$$Q = w^2 \cdot \sqrt{\left\{[\Sigma(dm \cdot X)]^2 + [\Sigma(dm \cdot Y)]^2\right\}}$$
$$= w^2 \cdot \sqrt{\left\{[\Sigma(dm)]^2 \cdot [X^2 + Y^2]\right\}}.$$

$$155) \quad Q = w^2 \cdot (\Sigma \cdot dm) \cdot R = M \cdot w^2 \cdot R,$$

auch ergiebt sich nach Gleichung 119) für die Richtung von Q:

$$\cos A = \frac{w^2 \cdot [\Sigma(dm \cdot X) + \Sigma(dm \cdot x')]}{Q} = \frac{X}{R}; \quad \sin A = \frac{Y}{R}.$$

Hieraus folgt, dafs die Richtung der Resultirenden der Normalkraft mit der Richtung der kürzesten Entfernung des Schwerpunkts des Systems von der Drehungsaxe zusammenfällt, und folglich sowohl die Drehaxe, als die mit derselben parallele durch den Schwerpunkt gehende Koordinatenaxe schneidet.

Für eine Drehaxe, die durch den Schwerpunkt geht, ist $R = 0$, folglich auch die Resultirende aller Normalkräfte nach Gleichung 155) gleich Null. Aus dieser Gleichung und der eben angeführten Bemerkung folgt folgendes Gesetz:

> Wenn ein festes System um eine gegebene Axe rotirt, so ist der resultirende Druck aller in den einzelnen Massenelementen wirkenden Normalkräfte derselbe, welcher auch statt finden würde, wenn die Gesammtmasse des Systems in einem Punkte vereinigt, dessen Abstand gleich dem kürzesten Abstande des Schwerpunkts des Systems von der Drehaxe ist, mit der gemeinschaftlichen Winkelgeschwindigkeit des Systems um dieselbe Axe rotirt; für jede durch den Schwerpunkt gehende Rotationsaxe ist der Druck aller Normalkräfte gleich Null.

Rotation eines freien Systems. — Freie Axen.

§ 88. In einem freien System geht die Drehaxe immer durch den Schwerpunkt des Systems (§ 82. S. 157). Die Normalkräfte sind hier also immer als Kräfte aufzufassen, die in parallelen Ebenen liegen, und deren Resultirende gleich Null ist; der Fall entspricht also dem in § 75 unter C. S. 116 behandelten. Solche Kräfte können aber im Allgemeinen noch ein resultirendes Kräftepaar haben, dessen Ebene und Moment durch die Gleichungen 123), 123a) und 123b) zu bestimmen bleibt. Nach 123a) ist der Neigungswinkel der Paarebene gegen die parallele Ebene, in welcher die Kräfte liegen zu finden; da nun die Kraftrichtungen hier sämmtlich die Drehaxe schneiden, so ist ihr kürzester Abstand von derselben $R_{,,,} = 0$ und folglich findet sich tang $\varphi = \infty$, daher steht die Ebene des resultirenden Kräftepaars normal auf der Ebene der Kräfte, d. h. sie ist parallel mit der Drehaxe. Der Winkel ψ, unter welchem sie die angenommene Koordinatenaxe der X schneidet, ist nach Gleichung 123) zu bestimmen und nach Einsetzung der entsprechenden Werthe hat man:

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{\Sigma(dm \, . \, y' \, . \, z')}{\Sigma(dm \, . \, x' \, . \, z')}.$$

Endlich ist das Moment der resultirenden, in dieser Ebene liegenden Kräftepaares nach Gleichung 123b) und nach Einsetzung der entsprechenden Werthe:

$$w^2 \, . \sqrt{\left\{[\Sigma(dm \, . \, y' \, . \, z')]^2 + [\Sigma(dm \, . \, x' \, . \, z')]^2\right\}}.$$

Da nun aber zufolge der Voraussetzung die Axe der Z' die resultirende Axe des freien Systems ist, deren Lage durch die auf das System angebrachten Kräfte bestimmt ist (vergl. § 86. No. 3), so mufs in Bezug auf jede zu dieser Axe normale Axe das resultirende Moment gleich Null sein (vergl. die Darstellung in § 79. No. 2). Das eben berechnete Moment ist aber ein solches, welches eine Drehung um eine Axe bedingen würde, die zu der Axe der Z' normal ist und mit der Axe der X den Winkel $(90^\circ - \psi)$ bildet, (da die Paarebene dieses Moments mit der Axe der Z' parallel ist und mit der Axe der X den Winkel ψ macht). Es mufs also das eben berechnete Moment gleich Null sein. Nun bemerkt man aber, dafs der Werth dieses Moments bedingt ist, durch die Lage der Massenelemente gegen die resultirende Axe der Z'. Diese Lage kann von vorne herein so beschaffen sein, dafs der Ausdruck

