsmittelpunkte aufnimmt und welche wir als Krümmungsaxe bezeichnen wollen, parallel mit der Axe des Rollens, so ist der Krümmungshalbmesser (r) für sämmtliche Berührungspunkte konstant und wir nennen diesen Fall des Rollens cylindrisches Rollen; wenn dagegen die Krümmungsaxe die Axe des Rollens schneidet, so bezeichnen wir das Abwälzen des beweglichen Systems als konisches Rollen. Bei dem konischen Rollen ist der Krümmungshalbmesser r nicht konstant, sondern veränderlich, aber es ist, unter $r, r', r''\ldots$ die Krümmungsradien verschiedener Berührungselemente, und unter $a, a', a''\ldots$ die Abstände dieser Elemente von dem Durchschnittspunkte zwischen der Axe des Rollens und der Krümmungsaxe verstanden:

$$r : r' : r'' \ldots = a : a' : a'' \ldots$$

Da nun ferner das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit $f_{\prime}$ mit welcher die Elemente um die Krümmungsaxe sich drehen für alle Elemente denselben Werth haben mufs, so folgt aus Gleichung 175), dafs das Aenderungsmaafs der fortschreitenden Bewegung f für die einzelnen Berührungselemente verschieden sein mufs. Nun gehören aber diese sämmtlichen Berührungselemente einem System an, und es bedingt daher der Fall, dafs die einzelnen Elemente mit verschiedener Geschwindigkeit fortschreiten, eine Drehung um eine gemeinschaftliche Axe (§ 65). Diese gemeinschaftliche Axe ist normal zur Berührungsebene, da in der Berührungsebene sämmtliche Wegelemente liegen. Ist $f_{\prime\prime}$ das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit für die Drehung um diese Axe, und R der (veränderliche) Abstand der einzelnen Berührungselemente von dieser Axe, so ist offenbar

$$f = f_{\prime\prime} \cdot R = -r \cdot f_{\prime}$$

$$175\text{a)} \quad \frac{f_{\prime}}{f_{\prime\prime}} = -\frac{R}{r},$$

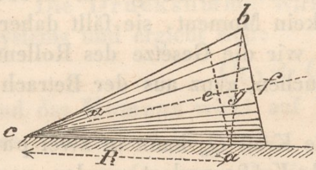
d. h. wenn ein System **konisch** rollt, so verhalten sich die Aenderungsmaafse der Winkelgeschwindigkeiten, mit denen das System um die Krümmungsaxe und um eine zur Berührungsebene normale Axe rotirt, umgekehrt wie der Krümmungshalbmesser irgend eines Punktes zu dem Abstande dieses Punktes von der letztgenannten Axe.

Da nun dies Verhältnifs für alle Elemente in irgend einem Augenblicke denselben Werth hat, so ist:

$$\frac{R}{r} = \frac{R'}{r'} = \frac{R''}{r''};\; r : r' : r'' = R : R' : R'' \ldots = a : a' : a'' \ldots$$

und hieraus folgt, dafs die zur Berührungsebene normale Axe, um welche das System rotirt, durch den Punkt gehen müsse, in welchem die Krümmungsaxe die Axe des Rollens schneidet.

Für den geraden Kegel mit kreisförmiger Grundfläche sei ab die Normale zur Berührungsebene in irgend einem Punkte; der Schnitt des Kegels durch eine Ebene, welche durch ab geht und zur Axe des Rollens ac normal ist, ist eine Ellipse, das berührende Kurvenelement ein elliptisches, und zwar dasjenige, welches dem Endpunkt der langen Axe ab entspricht.



Für dieses Kurvenelement ist der Krümmungshalbmesser:

$$r = \frac{p^2}{q}$$

wenn p die halbe kurze, q die halbe lange Axe ist. Es ist aber auch $p^2 = mn$, wenn m und n die Radien der die Ellipse begrenzenden Kreise des Kegels sind. Man hat also:

$$r = \frac{ae \,.\, bf}{\frac{1}{2}ab} = \frac{R \,.\, \sin\alpha}{\frac{1}{2}ab} \,.\, \frac{\frac{1}{2}ab}{\cos\alpha} = R \,.\, \operatorname{tang}\alpha = ag,$$

folglich ist die Axe cf die Krümmungsaxe des Kegels, und es ist für den Kegel:

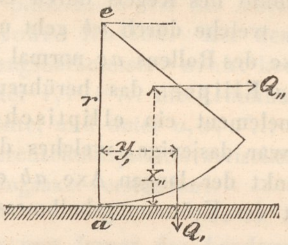
$$175\text{b})\quad \frac{f_{\prime}}{f_{\prime\prime}} = -\frac{R}{r} = -\operatorname{cotang}\alpha = -\frac{ce}{ae} = -\frac{h}{m},$$

worin α den Winkel bezeichnet, unter welchem die Krümmungsaxe die Axe des Rollens schneidet, m der Radius des Kegels in irgend einem Berührungspunkt, h die Höhe des Kegels für die Kreisebene, deren Radius m ist.

Denken wir nunmehr ein bewegliches System, für welches die Möglichkeit des cylindrischen Rollens vorhanden ist, und untersuchen wir, wie die Drucksumme zu bestimmen ist, welche auf Fortschreiten des Krümmungsmittelpunktes wirkt, und wie das Moment des Kräftepaars zu finden ist, welches auf Drehung des Systems um die Krümmungsaxe wirkt.

Im Allgemeinen werden die auf das bewegliche System angebrachten Kräfte sich nach § 76. A. No. 1 (S. 119) zurückführen lassen auf drei einzelne Kräfte, die einzeln parallel sind mit drei angenommenen Axen (Gleichung 126). Die Richtung ae normal zur Berührungsebene sei die erste, die Richtung cd (Figur auf S. 220), d. i. die in der Berührungsebene liegende zur Axe des Rollens normale Richtung sei die zweite, und die Axe des Rollens sei die dritte Koordinatenaxe; $Q_{\prime}$ $Q_{\prime\prime}$ $Q_{\prime\prime\prime}$ seien die mit den drei Axen parallelen Kräfte, deren Angriffspunkte durch die Koordinaten-Gleichungen 126) zu bestimmen sind.

Die Kraft $Q_{\prime\prime\prime}$ parallel mit der Axe des Rollens wirkt auf Verschieben des Systems nach der Richtung dieser Axe, hat aber in Bezug auf Drehung um diese Axe kein Moment, sie fällt daher, indem wir die Gesetze des Rollens untersuchen, ganz aus der Betrachtung.



Die Kraft $Q_{\prime\prime}$ kann in zwei parallele Kräfte zerlegt werden, von denen die eine durch die Krümmungsaxe e, die andere durch die Axe des Rollens a geht, und welche sich bestimmen durch die Gleichungen:

$$Q_{\prime\prime}^{(a)} = Q_{\prime\prime} \cdot \frac{(r - X_{\prime\prime})}{r}; \quad Q_{\prime\prime}^{(e)} = Q_{\prime\prime} \cdot \frac{X_{\prime\prime}}{r},$$

beide Kräfte wirken auf Fortschreiten des ganzen Systems.

Die Kraft $Q_{\prime}$ welche normal ist zur Berührungsebene, kann keine fortschreitende Bewegung in der Richtung des Rollens $ab_{\prime}$ erzeugen, dagegen kann sie auf Drehung in der Ebene des Rollens wirken, sie giebt das auf Kippen wirkende Kräftepaar, und das Moment desselben drückt sich aus durch $Q_{\prime} \cdot Y_{\prime}$. Dieses Kräftepaar können wir immer verwandeln in ein anderes, dessen Kräfte durch die Axen e und a gehen, und die sich daher bestimmen nach Gleichung 139), S. 137 durch die Werthe:

$$+ \frac{Q_{\prime} \cdot Y_{\prime}}{r} \text{ und } - \frac{Q_{\prime} \cdot Y_{\prime}}{r},$$

wobei übrigens auf das Vorzeichen von $Y_{\prime}$ wohl zu achten ist.

Endlich wirkt noch in der Axe a die Komponente der gleitenden Reibung, welche wir mit Θ bezeichnen wollen, dieselbe ist immer der Richtung der Kraft $Q_{\prime\prime}$, welche auf Fortschreiten des Systems wirkt, entgegengesetzt.

Nun haben wir in der Axe e die Kräfte wirkend:

$$176)\quad \frac{Q_{\prime\prime}.X_{\prime\prime}}{r} + \frac{Q_{\prime}.Y_{\prime}}{r} = Q_{(e)}$$

und in der Axe a die Kräfte:

$$176\text{a})\quad Q_{\prime\prime}.\frac{(r - X_{\prime\prime})}{r} - \frac{Q_{\prime}.Y_{\prime}}{r} - \Theta = Q_{(a)}.$$

Denken wir nun in dem Angriffspunkte der Kraft $Q_{(e)}$ zwei Kräfte angetragen, die parallel mit der Richtung des Fortschreitens und gleich $+ Q_{(a)}$ und $- Q_{(a)}$ sind, so hat man die Kräfte des beweglichen Systems zurückgeführt auf eine Drucksumme $Q_{(e)} + Q_{(a)}$ und auf ein Kräftepaar dessen Kräfte $+ Q_{(a)}$ in der Axe a und $- Q_{(a)}$ in der Axe e wirkend, den Hebelsarm $ae = r$ haben.

