157b) $$\begin{cases} Q_I' = w^2 \cdot \frac{X}{L} \cdot (L-Z) \cdot M; & Q_I'' = w^2 \cdot \frac{Y}{L} \cdot (L-Z) \cdot M \\ Q_{II}' = w^2 \cdot \frac{X}{L} \cdot Z \cdot M; & Q_{II}'' = w^2 \cdot \frac{Y}{L} \cdot Z \cdot M. \end{cases}$$

Setzt man Q_I' und Q_I'' im ersten fixen Punkt, und ebenso Q_{II}' Q_{II}'' im zweiten fixen Punkt zu einer Resultirenden zusammen, so hat man nach einer einfachen Umformung mit Hilfe der Gleichung 155), S. 171:

157c) $$\begin{cases} Q_I = w^2 \cdot M \cdot R \cdot \frac{L-Z}{L}; & Q_{II} = w^2 \cdot M \cdot R \cdot \frac{Z}{L} \\ \quad = Q \cdot \frac{L-Z}{L}; & \quad = Q \cdot \frac{Z}{L}. \end{cases}$$

worin Q_I den resultirenden Druck auf den ersten fixen Punkt, Q_{II} denjenigen auf den zweiten fixen Punkt, R den Abstand des Schwerpunkts von der Drehaxe, M die Gesammtmasse des Systems, Q den resultirenden Druck durch die Normalkraft bezeichnen. Auch ergiebt sich leicht, dafs in diesem Falle Q_I und Q_{II} parallel mit dem kürzesten Abstande R sind. Hieraus folgt:

> Rotirt ein festes System um eine fixe Axe, welche parallel mit einer freien Axe des Systems ist, so kann man die Gesammtmasse des Systems im Schwerpunkt vereinigt rotirend denken, und findet den Druck auf die fixen Punkte, indem man den Druck der durch den Schwerpunkt gehenden Normalkraft auf die fixen Punkte nach § 79 oder 80 reduzirt. Ist die fixe Axe des Systems nicht parallel mit einer freien Axe, so ist dies nicht zulässig.

Pendelschwingungen eines festen Systems um horizontale und um geneigte Axen.

§ 90. Ein festes System, welches unter dem Einflufs der Schwere um eine fixe Axe schwingt, so dafs es bei dieser Schwingung eine stabile Gleichgewichtslage durchläuft, nennen wir ein körperliches (— zusammengesetztes — physikalisches —) Pendel.

Ist nämlich ein festes System um eine fixe Axe drehbar, so ist jedes Massenelement gezwungen in einem Kreisbogen sich zu bewegen, und es wird, wenn die Bedingungen des § 56 und 57 statt finden, eine schwingende Bewegung machen; es mufs folglich auch das ganze System schwingen. Nun haben aber die einzelnen Massenelemente verschiedene Abstände von der Drehaxe, und auch verschiedene Erhebungswinkel; jedes Massenelement würde also, wenn es frei schwingen könnte, im Allgemeinen eine andere Schwingungsdauer (§ 57) und folglich auch eine andere Winkelgeschwindigkeit besitzen; dies ist nicht möglich, sobald die Massenelemente ein festes System bilden.

Haben wir es nun mit der Untersuchung der Bewegungsverhältnisse eines festen Systems welches um eine fixe Axe schwingt zu thun, so verfahren wir wieder am Besten in der Weise, dafs wir einen Punkt zu ermitteln suchen, der mit dem System fest verbunden ist, und in welchem die Gesammtmasse des System vereinigt, dieselben Einflüsse auf das System ausüben würde, wie die in den einzelnen Punkten vertheilten Massenelemente. Diesen Punkt nennen wir den Mittelpunkt der Schwingung, auch wohl kurz den Schwingungspunkt.

Der Schwingungspunkt mufs offenbar folgende Bedingungen erfüllen:

1) die in dem Schwingungspunkt vereinigte Gesammtmasse mufs denselben Druck auf die fixen Punkte ausüben, welcher aus den einzelnen Massenelementen resultiren würde;
2) wenn das System durch die stabile Gleichgewichtslage geht (§ 54 bis 57), mufs auch der Schwingungspunkt in stabiler Gleichgewichtslage sein, und
3) die in dem Schwingungspunkt vereinigte Gesammtmasse mufs dieselbe Schwingungsdauer haben, welche das körperliche Pendel hat.