$$w^2 \, . \sqrt{\left\{[\Sigma(dm \, . \, y' \, . \, z)]^2 + [\Sigma(dm \, . \, x' \, . \, z')]^2\right\}} = 0$$

ist, was im Allgemeinen erfordern würde, dafs einzeln:

$$\Sigma(dm \, . \, y' \, . \, z') = 0 \text{ und } \Sigma(dm \, . \, x' \, . \, z') = 0$$

sei, oder es läfst sich auch denken, dafs die Massenelemente von vorne herein eine solche Lage nicht haben; dafs sich also für das Moment ein reeller Werth ergiebt. In diesem Falle müssen aber offenbar die Massenelemente in dem Augenblick in welchem Bewegung eintritt eine Lage annehmen, durch welche jene Bedingung erfüllt wird, d. h. es mufs das ganze System sich gegen die (durch die auf dasselbe angebrachten Kräfte bedingte) Rotationsaxe so verschieben, dafs die eben aufgestellte Bedingungsgleichung erfüllt wird. Das System rotirt dabei um die Axe der Z', allein in sehr eigenthümlicher Weise, indem nämlich sämmtliche Massenelemente gleichzeitig um eine zweite Axe rotiren, die gegen die Axe der Z' geneigt ist, und welche gemeinschaftlich mit den um sie rotirenden Massenelementen um die Axe der Z' als um diejenige, welche durch die auf das System angebrachten Kräfte gegeben ist, rotirt. Die hierdurch bedingten höchst merkwürdigen Bewegungsverhältnisse können wir hier nicht spezieller untersuchen, da dies eine zu weit führende Diskussion nöthig machen würde; wir können darauf um so eher verzichten, als dieselben für unsere Zwecke von minderer Wichtigkeit sind.

Eine Axe für welche die in dem System wirksam zu denkenden Normalkräfte (Centripetal- oder Centrifugalkräfte) der einzelnen Massenelemente in vollkommenem Gleichgewicht (§ 70) sich befinden, nennt man eine **freie Axe.**

Damit die Axe gegen fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sei, mufs die Resultirende aus allen Normalkräften gleich Null sein; dies ist der Fall, wie in § 87 nachgewiesen, wenn die Axe durch den Schwerpunkt des Systems geht. Eine freie Axe mufs also durch den Schwerpunkt des Systems gehen.

Aber nicht jede Axe, die durch den Schwerpunkt des Systems geht, ist eine freie Axe; es mufs vielmehr auch das aus den Normalkräften, welche eine Rotation um die Axe bedingen, hervorgehende resultirende Kräftepaar gleich Null sein, um die Axe zu einer freien zu machen, d. h. es müssen die Momentensummen für drei zu einander normale Axen gleich Null sein. Dazu gehört nach der obigen Darstellung:

$$156)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma(dm\,.\,x'\,.\,z') = 0 \text{ und} \\ \Sigma(dm\,.\,y'\,.\,z') = 0, \end{array} \right.$$

wenn z' die Koordinaten der Massenelemente in Bezugauf die Rotationsaxe, x' und y' aber die Koordinaten der Massenelemente in Bezug auf zwei andere, im Schwerpunkt des Systems auf der Rotationsaxe normale, Axen bezeichnen.

Diese Bedingung wird erfüllt:

a) wenn z' für alle Massenelemente gleich Null ist, d. h. wenn alle Massenelemente in einer Ebene liegen, die auf der Axe der Z' normal ist. Hieraus folgt:

> Für Massenelemente, die sämmtlich in einer Ebene liegen, ist die im Schwerpunkt der Ebene zu derselben normale Axe eine freie Axe.

b) Wenn das System durch Ebenen, die normal zu der Axe der Z' sind, sich in ebene Schichten zerlegen läfst, und für jede einzelne Schicht, deren Massenelemente also immer einen gemeinschaftlichen Werth von z' haben, die Bedingungen $\Sigma(dm\,.\,x') = 0$ und $\Sigma(dm\,.\,y' = 0)$ erfüllt werden, d. h. also wenn die Schwerpunkte der sämmtlichen Schichten in der Axe der Z' liegen. Dies wird durch folgendes Gesetz ausgedrückt:

> **Jede durch den Schwerpunkt gehende Axe, welche die Schwerpunkte sämmtlicher auf derselben normal stehenden Elemente eines Systems enthält, ist eine freie Axe.**

Es läfst sich zeigen, dafs jedes feste System wenigstens **drei freie Axen haben müsse**, und dafs **diese freien Axen im Schwerpunkt normal zu einander sind.**

