den Profil in das räumliche Trägheitsmoment der Richtlinie.

4) Wenn man die Trägheitsmomente derselben Ebene in Beziehung auf zwei in dieser Ebene sich rechtwinklig schneidende Axen zusammenaddirt, so erhält man das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Axe, die im Durchschnittspunkt der beiden erstgenannten Axen auf der Ebene normal steht (polares Trägheitsmoment); denn es sei:

$$T_{\prime} = \Sigma(dV.R^2)$$

das Trägheitsmoment der Ebene in Bezug auf die zuletzt erwähnte Axe, und man nehme diese und die beiden in der Ebene liegenden Axen als Koordinatenaxen, dann ist offenbar, wenn x und y die Abstände des Elements dV von den beiden letztgenannten Axen bezeichnen $R^2 = x^2 + y^2$:

$$152)\quad \Sigma(dV.R^2) = \Sigma(dV.x^2) + \Sigma(dV.y^2),$$

worin die Werthe $\Sigma(dV.x^2)$ und $\Sigma(dV.y^2)$ die Trägheitsmomente der Ebene in Bezug auf die Axe X und Y ausdrücken.

Ist dz die Dicke eines räumlichen Elementes, so ist offenbar das Trägheitsmoment eines prismatischen Körpers, der jene Ebene zur Grundfläche hat:

$$T_{\prime} = \Sigma\left\{[\Sigma(dV.R^2)].dz\right\} = \Sigma(dV.R^2)\ (\Sigma.dz)$$

$$152\text{a})\quad T_{\prime} = z.\Sigma(dV.R^2) = z\left\{\Sigma(dV.x^2) + \Sigma(dV.y^2)\right\}.$$

Gesetze für die Beziehungen zwischen den auf ein festes System angebrachten und den in dem festen System thätigen Kräften. — Massenwiderstände.

§ 86. Durch die Untersuchungen der §§ 81 bis 85 ist es gelungen, die Bewegung eines festen Systems zurückzuführen auf die Bewegung von Punkten, in denen die Masse des Systems vereinigt zu denken ist; nämlich so, daſs man die fortschreitende Bewegung des Systems immer so betrachten kann, als ob die Gesammtmasse des Systems im Schwerpunkt vereinigt, die fortschreitende Bewegung erleide, und daſs man die drehende Bewegung des Systems immer so auffassen kann, als ob die Gesammtmasse des Systems in einem Abstande von der Rotationsaxe gleich dem Drehungshalbmesser die drehende Bewegung erleide. Hierdurch ist man im Stande die Gesetze, welche wir in den Abschnitten a) und b) für die Bewegung eines Massenelementes entwickelt haben, auf die Bewegung eines Systems von Massenelementen zu beziehen.

Die in dem System thätigen (lebendigen) Kräfte und folglich auch ihre Resultirenden sind nach der Voraussetzung nichts anderes, als Kräfte, welche wir für die Wirkung der auf das System angebrachten Kräfte substituiren; es folgt hieraus ohne Weiteres (§ 35. S. 38) dafs in jedem Augenblick die Wirkung der sämmtlichen auf das System angebrachten Kräfte gleich der Wirkung der denselben substituirten Kräfte sein müsse. Bezeichnet

dL das Leistungselement der Resultirenden sämmtlicher auf das System angebrachten Kräfte in Bezug auf fortschreitende Bewegung,
$dL_{\prime}$ das Leistungselement der Resultirenden sämmtlicher auf das System angebrachten auf Drehung wirkenden Kräfte,
M die Gesammtmasse des Systems,
ds das Wegelement,
f das Aenderungsmaafs (die Beschleunigung) und
c die Geschwindigkeit des Schwerpunkts des Systems,
$J_{\prime}$ das Trägheitsmoment,
$\varrho_{\prime}$ den Drehungshalbmesser,
w die Winkelgeschwindigkeit, und
$f_{\prime}$ das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit,

so mufs sein:

$$153)\quad \begin{cases} dL = M.f.ds = M.c.dc \\ dL_{\prime} = J_{\prime}.w.dw = M.\varrho_{\prime}^2.w.dw, \end{cases}$$

folglich:

$$153a)\quad \begin{cases} dL + dL_{\prime} = M.c.dc + J_{\prime}.w.dw \\ \qquad\qquad\; = M.(c.dc + \varrho_{\prime}^2.w.dw), \end{cases}$$

oder wenn $v = \varrho_{\prime}.w$ die Geschwindigkeit ist, mit welcher ein Punkt in den Abstand $\varrho_{\prime}$ von der Drehaxe rotirt:

$$153b)\quad \begin{cases} dL = M.c.dc \\ dL_{\prime} = M.v.dv \\ dL + dL_{\prime} = M.(c.dc + v.dv). \end{cases}$$