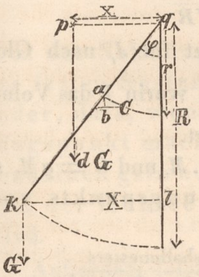
Wir betrachten zunächst den Fall, in welchem die fixe Axe horizontal ist, und dann folgt leicht, dafs zur Erfüllung der ersten Bedingung gehört, dafs der Schwingungspunkt in derselben zur fixen Axe normalen Ebene liegen mufs, in welcher der Schwerpunkt liegt (§ 79) und ebenso leicht folgt aus der zweiten Bedingung, dafs der Schwingungspunkt auch in derjengien Ebene liegen mufs, welche durch die Axe und den Schwerpunkt gelegt werden kann; es folgt also, indem wir die beiden ersten Bedingungen zusammenfassen, dafs der Schwingungspunkt in der Durchschnittslinie zweier Ebenen liegen mufs, von denen die eine durch den Schwerpunkt normal zur Axe, und die andere durch den Schwerpunkt und die Axe gelegt werden kann; hierin liegt der Satz:

der Schwingungspunkt eines festen Systems liegt in der Linie, welche den kürzesten Abstand des Schwerpunkts von der fixen Axe darstellt.

Zur Untersuchung der dritten Bedingung stellen wir folgende Betrachtungen an:

Es bezeichne r den Abstand des Schwingungspunkts von der Drehaxe, und wir denken in demselben die Gesammtmasse $M = \frac{G}{g}$ des Systems vereinigt, $ac = ds$ sei das Wegelement, welches der Schwingungspunkt bei der Drehung durchläuft $ab = dh$ sei das Wegelement in der Richtung der Schwere, so folgt aus § 52, wenn wir unter f das Aenderungsmaafs in der Richtung ac verstehen:

$$f . M . ds = M . g . dh; \quad f = g . \frac{dh}{ds} = g . \sin \varphi.$$



Bezeichnet c die Peripheriegeschwindigkeit des Schwingungspunktes, so ist $c = w . r = f . dt$, und wenn wir unter f' das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit verstehen, so ist $w = f' dt$; wir haben also:

$$c = w . r = f . dt = f' . dt . r.$$

Daher

$$\text{I.} \quad f' = \frac{f}{r} = g . \frac{\sin \varphi}{r}.$$

Nun ist hier die Schwere als die auf das System angebrachte Kraft anzusehen, und daher das Moment des auf Drehung wirkenden Kräftepaars $\Sigma(dG . x)$, wenn $x = pq$ der Hebelsarm der in dem betrachteten Massenelement wirkenden Schwerkraft ist; bezeichnet $kl = X$ den Abstand des Schwerpunkts von der durch die Axe gelegten Vertikalebene, so ist nach Gleichung 144a), S. 154:

$$\Sigma(dG . x) = G . X$$

und da $X = kl = R . \sin \varphi$ ist, wenn wir unter R den Abstand qk des Schwerpunkts von der Drehaxe verstehen, so ist das auf Drehung wirkende Moment: $GR . \sin \varphi$. Substituiren wir für die auf das System angebrachten Kräfte, die in dem System thätigen Kräfte, so ist deren Moment nach Gleichung 145a) $f_{,} J_{,}$ und es ist nach dem Gesetz in § 86. No. 1 und nach Gleichung 154c) zu setzen:

$$G . R . \sin \varphi = f_{,} . J_{,} .$$

$$\text{II.} \quad f_{,} = \frac{G . R . \sin \varphi}{J_{,}} .$$

Da nun der Schwingungspunkt ein mit dem System fest verbundener Punkt ist, so hat er in jedem Augenblick dieselbe Winkelgeschwindigkeit, welche das System hat, es mufs daher auch das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit des Schwingungspunkts f' gleich demjenigen der Winkelgeschwindigkeit sein, welche die auf das System angebrachten Kräfte bedingen, d. h. es ist zu setzen $f' = f_{\prime}$ oder

$$g \cdot \frac{\sin\varphi}{r} = \frac{G \cdot R \cdot \sin\varphi}{J_{\prime}},$$

da nun $\sin\varphi$ auf beiden Seiten der Gleichung identisch ist, insofern der Schwingungspunkt denselben Erhebungswinkel hat, wie der Schwerpunkt, weil beide auf demselben Radius liegen, so folgt der Abstand des Schwingungspunkts von der Drehaxe:

$$158)\quad r = \frac{gJ_{\prime}}{GR} = \frac{\gamma T_{\prime}}{GR} = \frac{T_{\prime}}{VR}$$

indem man nämlich für homogene Systeme setzt für $J_{\prime}$ nach Gleichung 146c) $\frac{\gamma}{g} \cdot T_{\prime}$ und für G den Werth γV, worin V das Volum und γ das Gewicht der Volumeinheit bezeichnet.