Die Drucksumme wirkt auf fortschreitende Bewegung des Systems und ergiebt sich:

$$Q_{(e)} + Q_{(a)} = Q_{\prime\prime} - \Theta$$

und das Moment wirkt auf Drehung des Systems in der Ebene des Rollens und ist gleich:

$$Q_{(a)}.r = Q_{\prime\prime}.(r - X_{\prime\prime}) - Q_{\prime}.Y_{\prime} - r.\Theta.$$

Bezeichnet nun $J_{\prime} = \varrho_{\prime}^2.M$ das Trägheitsmoment des beweglichen Systems in Bezug auf eine Axe, die parallel mit der Axe des Rollens durch den Krümmungsmittelpunkt geht, so hat man das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit für Drehung um diese Axe:

$$176\text{b})\quad f_{\prime} = \frac{Q_{(a)}.r}{J_{\prime}} = \frac{Q_{\prime\prime}.(r - X_{\prime\prime}) - Q_{\prime}.Y_{\prime} - r.\Theta}{J_{\prime}}$$

und das Aenderungsmaafs der fortschreitenden Bewegung:

$$176\text{c})\quad f = \frac{Q_{\prime\prime} - \Theta}{M}.$$

Da nun die Bedingung des cylindrischen Rollens nach dem Obigen sich darstellte durch (Gleichung 175):

$$f = -f_{\prime}.r,$$

so folgt die Komponente der gleitenden Reibung, welche in der Axe a wirksam sein mufs, durch Entwickelung aus den Gleichungen 176b) und 176c), indem wir erst mit r multipliziren und die Werthe gleichsetzen:

$$176\text{d})\begin{cases}\Theta = \dfrac{Q_{\prime\prime}\cdot[J_{\prime} + Mr\,.(r - X_{\prime\prime})] - Mr\,.Q_{\prime}\,.Y_{\prime}}{J_{\prime} + Mr^2}\\[2ex] = Q_{\prime\prime} - \dfrac{r\,.M}{J_{\prime} + Mr^2}\cdot(Q_{\prime\prime}\cdot X_{\prime\prime} + Q_{\prime}\cdot Y_{\prime})\\[2ex] = Q_{\prime\prime} - \dfrac{Mr^2}{J_{\prime} + Mr^2}\cdot Q_{(e)}\end{cases}$$

folglich durch Einsetzung dieses Werths in die Gleichungen 176b) und 176c), nach gehöriger Reduktion:

$$177)\begin{cases}f_{\prime} = -\dfrac{Q_{\prime\prime}\cdot X_{\prime\prime} + Q_{\prime}\cdot Y_{\prime}}{J_{\prime} + Mr^2} = -Q_{(e)}\cdot\dfrac{r}{J_{\prime} + Mr^2}\\[2ex] f = r\,.\dfrac{Q_{\prime\prime}\cdot X_{\prime\prime} + Q_{\prime}\cdot Y_{\prime}}{J_{\prime} + M\,.r^2} = Q_{(e)}\cdot\dfrac{r^2}{J_{\prime} + Mr^2}\end{cases}$$

worin $J_{\prime}$ das Trägheitsmoment des Systems in Bezug auf Drehung um eine mit der Axe des Rollens parallele durch den Krümmungsmittelpunkt gehende Axe, und M die Gesammtmasse des Systems bezeichnet.

Da der Werth Θ durch die gleitende Reibung bedingt ist, so ist der gröſste Werth, welchen Θ haben kann, offenbar:

$$\Theta = \mu\,.\,Q_{\prime}.$$

So lange nun der aus der Bedingung des Rollens berechnete Werth der Komponente der gleitenden Reibung Θ kleiner ausfällt, als dieser Maximalwerth $\mu\,Q_{\prime}$, wird ein vollständiges Rollen erfolgen, sobald aber Θ gröſser ausfällt als $\mu\,Q_{\prime}$, kann die Bedingung der Gleichung 175) nicht mehr erfüllt werden, und es entsteht ein gleitendes Rollen.

Man hat für diesen Fall, indem man in Gleichung 176b) für Θ den Werth $\mu\,Q_{\prime}$ setzt:

$$177\text{a})\quad f_{\prime} = \frac{Q_{\prime\prime}\cdot(r - X_{\prime\prime}) - Q_{\prime}\,.(Y + r\,.\mu)}{J_{\prime}}$$

und aus Gleichung 176c):

$$177\text{b})\quad f = \frac{Q_{\prime\prime} - \mu\,.\,Q_{\prime}}{M}$$

d. h. es ist das Aenderungsmaaſs der fortschreitenden Bewegung wie beim gleitenden Kippen (Gleichung 174c).

Erfahrungsmäſsig giebt es auch beim Rollen gewisse Widerstände, die sich dem Abwickeln der Berührungspunkte entgegensetzen und die, wie die Reibung, als passive Widerstände zu betrachten sind. Man pflegt diese Widerstände, deren Natur noch nicht gehörig aufgeklärt ist, die wälzende Reibung zu nennen. Man kann die wälzende Reibung immer als ein Kräftepaar denken, welches der Drehung des beweglichen Systems entgegenwirkt. Nennen wir das Moment dieses Kräftepaars $\mathfrak{W}$, so ist der Werth $\mathfrak{W}$ in den Gleichungen 176) bis 177) überall als ein Kräftepaar mit entgegengesetztem Zeichen hinzuzufügen. Wenn man die Kräfte dieses Kräftepaars auf den Abstand r reduzirt, so sind dieselben offenbar $+\frac{\mathfrak{W}}{r}$ und $-\frac{\mathfrak{W}}{r}$ und es gehen die Gleichungen 176) und 176a) mit Berücksichtigung der wälzenden Reibung über in folgende:

$$178)\quad \begin{cases} Q_{(e)} = \dfrac{Q_{\prime\prime}\cdot X_{\prime\prime}}{r} + \dfrac{Q_{\prime}\cdot Y_{\prime}}{r} - \dfrac{\mathfrak{W}}{r} \\ Q_{(a)} = \dfrac{Q_{\prime\prime}\cdot(r - X_{\prime\prime})}{r} - \dfrac{Q_{\prime}\cdot Y_{\prime}}{r} - \Theta + \dfrac{\mathfrak{W}}{r}. \end{cases}$$

Worin $Q_{(e)}$ den Druck bezeichnet, welcher in der Krümmungsaxe auf Fortschreiten derselben wirksam bleibt, $Q_{(a)}$ aber die Drucksumme bedeutet, welche in der Axe des Rollens wirksam zu denken ist. Nach (freilich ziemlich zweifelhaften) Versuchen von Coulomb mufs man schliefsen, dafs das Moment $\mathfrak{W}$ proportional sei der Drucksumme $Q_{\prime}$, welche normal gegen die Bahn des Rollens gerichtet ist, und dafs betrage:

beim Rollen von Pockholz	auf Eichenholz	$\mathfrak{W} = 0{,}0184\ Q_{\prime}$
- - -	Ulmenholz - -	$= 0{,}0311\ Q_{\prime}$
- - -	Gufseisen auf Gufseisen	$= 0{,}0178\ Q_{\prime}$
	(*Weisbach und Rittinger*) bis	$= 0{,}0187\ Q_{\prime}$
- - -	Eisenbahnräder auf Schienen	$= 0{,}019\ Q_{\prime}$
	(*de Pambour*) bis	$= 0{,}021\ Q_{\prime}$.

Im Allgemeinen ist also zu setzen:

$$178a)\quad \mathfrak{W} = \chi\cdot Q_{\prime}$$

und man hat daher:

$$178b)\quad \begin{cases} Q_{(e)} = \dfrac{Q_{\prime\prime}\cdot X_{\prime\prime}}{r} + \dfrac{Q_{\prime}\cdot(Y_{\prime} - \chi)}{r} \\ Q_{(a)} = \dfrac{Q_{\prime\prime}\cdot(r - X_{\prime\prime})}{r} - \dfrac{Q_{\prime}\cdot(Y_{\prime} - \chi)}{r} - \Theta. \end{cases}$$

Hiernach ist in sämmtlichen Gleichungen von 176) bis 177a), in welchen $Y_{\prime}$ (die Ordinate der Drucksumme $Q_{\prime}$) vorkommt, diese Ordinate um den Werth χ zu vermindern, wenn man die wälzende Reibung berücksichtigen will.

Die Gesetze des konischen Rollens in derselben Allgemeinheit zu entwickeln, wie die des cylindrischen Rollens führt auf sehr komplizirte Ausdrücke. In besonderen Fällen werden sich diese Gesetze nach Analogie der eben durchgeführten Untersuchungen und mit Berücksichtigung der Bedingungs-Gleichung 175a), S. 222 ohne grofse Schwierigkeiten ermitteln lassen.

Anwendungen der Reibungsgesetze: Balkenschub — Quetschwalzen — Axenreibung.

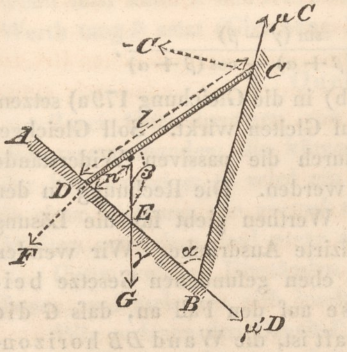
§ 102. Die in dem vorigen Paragraphen entwickelten Gesetze wollen wir auf einige bestimmte Fälle anwenden, indem wir einige der am häufigsten vorkommenden Aufgaben besprechen.

