$$z = z'; \quad x = X + x'; \quad y = Y + y'$$

wenn wir diese Werthe in die obigen Bedingungs-Gleichungen (156) einsetzen, so ist:

$$\Sigma(dm \,.\, x \,.\, z) \;-\; X \,.\, \Sigma(dm \,.\, z') = 0$$
$$\Sigma(dm \,.\, y \,.\, z) \;-\; Y \,.\, \Sigma(dm \,.\, z') = 0$$

und da $\Sigma(dm.z') = 0$ ist (§ 81. S. 154), so ist auch $\Sigma(dm.x.z) = 0$ und $\Sigma(dm \,.\, y \,.\, z) = 0$, d. h. es sind die Summen der Momente der Normalkräfte für zwei zu der neuen Axe normale Koordinatenaxen einzeln gleich Null, und daher besteht kein Bestreben die Axe zu kippen. Wohl aber besteht für solche Axe durch die Resultirende der Normalkräfte (Gleichung 155) ein Bestreben auf Verschieben, d. h. ein Druck auf die Axe. Eine Axe für welche kein Bestreben auf Kippen besteht, sondern nur ein aus den Normalkräften resultirender Druck, nennen wir eine Hauptaxe des Systems.

Rotation eines Systems mit fixen Punkten; Druck der Normalkräfte auf die fixen Punkte.

§ 89. Wenn ein festes System um einen fixen Punkt rotirt, der nicht der Schwerpunkt ist, und man denkt die Bewegung durch den Einflufs der in den einzelnen Massenelementen wirkenden Normal- und Tangentialkräfte bedingt, so ist zunächst der Druck auf den fixen Punkt gleich der Resultirenden aus allen Normalkräften; das ist nach Gleichung 155):

$$Q = M \,.\, w^2 \,.\, R.$$

worin M die Gesammtmasse des Systems und R den kürzesten Abstand des Schwerpunkts des Systems von der durch den fixen Punkt zu denkenden Rotationsaxe bezeichnet. Ist diese, durch die auf das System angebrachten Kräfte bedingte, und nach § 79. S. 145 der Lage nach zu bestimmende Rotationsaxe eine Hauptaxe (§ 88. Schlufs), so wird die Rotation um diese Hauptaxe unmittelbar statt finden; ist jedoch die in angegebener Weise ermittelte Rotationsaxe keine Hauptaxe, so mufs das feste System seine Lage gegen dieselbe so lange ändern, bis eine Hauptaxe des Systems mit dieser gegebenen Rotationsaxe zusammenfällt. Die hierdurch komplizirten Bewegungsverhältnisse sind analog denen in § 87. S. 172 erwähnten Rotationsbewegungen eines freien Systems, dessen resultirende Paaraxe nicht mit einer freien Axe zusammenfällt, und können hier nicht weiter erörtert werden.

Bei weitem gröfsere Wichtigkeit für unsere Zwecke hat die Rotation eines festen Systems um eine fixe Axe, die durch zwei gegebene fixe Punkte geht. Behalten wir die in § 79 und 87 gewählten Bezeichnungen bei, so läſst sich der Fall offenbar zurück führen auf den in § 79 unter No. 2 (S. 148) behandelten Fall, daſs sämmtliche Drucke (die Normalkräfte) in Ebenen liegen, die zur fixen Axe normal sind, wir werden also die Drucke in den fixen Punkten I und II nach zwei Richtungen, die parallel sind, mit zwei durch den ersten fixen Punkt angenommenen zu der fixen Axe und unter einander normalen Koordinatenaxen finden, indem wir in die Gleichung 142b) für $K . \cos\alpha$ und für $K . \cos\beta = K . \sin\alpha$ die auf Seite 170 bestimmten Werthe $w^2 . dm . x$ und $w^2 . dm . y$ setzen. Wir haben sodann:

$$157)\left\{\begin{aligned} Q_I' &= w^2 . \frac{\Sigma[dm.x.(L-z)]}{L}; \quad Q_I'' = w^2 . \frac{\Sigma[dm.y.(L-z)]}{L} \\ Q_{II}' &= w^2 . \frac{\Sigma(dm.x.z)}{L}; \quad Q_{II}'' = w^2 . \frac{\Sigma(dm.y.z)}{L}, \end{aligned}\right.$$

worin Q_I' und Q_I'' die Drucke im ersten fixen Punkt Q_{II}' und Q_{II}'' die Drucke im zweiten fixen Punkt; z die Abstände der Massenelemente von einer Ebene durch den ersten fixen Punkt, und normal zur Drehaxe, x und y die Ordinaten der Massenelemente auf den Axen gemessen, in deren Richtung die Drucke Q_I', Q_I'' und Q_{II}'', Q_{II}'' statt finden, L die Entfernung der beiden fixen Punkte von einander, und w die Winkelgeschwindigkeit des Systems bezeichnen.