Setzt man nach Gleichung 147b) $J_{\prime} = \varrho_{\prime}^{2} \cdot M$ und $G = gM$, so findet man auch den Abstand des Schwingungspunkts vom Drehpunkt:

$$158a)\quad r = \frac{\varrho_{\prime}^{2}}{R} = \frac{\text{Quadrat des Drehungshalbmessers}}{\text{Abstand des Schwerpunkts}},$$

und folglich für ein Kreispendel bei geringen Ausschlägen nach Gleichung 190), S. 72 die Schwingungsdauer:

$$158b)\quad T = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{J_{\prime}}{GR}\right)} = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{T_{\prime}}{gVR}\right)}$$
$$= \pi\varrho_{\prime} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{gR}\right)} = 0{,}5620 \cdot \frac{\varrho_{\prime}}{R} \cdot \sqrt{R}.$$

Der Punkt, in welchem die Axe durch die Ebene geschnitten wird, welche man normal zur Axe durch den Schwingungspunkt legen kann, heifst der Aufhängepunkt des körperlichen Pendels.

Denken wir, das System schwinge um eine andere fixe Axe, welche durch den eben bestimmten Schwingungspunkt geht, und mit der eben betrachteten Axe parallel ist, so dafs der eben ermittelte Schwingungspunkt nun Aufhängepunkt wird. Der Abstand des neuen Schwingungspunkts ist offenbar

$$r' = \frac{\varrho'^{2}_{\prime}}{R'}$$

wen $\varrho'_{\prime}$ den Drehungshalbmesser und R' den Abstand des Schwerpunkts von der neuen Drehaxe bezeichnet. Nun sei ϱ der Drehungshalbmesser für eine durch den Schwerpunkt gehende Axe, so ist, da der Abstand des Schwerpunkts von der ersten Axe R, und da offenbar $r = R + R'$ ist, nach Gleichung 150) und 158a)

$$r = \frac{\varrho^2 + R^2}{R} = R + R', \text{ daher}$$

$$159)\quad R' = \frac{\varrho^2}{R},$$

aufserdem ist offenbar nach derselben Gleichung und mit Benutzung des eben gefundenen Werths

$$r' = \frac{\varrho^2 + R'^2}{R'} = \frac{\varrho^2}{R'} + R' = R + R'$$

also

$$159\text{a})\quad r' = r,$$

d. h. der Schwingungspunkt und der Aufhängepunkt eines festen Systems stehen in solcher Beziehung zu einander, dafs, wenn man den Schwingungspunkt zum Aufhängepunkt macht, und läfst das System um eine durch denselben gehende mit der vorigen parallele Axe schwingen, der frühere Aufhängepunkt nun Schwingungspunkt wird.

Aufserdem folgt aus der Gleichung 159) noch

$$R' . R = \varrho^2,$$

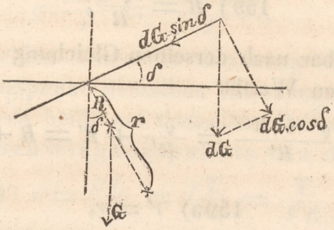
d. h. das Quadrat des Drehungshalbmessers für eine durch den Schwerpunkt gehende Axe ist gleich dem Produkt aus den Abständen des Schwerpunkts von dem Aufhängepunkt und von dem Schwingungspunkt.

Da nun ferner ϱ^2, d. i. das Quadrat des Drehungshalbmessers für eine bestimmte durch den Schwerpunkt gehende Axe ein konstanter Werth ist, so folgt, dafs auch $R . R'$ ein konstanter Werth ist, und folglich liegt hierin das Gesetz:

> Wenn man in einem festen System beliebig viele horizontale und unter sich parallele Axen denkt, und man denkt für jede Axe den entsprechenden Schwingungspunkt, so ist das Produkt aus dem Abstande des Schwerpunktes von einer beliebigen Axe, und aus dem Abstande des Schwerpunkts von dem zu dieser Axe gehörigen Schwingungspunkte für alle parallelen Axen ein konstanter Werth, und gleich dem Quadrat des Drehungshalbmessers für eine durch den Schwerpunkt gehende parallele Axe.

Wir haben bis jetzt die Schwingungen eines Systems um eine horizontale Axe betrachtet; nehmen wir nunmehr an, die fixe

Axe sei nicht horizontal, sondern bilde mit der Horizontalen den Winkel δ.