1. Balkenschub.

Ein Stab oder ein Balken ist zwischen zwei Wände gelegt, die den Winkel $ABC = \alpha$ einschliefsen; die Länge des Stabes ist l, und in dem Abstande n von dem einen Ende wirke eine Kraft G auf den Stab; gegeben ist die Neigung des Stabes gegen die eine Wand AB durch den Winkel $CDB = \beta$ und die Richtung der Kraft G durch den Winkel $BEG = \gamma$, welchen die Kraftrichtung G mit derselben Wand macht; zu ermitteln ist:

1) wie kann sich der Stab verschieben?
2) welche Kraft ist parallel mit der Wand AB erforderlich, um den Stab im Gleichgewicht zu halten? und
3) welchen Werth mufs der Winkel β haben, damit der Stab durch die Reibungswiderstände und den Widerstand des fixen Systems allein im Gleichgewicht gehalten werde?

Die Verschiebung des Stabes kann nur durch die bewegende Kraft G erfolgen, und zwar dadurch, dafs der Angriffspunkt dieser Kraft in dem Sinne desselben fortrückt; man sieht, dafs dabei der Stab mit seinen beiden Enden gleiten mufs, und zwar das Ende D nach A hin, das Ende C nach B hin. Durch den Widerstand des fixen Systems werden dabei in den Punkten C und D Kräfte aufgehoben, welche normal zu den Richtungen des Gleitens, und die daher Reibung erzeugende Drucke sind; diese Kräfte bezeichnen wir mit C und D, dann entstehen in den Punkten C und D die Reibungswiderstände μC und $\mu' D$, wenn μ und μ' die betreffenden Reibungs-Koeffizienten sind. Diese Reibungswiderstände wirken in Richtungen, die der Verschiebung entgegengesetzt sind. Offenbar wird in dem Zustande des Systems nichts geändert, wenn wir in dem Punkte C das fixe System fortgenommen, und dafür die durch dasselbe herbeigeführten Widerstände, nämlich die Reibung μC und den, dem aufgehobenen Druckantheil gleichen und entgegengesetzten Widerstand $-C$ als angebrachte Kräfte wirksam denken. Nun verfahren wir nach der Methode des § 97, indem wir die sämmtlichen Kräfte nach der Richtung des Gleitens des Punktes D und normal dazu zerlegen. Die Summe der Normaldrucke giebt den Reibung erzeugenden Druck D.



Indem wir die Richtung DA als positiven Zweig der ersten Axe, die Richtung DF als positiven Zweig der zweiten Axe ansehen, und die Winkel bestimmen, welche nach § 77 die Kraftrichtungen mit der Richtung DA bilden, finden wir als auf das bewegliche System angebrachten Kräfte:

1) die bewegende Kraft G unter dem Winkel $(180^\circ - \gamma)$;

2) den Widerstand des fixen Systems in dem andern Stützpunkte als Kraft C unter dem Winkel $(90^\circ - \alpha)$;

3) den Reibungswiderstand μC unter dem Winkel $(360^\circ - \alpha)$.

Es ist mithin der in dem Punkte D Reibung erzeugende Normaldruck:

$$D = G . \sin(180^\circ - \gamma) + C . \sin(90^\circ - \alpha) + \mu C . \sin(360^\circ - \alpha).$$

$$179) \begin{cases} D = G . \sin\gamma + C . \cos\alpha - \mu C . \sin\alpha \\ \quad = G . \sin\gamma + C . \sin\alpha . (\operatorname{cotang}\alpha - \mu) \end{cases}$$

und der auf Gleiten des Punktes D wirkende Druck:

$$K = G . \cos(180^\circ - \gamma) + C . \cos(90 - \alpha) + \mu C . \cos(360^\circ - \alpha) - \mu' D.$$

$$179\text{a}) \begin{cases} K = -G . \cos\gamma + C . \sin\alpha + \mu . C . \cos\alpha - \mu' D \\ \quad = -G . (\cos\gamma + \mu' . \sin\gamma) + C . \sin\alpha . [1 + \operatorname{cotang}\alpha . (\mu - \mu') + \mu . \mu']. \end{cases}$$

Hierdurch würde der Druck K, der auf Gleiten des Punktes D wirkt bestimmt, und folglich auch der gleich grofse aber entgegengesetzt im Punkte D, parallel mit AB anzubringende Druck, der erforderlich ist, um das System im Gleichgewicht zu halten, bekannt sein, wenn der Druck C bekannt wäre. Um den Druck C zu ermitteln dient die Momenten-Gleichung. Denn nehmen wir den Punkt D als Anfangspunkt des Koordinatensystems, so haben die Koordinaten der Angriffspunkte von G, C und μC folgende Werthe:

Die Koordinaten des Angriffspunktes von G sind

$$x = n . \cos\beta; \quad y = n . \sin\beta,$$

die Koordinaten des Punktes C sind

$$x' = l . \cos\beta; \quad y = l . \sin\beta,$$

und folglich hat man für das Gleichgewicht gegen Kippen:

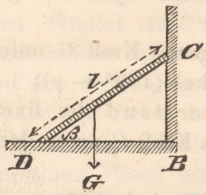
$$G . \sin\gamma . x - G . \cos\gamma . y + (C . \cos\alpha - \mu . C . \sin\alpha) . x' + (C . \sin\alpha + \mu . C . \cos\alpha) . y' = 0$$

$$G . n . (\sin\gamma . \cos\beta - \cos\gamma . \sin\beta) + C . l . (\cos\alpha . \cos\beta - \mu . \sin\alpha . \cos\beta + \sin\alpha . \sin\beta + \mu . \cos\alpha . \sin\beta) = 0,$$

folglich:

$$179\text{b)}\quad C = \frac{n}{l} \cdot G \cdot \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\mu \cdot \sin(\beta + \alpha) - \cos(\beta + \alpha)}.$$

Indem wir nun den Werth 179b) in die Gleichung 179a) setzen, ergiebt sich der Druck, welcher auf Gleiten wirkt. Soll Gleichgewicht vorhanden sein, lediglich durch die passiven Widerstände allein, so mufs dieser Druck Null werden. Die Rechnung in den allgemeinen Werthen giebt für die Lösung sehr komplizirte Ausdrücke. Wir wenden dagegen die eben gefundenen Gesetze beispielsweise auf den Fall an, dafs G die Schwerkraft ist, die Wand DB horizontal, die Wand BC vertikal und $\mu = \mu'$ ist; dann ist $\alpha = 90°$; $\gamma = 90°$ folglich:

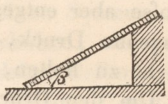


$$180)\quad \begin{cases} C = \frac{n}{l} \cdot G \cdot \frac{1}{\operatorname{tang}\beta + \mu} \\ D = G \cdot \left(1 - \frac{n}{l} \cdot \frac{\mu}{\operatorname{tang}\beta + \mu}\right) \\ K = G \cdot \left(\frac{n}{l} \cdot \frac{1 + \mu^2}{\operatorname{tang}\beta + \mu} - \mu\right). \end{cases}$$

Soll nun das System durch die passiven Widerstände allein im Gleichgewicht sein, so ist $K = 0$, folglich:

$$180\text{a)}\quad \operatorname{tang}\beta = \frac{n}{l} \cdot \frac{1 + \mu^2}{\mu} - \mu.$$

Wenn dagegen der Balken l in den Punkt C nur aufliegen soll, nicht angestützt ist, so ist in den obigen Gleichungen zu setzen $\alpha = 180° - \beta$ und man hat nach Gleichung 179), 179a) und 179b):



$$181)\quad \begin{cases} C = \frac{n}{l} \cdot G \cdot \cos\beta \\ D = G \cdot \left\{1 - \frac{n}{l}\ (\cos\beta^2 + \mu \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta)\right\} \\ K = G \cdot \left\{\frac{n}{l} \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta \cdot (1 + \mu^2) - \mu\right\}. \end{cases}$$

Wenn Gleichgewicht durch die passiven Widerstände allein statt finden soll, so mufs $K = 0$ sein, und dann folgt:

$$181\text{a)}\quad \begin{cases} \sin\beta \cdot \cos\beta = \tfrac{1}{2}\sin 2\beta = \frac{l}{n} \cdot \frac{\mu}{1 + \mu^2} \\ \sin 2\beta = \frac{l}{n} \cdot \sin 2\vartheta, \end{cases}$$

wenn man unter ϑ den Reibungswinkel versteht, und für μ den Werth tang ϑ setzt (Gleichung 166a, S. 203).

2. Quetschwalzen.

Zwei Quetschwalzen von gleichen Halbmessern r bewegen sich gegen einander; die kürzeste Entfernung der Peripherien beider Walzen sei e; es wird ein Stück A, dessen Dicke $ab = \delta$ ist in einer Richtung, die normal zur Centrallinie ist gegen die beiden Walzen geschoben, und zwar mit einem Druck P.

Unter welchen Umständen werden die Walzen das Stück erfassen, und zwischen sich hindurchziehen?

