das Aenderungsmaafs der fortschreitenden Bewegung:

$$154b)\quad f = \frac{\Sigma(K)}{M} = \frac{\text{Resultirender Druck}}{\text{Gesammtmasse}},$$

und das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit:

$$154c)\quad f_{\prime} = \frac{\Sigma(Ka)}{J_{\prime}} = \frac{\text{Summe der statischen Momente}}{\text{Trägheitsmoment}}.$$

Substituirung der auf Drehung wirkenden Kräfte eines festen Systems durch die Normalkräfte und Tangentialkräfte. Resultirende der Normalkräfte.

§ 87. Betrachten wir ein festes System, welches um irgend eine Axe rotirt, die Axe selbst möge fortschreiten oder nicht. Wenden wir auf jedes Massenelement die Betrachtungen an, welche wir in § 42 und 43 angestellt haben, so können wir die Bewegungen der einzelnen Massenelemente allemal auch erzeugt denken durch eine Normalkraft und eine Tangentialkraft; wir können also anstatt der Kräftegruppe, welche wir bisher als die in dem System wirksamen Kräfte der rotirenden Bewegung bezeichnet haben, noch andere Kräftegruppen substituiren, nämlich so, dafs wir in jedem Augenblick in jedem Massenelement eine konstantwirkende Normalkraft, und eine im Gleichgewicht befindliche Tangentialkraft wirksam denken. Die in den einzelnen Massenelementen wirkenden Tangentialkräfte sind in ihren Angriffspunkten einzeln im Gleichgewicht, ihr Druck auf das System ist folglich gleich Null (§ 34); die in den einzelnen Massenelementen wirksamen Normalkräfte wirken in der Richtung des Halbmessers des Kreiselements, welches das Massenelement in diesem Augenblick durchläuft; sie liegen folglich alle in parallelen Ebenen und ihre Richtungen schneiden sämmtlich die Drehaxe, sie üben auf jedes Massenelement einen Druck, durch welchen die Ablenkung des Massenelements von der Richtung der Tangente bedingt wird, diesem Druck (die Centripetalkraft) entspricht in jedem Massenelement eine gleich grofse entgegengesetzt gerichtete Reaktion (Centrifugalkraft), welche zunächst die Festigkeit des Systems in Anspruch nimmt, indem sie das Bestreben darstellt, die einzelnen Massenelemente radial von der Drehaxe zu entfernen. Wir können nun für die sämmtlichen in den einzelnen Massenelementen wirksamen Normalkräfte, die Resultirende bestimmen, wobei es im Allgemeinen gleichgiltig ist, ob wir für diese Untersuchung die Centrifugalkräfte, oder die Centripetalkräfte benutzen; die

Resultirenden werden sich nur durch die entgegengesetzte Richtung von einander unterscheiden *).

Es ist am Orte die Bemerkung ausdrücklich hervorzuheben, dafs die Centrifugalkraft oder die Centripetalkraft nicht als Kräfte aufgefafst werden dürfen, welche durch die rotirende Bewegung erst entstehen, und welche nun fähig sein könnten, auf das System irgend wie als darauf angebrachte Kräfte eine Wirkung zu äufsern. Die in den einzelnen Massenelementen wirkenden Normalkräfte, welche wir nunmehr betrachten, sind vielmehr nichts anders, als Kräfte, welche wir für die Wirkung der auf das System angebrachten, die drehende Bewegung bedingenden Kräfte, oder auch für die Wirkung der in dem System wirksamen (lebendigen) Kräfte der drehenden Bewegung substituiren. Wir dürfen dieselben also nicht mit jenen zugleich wirksam denken, sondern nur entweder die einen, oder die andern. Die Normalkräfte (Centrifugal- oder Centripetalkräfte), oder deren Resultirende sind daher nicht im Stande, irgend welche Aenderung derjenigen Bewegung hervorzubringen, welche die auf das System angebrachten Kräfte bedingt haben, oder welche das System überhaupt besitzt. Wir betrachten sie nur, weil die Anschauung von den Verhältnissen der drehenden Bewegung und ihren Bedingungen zuweilen einfacher und bequemer ist, wenn wir diese drehende Bewegung durch die gleichzeitige Bewegung der Massenelemente mit gleichförmiger Geschwindigkeit nach der Richtung der Tangente und mit gleichmäfsig beschleunigter, durch einen konstantwirkenden Normaldruck bedingter Geschwindigkeit nach der Richtung des Radius hervorgebracht denken (§ 42).

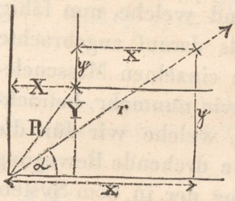
Da die Normalkräfte als Kräfte, die zwar in parallelen Ebenen liegen, deren Richtungen aber unter einander nicht parallel sind, erscheinen, so können wir ihre Wirkung im Allgemeinen auffassen nach dem in § 75 unter A. behandelten Fall; sie läfst sich also zurückführen (§ 75. AIII. S. 114) auf eine der Richtung und Gröfse nach zu bestimmende Resultirende Q, und auf ein Kräftepaar, welches in einer zur Richtung Q normalen Ebene liegt.