Offenbar lassen sich nun die in den einzelnen Massenelementen wirksamen Drucke der Schwerkraft zerlegen in zwei andere, von denen die einen $dG . \sin\delta$ durch den Widerstand der fixen Punkte aufgehoben werden, die andere $dG . \cos\delta$ aber als lauter gleich grofse in den einzelnen Massenelementen wirksame und konstant wirkende Drucke zu betrachten sind. Wir werden für diese Drucke genau dieselben Betrachtungen anstellen können, die wir zu Anfange dieses Paragraphen für die Drucke angestellt haben, die parallel mit der Schwerkraft waren, und es werden offenbar überall dieselben Resultate gefunden werden, wenn wir nur überall für das Aenderungsmaafs der Schwere g jetzt das Aenderungsmaafs $g . \cos\delta$ einführen. Wir finden dann nach I. und II. (S. 179):

$$f' = g . \cos\delta . \frac{\sin\varphi}{r_0} \qquad f_{\prime} = \frac{G . \cos\delta . R_0 . \sin\varphi}{J_{\prime}}$$

worin r_0 den kürzesten Abstand des Schwingungspunkts von der geneigten Drehungsaxe, R_0 den kürzesten Abstand des Schwerpunkts von derselben Axe $J_{\prime}$ das Trägheitsmoment in Bezug auf dieselbe Axe bezeichnet. Durch Gleichsetzung beider Werthe findet man wieder wie in Gleichung 158 und 158a):

$$160)\ r_0 = \frac{gJ_{\prime}}{GR_0} = \frac{\gamma T_{\prime}}{GR_0} = \frac{T_{\prime}}{VR_0} = \frac{\varrho_{\prime}^2}{R_0}$$

worin unter r_0 der Abstand eines Punkts von der Drehaxe, der auf der kürzesten Entfernung des Schwerpunkts von der Drehaxe liegt, verstanden ist, welcher, wenn die Gesammtmasse des Systems in demselben vereinigt wäre, mit dem System dieselbe Schwingungsdauer hätte, dieselbe Reaktion in den fixen Punkten hervorrufen, auch mit dem System gleichzeitig die stabile Gleichgewichtslage passiren würde. Die Schwingungsdauer eines solchen Systems findet sich leicht durch Gleichung 90) S. 72, wenn man für g den Werth $g . \cos\delta$ setzt:

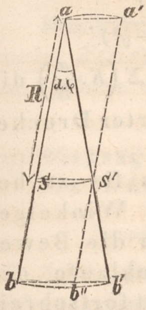
$$160\text{a)}\quad T = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{r_0}{g \cdot \cos\delta}\right)} = 0{,}5620 \cdot \sqrt{\left(\frac{r_0}{\cos\delta}\right)}.$$

Man sieht aus Gleichung 158) und 160), dafs wenn die fixe Axe durch den Schwerpunkt geht, wenn also $R = 0$, oder $R_0 = 0$ ist, der Abstand des Schwingungspunktes und auch die Schwingungsdauer unendlich grofs sein müfste, d. h. dafs ein solches System überhaupt nicht schwingt, ebenso folgt aus Gleichung 160 a) dafs wenn $\delta = 90^0$ ist, d. h. wenn die Schwingungsaxe vertikal ist, ebenfalls die Schwingungsdauer unendlich grofs sein müfste, d. h. dafs in diesem Fall keine Pendelschwingungen statt finden können.

Uebrigens gelten, wie leicht zu übersehen ist, die Gesetze der Gleichungen 159 und 159 a) auch für geneigte Axen.

Zurückführung eines festen Systems mit fixen Punkten auf ein freies System.

§ 91. Denken wir ein festes System, welches um einen fixen Punkt oder um eine fixe Axe rotirt, und stellen wir uns vor, dafs wir in jedem Augenblicke die Reaktionen (§ 79, S. 144) kennen, welche in den fixen Punkten statt finden müssen, um dieselben als fixe Punkte zu konstituiren. Wenn wir nun das System als freies System betrachten, und wir denken in den Punkten, die wir bisher als fixe Punkte angesehen haben, Kräfte auf das System angebracht, deren Angriffspunkte diese Punkte sind, und die in jedem Augenblick der Richtung und Gröfse nach gleich jenen Reaktionen sind, so mufs offenbar das System genau dieselbe Bewegung haben, die es als System mit fixen Punkten hatte. Es wird sich durch diese Betrachtungsweise jedes System mit fixen Punkten auf ein freies System zurückführen lassen.



Da aber jedes freie System sich so bewegt, als habe der Schwerpunkt eine fortschreitende Bewegung, und als rotirten alle Massenelemente mit gleicher Winkelgeschwindigkeit um eine Axe, die durch den Schwerpunkt geht, so mufs dieses Gesetz der obigen Darstellung zufolge auch für ein System mit fixen Punkten gelten. Dafs dem so sei, läfst sich durch folgende Betrachtung veranschaulichen. Es sei a ein fixer Punkt des Systems, S der Schwerpunkt, R der Abstand des Schwerpunkts von der Drehaxe, b sei ein beliebiges Mas-