Kennt man eine freie Axe des Systems, so lassen sich die andern freien Axen zuweilen ohne weitere Rechnung angeben, denn nach dem eben angeführten, nur mit Hilfe ausgedehnter analytischer Rechnungen nachzuweisenden Satze, müssen die andern Axen in der Ebene liegen, welche im Schwerpunkt normal zu der ersten freien Axe ist; haben nun sämmtliche in dieser Ebene liegenden Axen zu der ersten Axe ganz gleiche Beziehungen, so werden alle diese Axen **freie** sein. Dies ist z. B. der Fall mit einem homogenen **Rotationskörper**: denn, dreht sich eine ebene Figur um eine in ihrer Ebene liegende Axe, so ist diese Axe eine freie Axe des erzeugten Rotationskörpers, nach dem Satz b), und wenn man durch den Schwerpunkt dieses Rotationskörpers eine zu jener Axe normale Ebene legt, so liegen die andern freien Axen in dieser Ebene, und da der Durchschnitt dieser Ebene mit dem Rotationskörper entweder eine Kreisfläche oder eine Kreis-Ringfläche ist, so haben alle Durchmesser dieser Fläche dieselben Beziehungen zur Rotationsaxe, sind also sämmtlich **freie** Axen.

Für jede Axe, die mit einer freien Axe parallel ist, aber nicht durch den Schwerpunkt geht, ist das Moment des auf Kippen der Achse wirkenden Kräftepaars ebenfalls gleich Null; denn wenn für die freie Axe $\Sigma(dm.x'.z') = 0$ und $\Sigma(dm.y'.z')$ gleich Null ist, und wir legen durch den Schwerpunkt eine Ebene normal zu den beiden Axen, nehmen den Durchschnittpunkt der neuen Axe mit diese Ebene als Anfangspunkt des neuen Koordinatensystems, dessen Axen parallel sein sollen mit denen des erstgedachten Koordinatensystems (dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt war), so sind, wenn X und Y die Koordinaten jenes neuen Anfangspunkts bedeuten:

$$z = z'; \quad x = X + x'; \quad y = Y + y'$$

wenn wir diese Werthe in die obigen Bedingungs-Gleichungen (156) einsetzen, so ist:

$$\Sigma(dm\,.\,x\,.\,z) \;-\; X\,.\,\Sigma(dm\,.\,z') = 0$$

$$\Sigma(dm\,.\,y\,.\,z) \;-\; Y\,.\,\Sigma(dm\,.\,z') = 0$$

und da $\Sigma(dm.z') = 0$ ist (§ 81. S. 154), so ist auch $\Sigma(dm.x.z) = 0$ und $\Sigma(dm\,.\,y\,.\,z) = 0$, d. h. es sind die Summen der Momente der Normalkräfte für zwei zu der neuen Axe normale Koordinatenaxen einzeln gleich Null, und daher besteht kein Bestreben die Axe zu kippen. Wohl aber besteht für solche Axe durch die Resultirende der Normalkräfte (Gleichung 155) ein Bestreben auf Verschieben, d. h. ein Druck auf die Axe. Eine Axe für welche kein Bestreben auf Kippen besteht, sondern nur ein aus den Normalkräften resultirender Druck, nennen wir eine **Hauptaxe des Systems.**

Rotation eines Systems mit fixen Punkten; Druck der Normalkräfte auf die fixen Punkte.

§ 89. Wenn ein festes System um einen **fixen Punkt** rotirt, der **nicht der Schwerpunkt** ist, und man denkt die Bewegung durch den Einflufs der in den einzelnen Massenelementen wirkenden Normal- und Tangentialkräfte bedingt, so ist zunächst der Druck auf den fixen Punkt gleich der Resultirenden aus allen Normalkräften; das ist nach Gleichung 155):

$$Q = M\,.\,w^2\,.\,R.$$

worin M die Gesammtmasse des Systems und R den kürzesten Abstand des Schwerpunkts des Systems von der durch den fixen Punkt zu denkenden Rotationsaxe bezeichnet. Ist diese, durch die auf das System angebrachten Kräfte bedingte, und nach § 79. S. 145 der Lage nach zu bestimmende Rotationsaxe eine **Hauptaxe** (§ 88. Schlufs), so wird die Rotation um diese Hauptaxe unmittelbar statt finden; ist jedoch die in angegebener Weise ermittelte Rotationsaxe **keine** Hauptaxe, so mufs das feste System seine Lage gegen dieselbe so lange ändern, bis eine **Hauptaxe** des Systems mit dieser gegebenen Rotationsaxe zusammenfällt. Die hierdurch komplizirten Bewegungsverhältnisse sind analog denen in § 87. S. 172 erwähnten Rotationsbewegungen eines freien Systems, dessen resultirende Paaraxe nicht mit einer freien Axe zusammenfällt, und können hier nicht weiter erörtert werden.

Bei weitem gröfsere Wichtigkeit für unsere Zwecke hat die Rotation eines festen Systems um eine **fixe Axe**, die durch **zwei gegebene fixe Punkte** geht. Behalten wir die in § 79 und 87