Wir zerlegen den Druck P in zwei parallele Drucke, die durch die Berührungspunkte a und b gehen, und von denen jeder $= \frac{1}{2}P$ ist. Nun haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich:

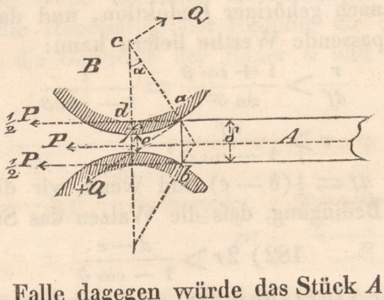
a) entweder das Stück A ist absolut fest, und unterliegt keiner Formveränderung, oder:

b) das Stück A läſst sich komprimiren, und die Dicke desselben ab kann vermindert werden.

Im ersten Falle ist gar keine Vorwärtsbewegung des Stückes A gegen die Walzen möglich, der ganze Druck $\frac{1}{2}P$ wird in jedem Berührungspunkt aufgehoben, und es bildet sich ein Reibungswerth $\mu \cdot \frac{1}{2}P$, in a und b normal zur Richtung von P, dessen Hebelsarm $r \cdot \sin\alpha$ ist, und welcher also mit dem Moment:

$$\mu \cdot \tfrac{1}{2}P \cdot r \cdot \sin\alpha$$

der Drehung jeder Walze entgegenwirkt.



Im andern Falle dagegen würde das Stück A in der Richtung aQ gegen die Walze (selbst wenn dieselbe still stände) abgleiten können; der Druck W, welcher sich der Formveränderung des Stückes in der Richtung ab entgegensetzt ist also nach dieser Richtung und normal dazu zu zerlegen in die beiden Drucke $W . \sin\alpha$ und $W . \cos\alpha$. Dieser letztgenannte Druck wird durch den Widerstand der Walze aufgehoben, erzeugt daher die Reibung $\mu . W . \cos\alpha$, und es bleibt folglich ein Bestreben auf Gleiten, welches sich ausdrückt durch:

$$W . \sin\alpha - \mu . W . \cos\alpha = W . \cos\alpha . (\operatorname{tang}\alpha - \mu).$$

Ist $\operatorname{tang}\alpha > \mu$ so wird das System A mit einem der Richtung aQ entgegengesetzten Druck gegen die Walzen sich verschieben, wenn aber $\operatorname{tang}\alpha \overline{\overline{<}} \mu$ ist, so wird eine Verschiebung des Stückes A gegen die Walze nicht statt finden, das Stück A wird mit der Walze fest zusammenhängen, und es wird daher das Stück A in Ruhe sein, wenn die Walze in Ruhe ist: dagegen mufs das Stück A der Bewegung der Walze folgen, wenn die Walze sich bewegt. Die Bedingung also, unter welcher das Stück A der Bewegung der Walze folgt, ist gegeben durch die Bedingung, dafs

$$\operatorname{tang}\alpha < \mu \text{ oder } \operatorname{cotang}\alpha > \frac{1}{\mu}$$

sei. Nun ist:

$$\operatorname{cotang}\alpha = \frac{cd}{da} = \frac{r - df}{\sqrt{[(2r - df) . df}}.$$

Setzen wir diesen Werth für $\operatorname{cotang}\alpha$ ein, so ergiebt sich als Bedingungs-Gleichung:

$$(r - df)^2 > \frac{1}{\mu^2} . (2r . df - df^2)$$

$$r^2 - 2r . df . \left(1 + \frac{1}{\mu^2}\right) > - df^2 . \left(1 + \frac{1}{\mu^2}\right),$$

und daraus:

$$\frac{r}{df} > \left(1 + \frac{1}{\mu^2}\right) . \left\{1 \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \mu^2}}\right\}.$$

Führen wir anstatt μ den Reibungswinkel ϑ ein, indem wir setzen:

$$\mu = \operatorname{tang}\vartheta,$$

so ergiebt sich nach gehöriger Reduktion, und da nur das positive Zeichen passende Werthe liefern kann:

$$\frac{r}{df} > \frac{1 + \cos\vartheta}{\sin\vartheta^2} = \frac{1}{1 - \cos\vartheta}$$

$$r > \frac{df}{1 - \cos\vartheta},$$

nun ist offenbar $df = \frac{1}{2}(\delta - e)$ und wenn wir dies einsetzen, so ergiebt sich als Bedingung, dafs die Walzen das Stück A mitziehen.

$$182) \quad 2r > \frac{d - e}{1 - \cos\vartheta}$$

d. h. Wenn die Quetschwalzen ein gegen dieselben geführtes Stück erfassen und durchführen sollen, so mufs der Durchmesser der Quetschwalzen gröfser sein, als die Differenz zwischen der Dicke des Stückes und der kürzesten Entfernung der Peripherieen der Walzen, dividirt durch den Sinus versus des Reibungswinkels.

Setzen wir voraus, dafs kein Gleiten zwischen den Berührungspunkten a und b und den Walzen statt finden kann, so ist das Stück A und die Walzen als ein zusammenhängendes System zu betrachten; reduziren wir nun das Kräftepaar, welches auf Drehen jeder Walze wirkt auf die beiden Kräfte $+Q$ und $-Q$, so würden die Punkte a und b als Angriffspunkte der Kräfte $+Q$ auf das Stück A zu betrachten sein, und wenn wir die Kraft Q in dem Punkte a in die beiden Komponenten $Q.\cos\alpha$ und $Q.\sin\alpha$ zerlegen, so wirkt in dem Punkte A die Kraft:

$$Q.\cos\alpha + \tfrac{1}{2}P$$

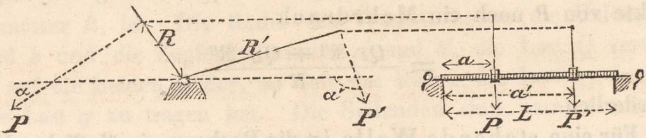
auf unterziehen des Stückes A nach der Richtung der Walzen, und die Kraft:

$$Q.\sin\alpha,$$

welche durch die ihr gleiche und entgegengesetzte Kraft $-Q.\sin\alpha$ in dem Punkte b im Gleichgewicht gehalten wird, nimmt die Festigkeit des Stückes auf Zerdrücken in Anspruch. Diese Kraft mufs gröfser sein, als die Kraft mit welcher das System A einer Formveränderung widersteht.

3. Axenreibung.

Auf einer liegenden Welle, die in zwei Lagern geht, und deren Länge l ist, sitzen zwei Räder von den Halbmessern R und R' in Entfernungen a und a' von dem einen Endpunkte; an den Peripherieen der Räder wirken die Drucke P und P' in Ebenen, die normal zur Welle sind, aber so, dafs die Drucke mit einer horizontalen, zu der Welle normalen Koordinatenaxe die Winkel α und α' bilden; die Hebelsarme der Reibung für die Wellenzapfen sind $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$; die Gewichte der Räder G und G', das Gewicht der Welle G''.



Das System soll sich im Sinne des Druckes P drehend bewegen, welches ist das statische Moment der Reibung? welches das auf Drehung wirkende Moment?

Wir haben es hier mit einem System mit fixer Axe zu thun und reduziren die Drucke zunächst auf die fixen Punkte, indem wir durch den ersten fixen Punkt eine horizontale (erste) zur Welle normale und eine vertikale (zweite) Axe annehmen. Wir haben mit Rücksicht auf Gleichung 142b), § 79:

$$183)\quad \begin{cases} Q_I' = \dfrac{P.\cos\alpha.(L-a) + P'.\cos\alpha'.(L-a')}{L} \\ Q_I'' = \dfrac{(P.\sin\alpha + G).(L-a) + (P'.\sin\alpha' + G').(L-a')}{L} + \frac{1}{2}G''. \end{cases}$$

$$183\text{a})\quad \begin{cases} Q_{II}' = \dfrac{P.\cos\alpha.a + P'.\cos\alpha'.a'}{L} \\ Q_{II}'' = \dfrac{(P.\sin\alpha + G).a + (P'.\sin\alpha' + G').a'}{L} + \frac{1}{2}G. \end{cases}$$

Hieraus folgt, dafs der resultirende Druck im ersten fixen Punkt ist:

$$183\text{b})\quad Q_I = \sqrt{(Q_I'^2 + Q_I''^2)}$$

und im zweiten fixen Punkt:

$$183\text{c})\quad Q_{II} = \sqrt{(Q_{II}'^2 + Q_{II}''^2)}.$$

Hiernach ist das statische Moment der Reibung:

$$183\text{d})\quad \mathfrak{R}'.Q_I + \mathfrak{R}'.Q_{II}$$

und das auf Drehung wirkende Moment:

$$184)\quad P.R - (P'.R' + Q_I.\mathfrak{R}' + Q_{II}.\mathfrak{R}'').$$

An der Grenze des drehenden Gleitens ist dies Moment gleich Null, wir nennen den Werth von P, welcher dem Grenzzustand des Gleitens entspricht P_0, und es ergiebt sich demnach:

$$184\text{a})\quad \begin{cases} P_0 = \dfrac{P'.R' + Q_I.\mathfrak{R}' + Q_{II}.\mathfrak{R}''}{R} \\ \quad = P'.\dfrac{R'}{R} + \dfrac{Q_I.\mathfrak{R}' + Q_{II}.\mathfrak{R}''}{R}. \end{cases}$$

Mit Vernachlässigung der Zapfenreibung würde man nur haben für den Zustand des Gleichgewichts:

$$P_0 = P'.\frac{R'}{R}$$

es ist folglich zur Ueberwindung der Zapfenreibung im Angriffspunkte von P noch ein Mehrdruck

$$= \frac{Q_I.\mathfrak{R}'' + Q_{II}.\mathfrak{R}''}{R}$$

erforderlich.