Es sei die Drehaxe die dritte Axe eines Koordinatensystems, dessen beide andern Axen also in einer zur Drehaxe normalen Ebene liegen. X, Y, Z seien die Korrdinaten des Schwerpunkts, x, y, z die Koordinaten der einzelnen Massenelemente, und x', y', z'

*) Vergleiche die Bemerkung am Schlusse des § 43.

seien die Koordinaten derselben Massenelemente in Bezug auf ein mit dem erwähnten Koordinatensystem paralleles durch den Schwerpunkt gehendes Koordinatensystem, endlich sei R der kürzeste Abstand des Schwerpunkts von der Drehaxe.

Zufolge dieser Disposition ist offenbar:



$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)} \qquad R = \sqrt{(X^2 + Y^2)}$$
$$x = X + x' \qquad y = Y + y'$$

und da die Normalkräfte sämmtlich in der Richtung ihres kürzesten Abstandes r von der Drehaxe wirken, so ist der Winkel α den sie mit der ersten Axe machen zu bestimmen durch die Werthe

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$
$$\sin\alpha = \frac{y}{r}.$$

Die Resultirende von Kräften in parallelen Ebenen drückt sich durch Gleichung 119) aus:

$$Q = \sqrt{\left\{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K.\sin\alpha)^2]\right\}}$$

worin wir hier für K die Werthe der in den einzelnen Massenelementen wirksam zu denkenden Normalkräfte zu setzen haben. Es ist aber nach Gleichung 79), S. 50 der Druck der Normalkraft:

$$dF = dm.w^2.r$$

und demnächst für jedes Massenelemennt:

$$K.\cos\alpha = dm.w^2.r.\frac{x}{r} = w^2.dm.x = w^2.dm.(X + x')$$
$$K.\sin\alpha = dm.w^2.r.\frac{y}{r} = w^2.dm.y = w^2.dm.(Y + y').$$

Man hat also, da w^2 gemeinschaftlich ist, die Resultirende aus allen Centrifugalkräften:

$$Q = w^2.\sqrt{\left\{[\Sigma(dm.X + dm.x')]^2 + [\Sigma(dm.Y + dm.y')]^2\right\}}.$$

Es ist aber nach dem Gesetz in § 81, S. 154 der Werth $\Sigma(dm.x')$ und $\Sigma(dm.y')$ jeder gleich Null, da diese Ausdrücke die Momentensummen für Ebenen vorstellen, die durch den Schwerpunkt gehen, und wenn man nun die Ausdrücke:

$$[\Sigma(dm.X + dm.x')]^2 \text{ und } [\Sigma(dm.Y + dm.y')]^2$$

berechnet, indem man sie auf die Form bringt:

$$[\Sigma(dm.X) + \Sigma(dm.x')] \text{ und } [\Sigma(dm.Y) + \Sigma(dm.y')]$$

so fallen die Summanden $\Sigma(dm.x')$ und $\Sigma(dm.y')$, da sie gleich Null sind fort, und man erhält schliefslich:

$$Q = w^2 . \sqrt{\left\{[\Sigma(dm . X)]^2 + [\Sigma(dm . Y)]^2\right\}}$$
$$= w^2 . \sqrt{\left\{[\Sigma(dm)]^2 . [X^2 + Y^2]\right\}}.$$

155) $Q = w^2 . (\Sigma . dm) . R = M . w^2 . R,$

auch ergiebt sich nach Gleichung 119) für die Richtung von Q:

$$\cos A = \frac{w^2 . [\Sigma(dm . X) + \Sigma(dm . x')]}{Q} = \frac{X}{R}; \quad \sin A = \frac{Y}{R}.$$

Hieraus folgt, dafs die Richtung der Resultirenden der Normalkraft mit der Richtung der kürzesten Entfernung des Schwerpunkts des Systems von der Drehungsaxe zusammenfällt, und folglich sowohl die Drehaxe, als die mit derselben parallele durch den Schwerpunkt gehende Koordinatenaxe schneidet.

Für eine Drehaxe, die durch den Schwerpunkt geht, ist $R = 0$, folglich auch die Resultirende aller Normalkräfte nach Gleichung 155) gleich Null. Aus dieser Gleichung und der eben angeführten Bemerkung folgt folgendes Gesetz:

> Wenn ein festes System um eine gegebene Axe rotirt, so ist der resultirende Druck aller in den einzelnen Massenelementen wirkenden Normalkräfte derselbe, welcher auch statt finden würde, wenn die Gesammtmasse des Systems in einem Punkte vereinigt, dessen Abstand gleich dem kürzesten Abstande des Schwerpunkts des Systems von der Drehaxe ist, mit der gemeinschaftlichen Winkelgeschwindigkeit des Systems um dieselbe Axe rotirt; für jede durch den Schwerpunkt gehende Rotationsaxe ist der Druck aller Normalkräfte gleich Null.

Rotation eines freien Systems. — Freie Axen.

§ 88. In einem freien System geht die Drehaxe immer durch den Schwerpunkt des Systems (§ 82. S. 157). Die Normalkräfte sind hier also immer als Kräfte aufzufassen, die in parallelen Ebenen liegen, und deren Resultirende gleich Null ist; der Fall entspricht also dem in § 75 unter C. S. 116 behandelten. Solche Kräfte können aber im Allgemeinen noch ein resultirendes Kräftepaar haben, dessen Ebene und Moment durch die Gleichungen 123), 123a) und 123b) zu bestimmen bleibt. Nach 123a) ist der Neigungswinkel der Paarebene gegen die parallele Ebene, in welcher die Kräfte liegen zu finden; da nun die Kraftrichtungen hier sämmtlich