Diese wichtigen Gleichungen drücken folgendes Gesetz aus:

1) Wenn ein festes System unter dem Einflufs beliebiger Kräfte sich bewegt, so ist in jedem Augenblick das Leistungselement der Resultirenden der auf das System **angebrachten** Kräfte sowohl für die fortschreitende, als für die drehende Bewegung gleich dem Leistungselement der sämmtlichen in dem System **thätigen** Kräfte.

Da wir nach § 71, zufolge der Bemerkung auf S. 99, die Resultante der fortschreitenden Bewegung in jedem beliebigen

Punkt angreifend denken können; so lange es nur darauf ankommt, die Gesetze der fortschreitenden Bewegung zu untersuchen, so können wir, indem wir nur die fortschreitende Bewegung des Systems betrachten, die Resultante der fortschreitenden Bewegung im Schwerpunkt, welcher ja die fortschreitende Bewegung des ganzen Systems repräsentirt, angreifend denken, und wenn wir die Bemerkung am Ende der S. 98 beachten, ergiebt sich folgendes Gesetz:

2) Die fortschreitende Bewegung des Schwerpunkts eines festen Systems findet immer in derselben Weise statt, als ob sämmtliche auf das System wirkenden Kräfte parallel mit ihren ursprünglichen Richtungen im Schwerpunkt vereinigt wirkten.

Die gleichzeitigen Bewegungen, nämlich die fortschreitende Bewegung des ganzen Systems und die Rotationsbewegung um eine Axe, die durch den Schwerpunkt geht (§ 82), kann man auch nach dem Grundsatz No. 1 in § 24 als innerhalb der Dauer eines Zeitelements aufeinander folgend betrachten. Während nun die drehende Bewegnng erfolgt, kann man offenbar den Schwerpunkt, durch welchen nothwendig die Drehaxe des Systems geht (§ 82), für diesen Augenblick als fixen Punkt des Systems auffassen. Die Lage der Drehaxe wird sich daher nach dem Gesetz in § 79. No. 1 (S. 145) ermitteln lassen. Es folgt hieraus das Gesetz:

3) Die Lage der Drehaxe eines festen Systems wird gefunden, wenn man durch den Schwerpunkt drei normale Koordinatenaxen legt, die Momente der auf das System wirkenden Kräfte für jede dieser Axen bestimmt und nach der Gleichung 141c) (resp. 138) die Lage der resultirenden Paaraxe des Systems gegen die angenommenen Axen ermittelt.

Aus den Gleichungen 153) und 153a) folgt:

$$154)\quad \begin{cases} dL - M.c.dc = 0 \\ dL_{,} - J_{,}.w.dw = 0 \\ dL + dL_{,} - M.c.dc - J_{,}.w.dw = 0. \end{cases}$$

Die Werthe $-M.c.dc$ und $-J_{,}.w.dw$ drücken aber nichts anders aus, als die Leistungselemente der Resultirenden von Kräften, welche den lebendigen Kräften der Gröfse nach gleich, der Richtung nach entgegengesetzt sind, solche Kräfte würden also als Gegenkräfte der in dem System wirksamen Kräfte erscheinen, und wenn man daher in den einzelnen Massenelementen die Gegenkräfte der in dem System wirksamen Kräfte angebracht denkt, so würde zufolge der Gleichungen 154) Gleichgewicht in dem System vorhanden sein, denn die Gleichungen 154) sind nichts anderes, als die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht. Da die in den einzelnen Massenelementen wirksam gedachten Kräfte solche sind, welche in den Massenelementen die entsprechende Bewegung erzeugen würden, so sind ihre Gegenkräfte als solche aufzufassen, welche der Bewegung der Massenelemente entgegenwirken, wir wollen sie daher als die Massenwiderstände der Bewegung bezeichnen, und es folgt aus der Gleichung 154) das Gesetz:

4) Wie auch die auf ein festes System wirkenden Kräfte beschaffen sein mögen, so ist doch in jedem Zeitelement zwischen diesen Kräften und den Massenwiderständen der Bewegung Gleichgewicht vorhanden.