Für eine stehende Welle ist die Rechnung in ähnlicher Weise durchzuführen. Man hat anzunehmen, dafs der untere Zapfen den ganzen Vertikaldruck auszuhalten hat.

Wenn die Richtungen von P und P' vertikal, und die Hebelsarme der Reibung für beide Zapfen gleich grofs sind, so hat man $\alpha = \alpha' = 90^\circ$, und man hat in den beiden fixen Punkten nur Vertikaldrucke, nämlich:

$$184\text{a)}\quad \begin{cases} Q_I = \dfrac{(P+G).(L-a)+(P'+G').(L-a')}{L} + \tfrac{1}{2}G'' \\[2ex] Q_{II} = \dfrac{(P+G).a+(P'+G').a'}{L} + \tfrac{1}{2}G'' \end{cases}$$

$$\text{und } Q_I + Q_{II} = P + P' + G + G' + G'' = Q,$$

folglich:

das statische Moment der Reibung:

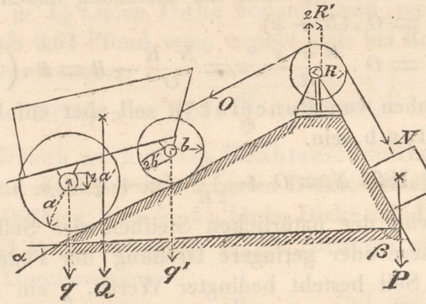
$$\mathfrak{R}\,.\,Q,$$

und daher der Werth von P an der Grenze des Gleichgewichts:

$$P = P'\,.\,\frac{R'}{R} + Q\,.\,\frac{\mathfrak{R}}{R}.$$

Gleichgewicht an der Rolle — Steifheit der Seile; Gleichgewicht auf zwei geneigten Ebenen — Wagenrollen.

§ 103. Es seien zwei geneigte Ebenen gegeben, deren Neigungswinkel gegen die Horizontale α und β sind, auf der einen bewegt sich ein Wagen, dessen Ladung Q ist, auf der andern ein gleitendes Gewicht P. Beide sind durch ein Seil verbunden, das über eine Rolle vom Halbmesser R geht, die in Zapfen ruht, deren



Halbmesser $R_{\prime}$ ist. Die Räder des Wagens haben die Halbmesser a und b und die Zapfenhalbmesser a' und b', die Last Q vertheilt sich auf die beiden Räder, so dafs das Rad a die Last q, das Rad b die Last q' zu tragen hat. Die Seilenden sind parallel mit den geneigten Ebenen.

Unter welchen Bedingungen ist das System im Grenzzustande des Gleichgewichts?

1. Gleichgewicht an der Rolle.

Die Spannungen der Seilenden seien N und O. Wir wollen annehmen, dafs die Bewegung im Sinne des Gewichtes P oder der

Spannung N eintreten könne, und nennen dann die Spannung N die **Kraft**, die Spannung O dagegen die **Last.**

Wäre das Seil vollkommen biegsam, so würde die Kraft und die Last jede an einem Hebelsarm wirken, der gleich R ist. Erfahrungsmäfsig aber bewirkt der Widerstand, den die Steifheit des Seils bei dem Auflegen auf die Rolle darbietet, dafs sich dasselbe ein wenig von der Rolle absperrt und auf diese Weise den Hebelsarm der Last vergröfsert. Dieser gröfsere Werth des Hebelsarms der Last sei $(R + x)$. Nach Versuchen von Eytelwein ist $x = \frac{\delta^2}{2}$ zu setzen, wenn man unter δ den Durchmesser des Seils in Zollen, unter R den Halbmesser der Rolle in Fufsen versteht, oder

$$185)\quad x = \frac{1}{3500} \cdot \delta^2$$

wenn δ in preufsischen Linien,
R in preufsischen Fufsen

genommen wird.

Man würde also mit Vernachlässigung der Zapfenreibung für den Zustand des Gleichgewichts die Gleichung haben:

$$185\text{a})\quad \begin{cases} N \cdot R = O \cdot (R + x) \\ N = O \cdot \frac{R + x}{R};\ x = \frac{N \cdot R}{O} - R = R \cdot \left(\frac{N}{O} - 1\right). \end{cases}$$

Nach Angaben von Poncelet*), soll aber zufolge von Versuchen von Coulomb sein.

$$186)\quad N = O + \frac{\delta^\psi}{2R} \cdot (\varphi + \chi \cdot O)$$

worin φ ein von der natürlichen Steifheit des Seils abhängiger, durch die gröfsere oder geringere Drehung der Fäden und Litzen aus denen das Seil besteht bedingter Werth, χ ein ebenfalls konstanter, auf die Zunahme der Steifheit durch die Belastung O sich beziehender Koeffizient, und ψ ein Exponent der sich mit dem augenblicklichen Zustande des Seils ändert, sein soll. Hiernach würde man haben, indem man den Werth N in die Gleichung:

$$x = R \cdot \left(\frac{N}{O} - 1\right)$$

einsetzt:

$$186\text{a})\quad x = \frac{\delta^\psi}{2} \cdot \left(\frac{\varphi}{O} + \chi\right).$$

---

*) Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen von J. V. Poncelet, deutsch herausgegeben von Dr. C. H. Schnuse I, § 197.

Wenn man δ in preufsischen Linien und R in preufsischen Fufsen, O in preufsischen Pfunden nimmt, so ergiebt sich nach den Coulomb'schen Versuchen:

$$\text{für neue Seile } x = \delta^{1,74} \cdot \left(\frac{1,19}{O} + 0,05\right)$$

$$\text{für alte Seile } x = \delta^{1,4} \cdot \left(\frac{0,57}{O} + 0,012\right).$$

Nach den Versuchen von Weisbach, welche derselbe in seiner Ingenieur und Maschinen-Mechanik Th. I, § 181 mittheilt, berechnet sich unter denselben Voraussetzungen der Maafs- und Gewichtseinheiten:

1) Für ein getheertes Hanfseil von 19,2 Linien Stärke, gelegt um Scheiben von 4 bis 6 Fufs Durchmesser:

$$187)\quad x = 3,2 \cdot \frac{R}{O} + 0,018;$$

2) für ein neues ungetheertes Hanfseil von 9 Linien Stärke und eine Rolle von $1\frac{3}{4}$ Fufs Durchmesser:

$$187\text{a})\quad x = 0,18 \cdot \frac{R}{O} + 0,0052;$$

3) für ein Drahtseil von 8 Linien Dicke, welches aus 16 Drähten von je $1\frac{1}{2}$ Linien Dicke bestand, und wovon jeder laufende Fufs 0,64 Pfund wog, ergiebt sich bei Rollen von 4 bis 6 Fufs Durchmesser:

$$187\text{b})\quad x = 1,04 \cdot \frac{R}{O} + 0,0067;$$

4) für ein frisch getheertes Drahtseil mit Hanfseelen in den Litzen und im Seile, von 7 Linien Dicke, bestehend aus 4 mal 4 = 16 Drähten von je $1\frac{1}{5}$ Linie Dicke, und pro laufenden Fufs 0,63 Pfund wiegend, ergiebt sich bei einer Rolle von $1\frac{3}{4}$ Fufs Durchmesser:

$$187\text{c})\quad x = 1,30 \cdot \frac{R}{O} + 0,00022.$$

Nachdem auf die eine oder die andere Weise der Werth von x bestimmt ist, ergiebt sich das Moment der Last $= O(\mathfrak{R} + x)$.

Die Spannung N hat aber aufser dem Moment der Last O noch dasjenige der Reibung zu überwinden. Nennen wir den, aus der Form des Zapfens und des Bogens zu bestimmenden, Hebelsarm der Reibung $\mathfrak{R}$ (§ 98, S. 203), und den Reibungswerth Θ, so ist das Moment der Reibung $\Theta\mathfrak{R}$, folglich habeu wir die Gleichung für den Grenzzustand der Bewegung:

$$188)\quad NR = O(R + x) + \Theta\mathfrak{R},$$

oder da offenbar die Resultirende aus dem Druck N und dem Druck

O der „Reibung erzeugende Druck" ist, die Richtungen von N und O, wie eine leichte Betrachtung der Figur zeigt, einen Winkel einschliefsen, der gleich $(\beta - \alpha)$ ist, so ist:

$$188\text{a})\quad \Theta = \mu \,.\, \sqrt{\left\{N^2 + O^2 + 2N.O.\cos(\beta - \alpha)\right\}}\,.$$

Indem wir diesen Werth in die vorige Gleichung einsetzen, $O(R + x)$ auf die linke Seite schaffen, dann beide Seiten quadriren und nach N auflösen, ergiebt sich:

$$188\text{b})\quad N = O.\frac{R.(R+x)+\mu^2.\mathfrak{R}^2.\cos(\beta-\alpha)}{R^2-\mu^2.\mathfrak{R}^2}\,.\left\{1 \pm \sqrt{\left[1 - \frac{[R^2-\mu^2.\mathfrak{R}^2].[(R+x)^2-\mu^2.\mathfrak{R}^2]}{[R.(R+x)+\mu^2.\mathfrak{R}^2.\cos(\alpha+\beta)]^2}\right]}\right\}.$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen wird in dem am häufigsten vorkommenden Fällen sehr klein, so dafs man ihn vernachlässigen kann. Die Gleichung für N geht dann über in:

$$188\text{c})\quad N = O\,.\,\frac{R.(R + x) + \mu^2.\mathfrak{R}^2.\cos(\beta - \alpha)}{R^2 - \mu^2.\mathfrak{R}^2}.$$