Es seien wieder x', y', z' die Koordinaten in Bezug auf ein Koordinatensystem, das mit dem angenommenen parallel ist, und dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt ist; es seien X, Y, Z die Koordinaten des Schwerpunkts in Bezug auf das zuerst angenommene System. Setzt man wieder $x = X + x'$, $y = Y + y'$, $z = Z + z'$ wie auf Seite 170 und beachtet man, daſs $\Sigma(dm . x')$, $\Sigma(dm . y')$, $\Sigma(dm . z')$ einzeln gleich Null sind (§ 81. S. 154), so lassen sich die Werthe für die Drucke durch leichte Rechnung umformen in folgende:

$$157a)\left\{\begin{aligned} Q_I' &= w^2 . \frac{X . (L-Z) . \Sigma(dm) - \Sigma(dm . x' . z')}{L} \\ Q_{II}' &= w^2 . \frac{X . Z . \Sigma(dm) + \Sigma(dm . x' . z')}{L} \\ Q_I'' &= w^2 . \frac{Y . (L-Z) . \Sigma(dm) - \Sigma(dm . y' . z')}{L} \\ Q_{II}'' &= w^2 . \frac{Y . Z . \Sigma(dm) + \Sigma(dm . y' . z')}{L}. \end{aligned}\right.$$

Ist die Rotationsaxe eine Hauptaxe, so ist für die durch den Schwerpunkt gehende mit derselben parallele Axe, welche dann eine freie Axe ist $\Sigma(dm . x' . z') = 0$ und $\Sigma(dm . y' . z') = 0$, folglich hat man für diesen Fall:

$$\text{157b)} \begin{cases} Q_I' = w^2 \cdot \frac{X}{L} \cdot (L-Z) \cdot M; & Q_I'' = w^2 \cdot \frac{Y}{L} \cdot (L-Z) \cdot M \\ Q_{II}' = w^2 \cdot \frac{X}{L} \cdot Z \cdot M; & Q_{II}'' = w^2 \cdot \frac{Y}{L} \cdot Z \cdot M. \end{cases}$$

Setzt man Q_I' und Q_I'' im ersten fixen Punkt, und ebenso Q_{II}' Q_{II}'' im zweiten fixen Punkt zu einer Resultirenden zusammen, so hat man nach einer einfachen Umformung mit Hilfe der Gleichung 155), S. 171:

$$\text{157c)} \begin{cases} Q_I = w^2 \cdot M \cdot R \cdot \frac{L-Z}{L}; & Q_{II} = w^2 \cdot M \cdot R \cdot \frac{Z}{L} \\ \quad = Q \cdot \frac{L-Z}{L}; & \quad = Q \cdot \frac{Z}{L}. \end{cases}$$

worin Q_I den resultirenden Druck auf den ersten fixen Punkt, Q_{II} denjenigen auf den zweiten fixen Punkt, R den Abstand des Schwerpunkts von der Drehaxe, M die Gesammtmasse des Systems, Q den resultirenden Druck durch die Normalkraft bezeichnen. Auch ergiebt sich leicht, dafs in diesem Falle Q_I und Q_{II} parallel mit dem kürzesten Abstande R sind. Hieraus folgt:

> Rotirt ein festes System um eine fixe Axe, welche parallel mit einer freien Axe des Systems ist, so kann man die Gesammtmasse des Systems im Schwerpunkt vereinigt rotirend denken, und findet den Druck auf die fixen Punkte, indem man den Druck der durch den Schwerpunkt gehenden Normalkraft auf die fixen Punkte nach § 79 oder 80 reduzirt. Ist die fixe Axe des Systems nicht parallel mit einer freien Axe, so ist dies nicht zulässig.

Pendelschwingungen eines festen Systems um horizontale und um geneigte Axen.

§ 90. Ein festes System, welches unter dem Einflufs der Schwere um eine fixe Axe schwingt, so dafs es bei dieser Schwingung eine stabile Gleichgewichtslage durchläuft, nennen wir ein körperliches (— zusammengesetztes — physikalisches —) Pendel.

Ist nämlich ein festes System um eine fixe Axe drehbar, so ist jedes Massenelement gezwungen in einem Kreisbogen sich zu bewegen, und es wird, wenn die Bedingungen des § 56 und 57 statt finden, eine schwingende Bewegung machen; es mufs folglich auch das ganze System schwingen. Nun haben aber die einzelnen Massenelemente verschiedene Abstände von der Drehaxe, und auch verschiedene Erhebungswinkel; jedes Massenelement würde also, wenn