Es lassen sich also für jedes Zeitelement die Gleichgewichtsgesetze (§ 69 und folgende) auf ein jedes System, das sich in Bewegung befindet, anwenden, sobald man die sämmtlichen auf das System angebrachten, und die sämmtlichen in dem System wirkenden Massenwiderstände in Betracht zieht.

Der aus sämmtlichen lebendigen Kräften der fortschreitenden Bewegung resultirende Druck für irgend eine Richtung drückt sich aus nach Gleichung 143) (S. 152) durch $M.f$, folglich der Druck der Massenwiderstände durch $-M.f$; und das Moment des aus sämmtlichen lebendigen Kräften der drehenden Bewegung resultirenden Kräftepaars drückt sich aus nach Gleichung 145c) (S. 158) durch $f_{,}.J_{,}$, folglich das Moment der Massenwidersände in Bezug auf drehende Bewegung durch $-f_{,}.J_{,}$. Wenn nun die Resultirende der fortschreitenden Bewegung aus sämmtlichen auf das System angebrachten Kräften für dieselbe Richtung mit $\Sigma(K)$ und das Moment des resultirenden Kräftepaars aus sämmtlichen auf das System angebrachten Kräften für dieselbe Axe mit $\Sigma(Ka)$ bezeichnet wird, so mufs nach dem eben entwikkelten Satze No. 4 und zufolge der Bedingungen des Gleichgewichts sein:

$$154\text{a})\quad \begin{cases} \Sigma K - M.f = 0 \\ \Sigma(Ka) - f_{,}.J_{,} = 0, \end{cases}$$

und daraus folgt:

das Aenderungsmaafs der fortschreitenden Bewegung:

$$154\mathrm{b})\quad f = \frac{\Sigma(K)}{M} = \frac{\text{Resultirender Druck}}{\text{Gesammtmasse}},$$

und das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit:

$$154\mathrm{c})\quad f_{,} = \frac{\Sigma(Ka)}{J_{,}} = \frac{\text{Summe der statischen Momente}}{\text{Trägheitsmoment}}.$$

Substituirung der auf Drehung wirkenden Kräfte eines festen Systems durch die Normalkräfte und Tangentialkräfte. Resultirende der Normalkräfte.

§ 87. Betrachten wir ein festes System, welches um irgend eine Axe rotirt, die Axe selbst möge fortschreiten oder nicht. Wenden wir auf jedes Massenelement die Betrachtungen an, welche wir in § 42 und 43 angestellt haben, so können wir die Bewegungen der einzelnen Massenelemente allemal auch erzeugt denken durch eine Normalkraft und eine Tangentialkraft; wir können also anstatt der Kräftegruppe, welche wir bisher als die in dem System wirksamen Kräfte der rotirenden Bewegung bezeichnet haben, noch andere Kräftegruppen substituiren, nämlich so, dafs wir in jedem Augenblick in jedem Massenelement eine konstantwirkende Normalkraft, und eine im Gleichgewicht befindliche Tangentialkraft wirksam denken. Die in den einzelnen Massenelementen wirkenden Tangentialkräfte sind in ihren Angriffspunkten einzeln im Gleichgewicht, ihr Druck auf das System ist folglich gleich Null (§ 34); die in den einzelnen Massenelementen wirksamen Normalkräfte wirken in der Richtung des Halbmessers des Kreiselements, welches das Massenelement in diesem Augenblick durchläuft; sie liegen folglich alle in parallelen Ebenen und ihre Richtungen schneiden sämmtlich die Drehaxe, sie üben auf jedes Massenelement einen Druck, durch welchen die Ablenkung des Massenelements von der Richtung der Tangente bedingt wird, diesem Druck (die Centripetalkraft) entspricht in jedem Massenelement eine gleich grofse entgegengesetzt gerichtete Reaktion (Centrifugalkraft), welche zunächst die Festigkeit des Systems in Anspruch nimmt, indem sie das Bestreben darstellt, die einzelnen Massenelemente radial von der Drehaxe zu entfernen. Wir können nun für die sämmtlichen in den einzelnen Massenelementen wirksamen Normalkräfte, die Resultirende bestimmen, wobei es im Allgemeinen gleichgiltig ist, ob wir für diese Untersuchung die Centrifugalkräfte, oder die Centripetalkräfte benutzen; die