Diese Gleichung giebt das Verhältnifs zwischen N und O für den Grenzzustand des Gleichgewichts. Nun ist aber offenbar:

$$N = P\,.\,[\sin(180 - \beta) - \mu\,.\,\cos(180 - \beta)].$$

$$188\text{d})\quad N = P\,.\,(\sin\beta + \mu\,.\,\cos\beta) = P\,.\,\cos\beta\,.\,(\operatorname{tang}\beta + \mu)$$

und O ist durch folgende Betrachtung zu finden:

2. Gleichgewicht des Wagens auf der geneigten Ebene.

Die Drucke q und q', welche jede der Wagenaxen zu tragen hat, zerlegen wir parallel mit der geneigten Ebene und normal dazu; es ergiebt sich:

parallel mit der geneigten Ebene

$$q\,.\,\sin\alpha \text{ und } q'\,.\,\sin\alpha,$$

normal zu derselben

$$q\,.\,\cos\alpha \text{ und } q'\,.\,\cos\alpha.$$

Die letztgenannten Drucke werden durch den Widerstand des fixen Systems aufgehoben, sie erzeugen aber Reibungswiderstände in den Axen, deren Momente (wenn man den Hebelsarm der Reibung nach Gleichung 169d, S. 211, gleich dem Halbmesser der Rollen setzt), sich ausdrücken durch:

$$\mu'\,.\,q\,.\,\cos\alpha\,.\,a' \text{ und } \mu'\,.\,q'\,.\,\cos\alpha\,.\,b'$$

indem man nämlich unter μ' den Reibungs-Koeffizienten für die Axreibung versteht. Die Kräftepaare, die durch diese Momente dargestellt werden, lassen sich auf zwei parallele und entgegengesetzte Kräfte zurückführen, die parallel mit der betreffenden geneigten Ebene sind, und von denen die eine durch den Mittelpunkt der Räder, die andere durch den Berührungspunkt derselben geht. Diese Drucke wirken dem Rollen entgegen, müssen also von der Spannung O überwunden werden, sie sind, absolut betrachtet:

$$\mu' . q . \cos\alpha . \frac{a'}{a} \text{ und } \mu' . q' . \cos\alpha . \frac{b'}{b} .$$

Wenden wir nun die Gesetze des Rollens an, so ist der Druck, welcher im Mittelpunkt der Axe wirksam, parallel mit der geneigten Ebene dem Aufwärtsrollen widersteht, nach Gleichung 178b S. 227, und wenn wir die Richtung aufwärts als positiv betrachten, in jedem Rade:

$$189)\quad -\frac{q . \sin\alpha . a}{a} - \frac{q . \cos\alpha . \chi}{a} \text{ und } -\frac{q' . \sin\alpha . b}{b} - \frac{q' . \cos\alpha . \chi}{b},$$

wobei die rollende Reibung, die dem Rollen immer entgegenwirkt, mit entsprechendem Vorzeichen genommen ist. Soll nun der Druck O dem Grenzzustande für eine Bewegung des Wagens aufwärts entsprechen, so mufs sein:

$$189\text{a})\quad O - \Big(\mu' . q . \cos\alpha . \frac{a'}{a} + \mu' . q' . \cos\alpha . \frac{b'}{b} + \frac{q . \sin\alpha . a}{a}$$
$$+ \frac{q . \cos\alpha . \chi}{a} + \frac{q' . \sin\alpha . b}{b} + \frac{q' . \cos\alpha . \chi}{b}\Big) = 0.$$

Daher:

$$189\text{b})\quad O = \frac{q}{a} . [\cos\alpha . (\mu' . a' + \chi) + a . \sin\alpha] + \frac{q'}{b} . [\cos\alpha . (\mu' . b' + \chi) + b . \sin\alpha].$$

Wenn sämmtliche Räder gleiche Halbmesser und gleiche Zapfenhalbmesser haben, so folgt, mit Rücksicht darauf, dafs $q + q' = Q$ ist:

$$189\text{c})\quad O = \frac{Q}{a} . [\cos\alpha\, (\mu' . a' + \chi) + a . \sin\alpha].$$

Setzt man diesen letzten Werth, den wir der Kürze wegen beibehalten wollen, in den Werth für N (Gleichung 188c), so ergiebt sich schliefslich, mit Rücksicht auf Gleichung 188d):

$$190)\quad \frac{P}{Q} = \frac{[\cos\alpha . (\mu' . a' + \chi) + a . \sin\alpha]\ [R . (R + x) + \mu^2 . \mathfrak{R}^2 . \cos(\beta - \alpha)]}{a . (R^2 - \mu^2 . \mathfrak{R}^2) . \cos\beta . (\operatorname{tang}\beta + \mu)}.$$

Mit Vernachlässigung aller passiven Widerstände würde sich ergeben:

$$190\text{a})\quad \frac{P}{Q} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Wäre der Wagen auf der geneigten Ebene frei, und könnte durch seine Ladung Q herabrollen, so wäre der Druck, welcher auf Herabrollen wirkt, wie sich leicht entwickeln läfst, indem man die Gesetze des Rollens (§ 101) und die vorige Entwickelung beachtet:

$$191)\ \begin{cases} Q_{(e)} = \dfrac{Q}{a} \cdot [a.\sin\alpha - \cos\alpha \cdot (\mu'.a' + \chi)] \\ \quad = Q \cdot \cos a \cdot \left(\operatorname{tang}\alpha - \dfrac{\mu'.\alpha + \chi}{a}\right). \end{cases}$$

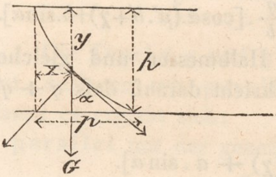
Ist nun $J_{,} = M' \cdot \varrho_{,}^2$ das Trägheitsmoment der Räder, und M die Gesammtmasse des ganzen Systems, so ist nach Gleichung 177) das Aenderungsmaafs der fortschreitenden Bewegung:

$$191\,a)\ \begin{cases} f = Q \cdot \cos\alpha \cdot \left(\operatorname{tang}\alpha - \dfrac{\mu'.a' + \chi}{a}\right) \cdot \dfrac{a^2}{J_{,} + M \cdot a^2} \\ \quad = g \cdot \dfrac{\cos\alpha \cdot \left(\operatorname{tang}\alpha - \dfrac{\mu'.a' + \chi}{a}\right)}{1 + \dfrac{J_{,}}{M \cdot a^2}} \end{cases}$$

indem man nämlich $Q = Mg$ setzt.

Reibungswiderstände beim Gleiten eines festen Systems auf einer Kurve, unter Einwirkung der Schwere.

§ 104. Denken wir ein festes System, welches durch die Schwere gleitet. Die Gleichung der Kurve sei für horizontale und vertikale Koordinatenaxen gegeben, und es mögen y die vertikalen Ordinaten bedeuten. Zerlegen wir das Gewicht des Systems nach der Tangente zur Kurve und normal dazu, so ist die Kraft, mit welcher das Stück gleitet nach § 97. S. 202



$$G \cdot \cos\alpha - \mu \cdot G \cdot \sin\alpha,$$

wenn α der Winkel ist, welcher die Tangente zur Kurve mit der Richtung der Schwere macht. Es ist folglich die Arbeit, welche die Schwere verrichtet, indem das Stück das Kurvenelement ds durchläuft:

$$G \cdot (ds \cdot \cos\alpha - \mu \cdot ds \cdot \sin\alpha).$$

Nun ist aber offenbar $ds \cdot \cos\alpha = dy$ und $ds \cdot \sin\alpha$, ist die Projektion des Kurvenelementes auf die Horizontalebene; bezeichnen wir dieses Projektionselement mit dp, so ist das Leistungselement:

$$G \cdot (dy - \mu \cdot dp),$$

folglich die Gesammtleistung:

$$G \int (dy - \mu \cdot dp),$$

welches Integral zwischen den entsprechenden zusammengehörigen Werthen von y und p zu nehmen ist. Sind x' und p' und x'' und

p'' solche zusammengehörigen Werthe, so ist die Leistung der Schwere auf das bewegliche System, indem dasselbe aus der einen Lage in die andere übergeht.

$$192)\quad G\int(dy-\mu.dp)=G.(y'-y'')-\mu.G.(p'-p'')$$
$$=G.[y'-y''-\mu.(p'-p'')].$$

Diese Gleichung drückt folgendes merkwürdige Gesetz aus:

Wenn ein festes System durch die Schwere bewegt aus einer horizontalen Ebene in eine andere übergeht, indem es auf einer beliebigen Kurve gleitet, so ist die Arbeit der gleitenden Reibung immer gleich dem Produkt aus dem Gewicht, multiplizirt mit dem Reibungs-Koeffizienten und der Projektion des durchlaufenen Kurvenstückes auf eine Horizontalebene.

Ist v'' die Geschwindigkeit, welche das System in dem Punkte besitzt, dessen vertikale Ordinate y'' ist, und v' die Geschwindigkeit des Systems in dem Punkte, dessen vertikale Ordinate y' ist, so hat man nach Gleichung 49):

$$G.(y'-y'')-\mu.G.(p'-p'')=\tfrac{1}{2}M.(v'^2-v''^2),$$

folglich (da $G=Mg$ ist):

$$192a)\quad\begin{cases}(y'-y'')=\dfrac{v'^2-v''^2}{2g}+\mu.(p'-p'')\\ v'=\sqrt{\{2g.[y'-y''-\mu.(p'-p'')]+v''^2\}}.\end{cases}$$

Durch diese Gleichungen kann man die Höhe finden $(y'-y'')$, welche einer gegebenen Endgeschwindigkeit v' entspricht, oder die Endgeschwindigkeit v', welche einer gewissen Fallhöhe $(y'-y'')$ entspricht.

Die Höhe $y'-y''$ pflegt man die **Geschwindigkeitshöhe** zu nennen; durch die Reibung wird die Geschwindigkeitshöhe um das Stück $\mu(p'-p'')$ vermindert. Dieses Stück nennt man den **Verlust an Geschwindigkeitshöhe**, und es folgt hieraus der Satz:

Wenn ein System durch die Schwere bewegt gleitend von einem höher gelegenen Punkte in einen tiefer gelegenen hinabsinkt, so ist der Verlust an Geschwindigkeitshöhe gleich dem Reibungs-Koeffizienten multiplizirt mit der Horizontalprojektion des gleitend durchlaufenen Weges, und es ist dabei ganz gleichgiltig, welche Form dieser Weg selbst hat.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeitshöhe oder den Vertikal-abstand der beiden Punkte mit h, die Projektion des durchlaufenen Weges auf eine Horizontalebene mit p, so gehen die Gleichungen über in:

$$192b)\left\{\begin{array}{l} L\ (\text{Leistung}) = G\,.\,(h - \mu p) \\ h = \dfrac{v'^2 - v''^2}{2g} + \mu p \\ v' = \sqrt{\left\{2g\,.\,(h-\mu p) + v''^2\right\}}. \end{array}\right.$$

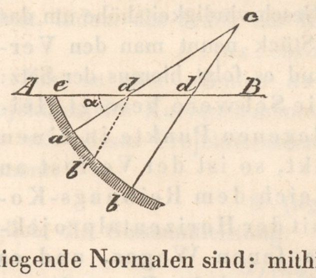
Wenn dagegen ein festes System der Schwere entgegen sich mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit v'' aufwärts bewegt, so ergiebt sich leicht die Steighöhe:

$$192c)\left\{\begin{array}{l} h = \dfrac{v''^2 - v'^2}{2g} - \mu p \\ \text{und die Geschwindigkeit in einer gewissen Höhe} \\ v' = \sqrt{\left\{v''^2 - 2g\,.\,(h+\mu p)\right\}}. \end{array}\right.$$

Reibungswiderstände beim Gleiten eines festen Systems auf einer Kurve, wenn dasselbe mit einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit sich bewegt, und sonst keine bewegenden Kräfte auf dasselbe einwirken.

§ 105. Gestalten wir nunmehr die Aufgabe anders: Es bewege sich ein festes System ohne Einwirkung der Schwere auf einer beliebigen Kurve, indem es in irgend einem Punkte der Kurve die Tangentialgeschwindigkeit c hat: welchen Einfluſs hat die Reibung auf die Aenderung der Geschwindigkeit c, wenn auch sonst keine bewegenden Kräfte auf das System einwirken?

Es sei in nebenstehender Figur $ds = ab$ ein beliebiges Element der Kurve; ac und bc seien Normalen im Anfangs- und Endpunkte dieses unendlich kleinen Elementes, so ist der Durchschnittspunkt dieser beiden Normalen der Mittelpunkt des Krümmungskreises des Elementes; den veränderlichen Winkel, welchen die Normalen zur Kurve mit einer beliebigen Axe z. B. AB bilden, nennen wir α, dann ist Winkel $ed'b = edb' = \alpha + d\alpha$, da ad und bd zwei unendlich nahe liegende Normalen sind: mithin ist Winkel $adb' = acb = d\alpha$.



Nun können wir die Bewegung in dem Kurvenelement hervorgebracht denken durch eine Normalkraft, welche das gleitende Stück gegen die Kurve preſst, durch den Widerstand derselben aufgehoben wird, folglich Reibung erzeugt, und durch eine Tangentialkraft. Die Normalkraft ist $\frac{M.c^2}{r}$ folglich die Reibung $= \frac{\mu M.c^2}{r}$, wenn r den Krümmungshalbmesser der Kurve bezeichnet. Dieser Reibungswerth ist als eine, normal zum Krümmungshalbmesser, also tangential wirkende, und die Geschwindigkeit c im Kurvenelement verzögernde Kraft zu denken, das Aenderungsmaaſs der Geschwindigkeit, welches diese Kraft bedingt, ist daher in Bezug auf die Geschwindigkeit c negativ zu nehmen, und es ist also

$$f = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = -\frac{\mu.c^2}{r}.$$

Nun ist aber das Element der Geschwindigkeitsänderung auch gleich $f.dt$, und folglich haben wir

$$dc = f.dt = -\frac{\mu.c^2}{r}.dt,$$

da aber $dt = \frac{ds}{c}$, ferner $ds = r.d\alpha$ ist, so ergiebt sich, durch Einsetzung und nach gehöriger Umformung:

$$\frac{dc}{c} = -\mu.d\alpha,$$

und indem wir auf beiden Seiten integriren, ergiebt sich:

$$\int\frac{dc}{c} = -\mu\int d\alpha.$$

Nehmen wir das Integral rechts zwischen bestimmten Grenzen, so muſs auch das Integral links zwischen entsprechenden Grenzen gelten.

Wenn nun in irgend einem Punkte der Kurve, dessen Normale mit einer beliebig angenommenen Linie den Winkel α' bildet, die Geschwindigkeit des beweglichen Systems c' ist, und in irgend einem andern Punkte der Kurve bilde die Normale mit derselben Linie den Winkel α'', so findet sich die in diesem Punkte statt findende Geschwindigkeit durch die Gleichung:

$$\int_{c=c''}^{c=c'}\frac{dc}{c} = -\mu\int_{\alpha=\alpha''}^{\alpha=\alpha'} da$$

$$\log \text{nat}\, c'' - \log \text{nat}\, c' = -\mu.(\alpha'' - \alpha')$$

$$193)\left\{\begin{aligned} &\log \text{nat}\frac{c'}{c''} = \mu.(\alpha'' - \alpha') \\ &\frac{c'}{c''} = e^{\mu.(\alpha''-\alpha')} \\ &c'' = \frac{c'}{e^{\mu.(\alpha''-\alpha')}} \end{aligned}\right.$$

In diesen Gleichungen bezeichnet c' die Geschwindigkeit in der Tangente zur Kurve in einem Punkte dessen Normale den Winkel α' mit einer beliebigen Linie macht; c'' die Geschwindigkeit, welche das gleitende System in einem andern Punkte besitzt, dessen Normale mit derselben Linie den Winkel α'' macht, wenn die Geschwindigkeitsänderung lediglich durch die Reibung bewirkt worden ist; e die Basis der natürlichen Logarithmen.

Ist die Kurve eine ebene Kurve, und nimmt man die Linie von welcher aus die Winkel α' und α'' gemessen sind in derselben Ebene, so ist $\alpha'' - \alpha'$ der Winkel, welchen die beiden Normalen zur Kurve am Anfange und am Ende des betrachteten Weges mit einander bilden.

Die Arbeit der Reibung drückt sich offenbar aus durch

$$\frac{1}{2}M.(c''^2 - c'^2) = -\frac{1}{2}M.(c'^2 - c''^2)$$

und indem wir für c'' den oben gefundenen Werth setzen

193a) $$= -\frac{1}{2}M.c'^2.\left(1 - \frac{1}{e^{2\mu.(\alpha''-\alpha')}}\right) = -\frac{1}{2}M.c'^2.\frac{e^{2\mu.(\alpha''-\alpha')} - 1}{e^{2\mu.(\alpha''-\alpha')}}.$$

Hierin liegt folgendes Gesetz:

> Wenn ein festes System in einer Kurve gleitet, ohne dafs bewegende Kräfte auf dasselbe ferner einwirken, so ist die durch die Reibung konsumirte Arbeit, indem das System einen gegebenen Bogen der Kurve durchläuft proportional der Masse und dem Quadrat der Geschwindigkeit zu Anfang dieses Bogens und aufserdem eine logarithmische Funktion des Produkts aus dem Reibungs-Koeffizienten und der Differenz der Winkel, welche die Normalen im Anfangs- und im Endpunkt des Bogens mit einer gegebenen Linie bilden; im Uebrigen aber unabhängig von der Form der Kurve.

Aus der Gleichung $\frac{c'}{c''} = e^{\mu.(\alpha''-\alpha')}$

folgt auch, dafs bei einer gegebenen Kurve das Verhältnifs der Anfangsgeschwindigkeit zur Endgeschwindigkeit ein konstanter Werth ist, unabhängig von dem Werthe der Geschwindigkeiten, und nur abhängig von den Winkeln, welche die erste und letzte Normale mit einer gegebenen Linie bilden. Sind diese Normalen der Lage nach gegeben, so ist für alle äquidistanten Kurven zwischen denselben Krümmungsradien dies Verhältnifs constant.

Es versteht sich übrigens ganz von selbst, dafs diese Betrachtungen nur Giltigkeit haben können für solche Kurvenstücke, für welche die Integrationen zulässig sind, und dafs sie daher **nicht gelten können, wenn innerhalb des betrachteten Bogenstücks ein Wendepunkt der Kurve liegt.**

Die Untersuchungen der §§ **104** u. **105**, welche, soviel dem Verfasser bekannt ist, zwei bisher noch nicht aufgestellte Gesetze ergeben haben, dürften geeignet sein, auf die Theorie der Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen, namentlich in gekrümmten Röhren Anwendung zu finden.

Tabellen über die Reibungs-Koeffizienten.

§ 106. I. Reibung ebener Flächen, nachdem sie einige Zeit mit einander in Berührung gewesen sind.

Berührungsflächen.	Lage der Fasern.	Zustand der Flächen.	Reibungs-Koeffizient μ.	Reibungswinkel ϑ.
Versuche von Morin.				
Eichenholz auf Eichenholz	parallel	trocken	0,62	31° 48′
	parallel	mit trockener Seife abgerieben	0,44	23 45
	rechtwinklig	trocken	0,54	28 22
	rechtwinklig	mit Wasser benetzt	0,71	35 23
	Hirnholz des einen auf dem Längenholze des anderen	trocken	0,43	23 16
Eichenholz auf Ulmenholz	parallel	trocken	0,38	20 49
Ulmenholz auf Eichenholz	parallel	trocken	0,69	34 37
	parallel	mit trockener Seife abgerieben	0,41	22 18
	rechtwinklig	trocken	0,57	29 41
Eschen-, Tannen-, Buchen- und Ebereschenholz auf Eichenholz	parallel	trocken	0,53	27 56
Lohgares Leder auf Eichenholz	das Leder platt	trocken	0,61	31 23
	das Leder auf der hohen Kante	trocken	0,43	23 16
		mit Wasser benetzt	0,79	38 19
Schwarzes Riemenleder auf einer ebenen Fläche von Eichenholz	parallel	trocken	0,74	36 30
Schwarzes Riemenleder auf einer Trommel von Eichenholz	rechtwinklig	trocken	0,47	25 11
Geflochtener Hanf auf Eichenholz	parallel	trocken	0,50	26 34
	parallel	mit Wasser benetzt	0,87	41 2
Hanfne Seile auf Eichenholz	parallel	trocken	0,80	38 40
Schmiedeeisen auf Eichenholz	parallel	trocken	0,62	31 48
	parallel	mit Wasser benetzt	0,65	33 2
Gufseisen auf Eichenholz	parallel	mit Wasser benetzt	0,65	33 2
Messing auf Eichenholz	parallel	trocken	0,62	31 48
Liderung eines Kolbens von Rindleder auf Gufseisen	platt oder auf der hohen Kante	mit Wasser benetzt	0,62	31 48
		mit Oel, Talg oder Schweinefett	0,12	6 51
Schwarzes Riemenleder auf einer gufseisernen Rolle	platt	trocken	0,28	15 39
		mit Wasser benetzt	0,38	20 49
Gufseisen auf Gufseisen	. . . .	trocken	0,16 *	9 6
Schmiedeeisen auf Gufseisen	. . . .	trocken	0,19	10 46
Eichenholz, Ulmenholz, Hainbuchenholz, Schmiedeeisen, Gufseisen und Bronze, je zwei aufeinander	. . . .	mit Talg	0,10 **	5 43
		mit Oel oder Schweinefett	0,15 †	8 32

*) Die Flächen blieben etwas fettig.
**) Wenn die Berührung nicht lange genug gedauert hatte, um das Fett auszupressen.
†) Wenn die Berührung so lange gedauert hatte, dafs das Fett ausgeprefst war.

Berührungsflächen.	Reibungs-Koeffizient μ.	Reibungswinkel ϑ.
Versuche von Morin.		
Oolith auf Oolith	0,74	36° 30′
Muschelkalk auf Oolith	0,75	36 52
Ziegelstein auf Oolith	0,67	33 50
Eichenholz auf Oolith, das Holz vor Hirn	0,63	32 13
Schmiedeeisen auf Oolith	0,49	26 7
Muschelkalk auf Muschelkalk	0,70	35 0
Oolith auf Muschelkalk	0,75	36 52
Ziegelstein auf Muschelkalk	0,67	33 50
Schmiedeeisen auf Muschelkalk	0,42	22 47
Eichenholz auf Muschelkalk	0,64	32 38
Oolith auf Oolith, mit einer Zwischenlage von Mörtel, bestehend aus drei Theilen feinem Sande und einem Theile hydraulischem Kalk	0,74*)	36 30
Weicher Kalkstein auf weichem Kalksteine, gut behauen	0,74	36 30
Harter Kalkstein auf dito, dito	0,75	36 52
Gewöhnlicher Ziegelstein auf dito, dito	0,67	33 50
Eichenholz, vor Hirn, auf dito, dito	0,63	32 13
Schmiedeeisen auf dito, dito	0,49	26 7
Harter Kalkstein auf hartem Kalksteine, gut behauen	0,70	35 0
Weicher Kalkstein auf dito, dito	0,75	36 52
Gewöhnlicher Ziegelstein auf dito, dito	0,67	33 50
Eichenholz, vor Hirn, auf dito, dito	0,64	32 37
Schmiedeeisen auf dito, dito	0,42	22 47
Weicher Kalkstein auf weichem Kalksteine mit frischem Mörtel	0,74	36 30
Versuche von verschiedenen anderen Beobachtern.		
Weicher Quadersandstein auf demselben (Rennie) . .	0,71	35 23
derselbe auf demselben, mit frischem Mörtel (Rennie)	0,66	33 26
Harter, polirter Kalkstein auf demselben . . .	0,58	30 7
Kalkstein auf Kalkstein, beide Flächen mit dem Meifsel rauh gemacht (Bonchardi)	0,78	37 58
Gut bearbeiteter Granit auf rauhem Granit (Rennie) .	0,66	33 26
derselbe mit frischem Mörtel (Rennie) .	0,49	26 7
Hölzerner Kasten auf Steinpflaster (Regnier)	0,58	30 7
derselbe auf geschlagener Erde (Herbert) . .	0,33	18 16
Grob behauener Werkstein auf einer Unterlage von Thon	0,51	27 2
dito dito der Thon feucht und milde	0,34	18 47
dito dito der Thon feucht und mit dickem Sande bedeckt (Grève)	0,40	21 48

*) Nach einer Berührung von 10 bis 15 Minuten.

II. Reibung der Zapfen oder Axen auf ihren Lagern im Zustande der Bewegung.

Nach den Versuchen von Morin.

Berührungsflächen.	Zustand der Flächen.	Reibungs-Koeffizient μ, wenn die Schmiere erneuert wird:		Reibungswinkel ϑ.
		in der gewöhnlichen Weise.	ununterbrochen.	
Gußeiserne Axen auf gußeisernen Lagern	mit Baumöl, Schweinefett, Talg u. dünner Wagenschmiere bestrichen	0,07 bis 0,08	0,054	4° 0′ 4 35 3 6
	mit denselben Fetten u. Wasser	0,08	0,28	4 35 15 39
	mit Asphalt	0,054	0,19	3 6 10 46
	fettig	0,14	—	7 58
	fettig und angefeuchtet	0,14	—	7 58
Gußeiserne Axen auf bronzenen Lagern	mit Baumöl, Schweinefett, Talg und dünner Wagenschmiere	0,07 bis 0,08	0,054	4 0 4 35 3 6
	fettig	0,16	—	9 6
	fettig und angefeuchtet	0,16	—	9 6
	kaum fettig	0,19	—	10 46
Gußeiserne Axen auf Lagern von Pockholz (lignum sanctum)	trocken	0,18	—	10 12
	mit Oel od. Schweinefett	—	0,09	5 9
	mit dergl. abgerieben .	0,10	—	5 43
	mit einer Mischung aus Schweinefett u. Molybden abgerieben	0,14	—	7 58
Schmiedeeiserne Axen auf gußeisernen Lagern	mit Baumöl, Schweinefett, Talg oder dünner Wagenschmiere	0,07 bis 0,08	0,054	4 0 4 35 3 6
Schmiedeeiserne Axen auf bronzenen Lagern	mit Baumöl, Schweinefett oder Talg	0,07 bis 0,08	0,054	4 0 4 35 3 6
	m. dicker Wagenschmiere	0,09	—	5 9
	fettig und angefeuchtet	0,19	—	10 46
	kaum fettig	0,25	—	14 2
Schmiedeeiserne Axen auf Lagern von Pockholz (lignum sanctum)	mit Oel oder Schweinefett geschmiert	0,11	—	6 17
	fettig	0,19	—	10 46
Bronzene Axen auf bronzenen Lagern	mit Oel	0,10	—	5 43
	mit Schweinefett . . .	0,09	—	5 9
Bronzene Axen auf gußeisernen Lagern	mit Oel oder Talg . .	—	0,045 bis 0,052	2 35 2 59
Axen von Pockholz auf gußeisernen Lagern	mit Schweinefett . .	0,12	—	6 51
	fettig	0,15	—	8 32
Axen von Pockholz auf Lagern von Pockholz	mit Schweinefett . .	—	0,07	4 0