Systems für diese Axe, und bezeichnen ihn mit $\varrho_{\prime}$. Unter dem „Drehungshalbmesser", ohne weitere Bezeichnung der Axe, ist der Drehungshalbmesser in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt gehende Axe verstanden; wir bezeichnen einen solchen mit ϱ.

Für homogene Systeme ist $M = V \cdot \frac{\gamma}{g}$ und 146c) $J_{\prime} = \frac{\gamma}{g} \cdot T_{\prime}$ folglich:

$$147b) \left\{ \begin{array}{l} \varrho_{\prime} = \sqrt{\left(\frac{J_{\prime}}{M}\right)} = \sqrt{\left(\frac{T_{\prime}}{V}\right)} \\ \varrho = \sqrt{\left(\frac{J}{M}\right)} = \sqrt{\left(\frac{T}{V}\right)} \\ M = \frac{J}{\varrho^2} = \frac{J_{\prime}}{\varrho_{\prime}^2} \end{array} \right.$$

Aus der Gleichung 147) und 147a) ergiebt sich:

$$147c) \left\{ \begin{array}{l} a^2 \cdot M_{\prime} = \varrho'^2 \cdot M \\ M_{\prime} = \frac{\varrho'^2}{a^2} \cdot M \end{array} \right.$$

d. h. die auf einen gegebenen Abstand a von der Drehaxe reduzirte Masse ist gleich der Gesammtmasse des Systems, multiplizirt mit dem Quadrat des Verhältnisses des Drehungshalbmessers des Systems für diese Axe zu dem gegebenen Abstand.

Uebrigens bemerkt man, dafs wenn man die Masse des Systems auf einen gegebenen Abstand reduzirt, es für die Betrachtung gleichgiltig bleibt, ob man diese reduzirte Masse in einen Punkt konzentrirt denkt, oder ob man sie in einem Cylindermantel, dessen Axe die Rotationsaxe und dessen Halbmesser der gegebene Abstand ist, beliebig vertheilt denkt, denn es kommt für die hier vorliegenden Untersuchungen nur darauf an, dafs sämmtliche Elemente der reduzirten Masse denselben Abstand von der Drehaxe haben.

Einige Sätze für die Berechnung der räumlichen Trägheitsmomente.

§ 85. Die Berechnung der räumlichen Trägheitsmomente ist eine rein geometrische Operation. Wir wollen hier jedoch einige Sätze zusammenstellen, welche diese Berechnung in vielen Fällen erleichtern. Es läfst sich übrigens nach der Bemerkung auf S. 155 bei Gelegenheit der Schwerpunktsbestimmungen übersehen, was man unter dem räumlichen Trägheitsmoment von Linien, Flächen und Körpern zu verstehen habe.

1) Ist J das Trägheitsmoment eines Systems in Bezug auf eine Axe, die durch den Schwerpunkt des Systems geht, und ist M die

Masse des Systems, so ist das Trägheitsmoment in Bezug auf eine in dem Abstande e mit jener parallele Axe

$$148)\quad J_{,} = J + Me^2,$$

denn wenn man die Richtung von dem Schwerpunkt normal auf die neue Axe als Axe der X eines Koordinatensystems ansieht, dessen zweite (Y) Axe auf der durch beide Axen zu legenden Ebene normal steht, so ist für den Schwerpunkt als Anfangspunkt der Koordinaten der Abstand jedes Massenelementes von der Axe der Z, welche mit der Rotationsaxe durch den Schwerpunkt identisch ist:

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

und der Abstand von der neuen Axe ist offenbar

$$R = \sqrt{[(x+e)^2 + y^2]}.$$

Es ist also:

$$J_{,} = \Sigma\,(dm\,.\,R^2) = \Sigma\left(dm\,.\,[(x+e)^2 + y^2]\right)$$

und wenn man entwickelt:

$$J_{,} = \Sigma\,[dm\,(x^2 + y^2)] + \Sigma\,(dm)\,e^2 + 2e\,.\,\Sigma\,(dmx).$$

Nun ist $\Sigma(dmx) = 0$ nach S. 154, $\Sigma\,[dm\,(x^2+y^2)] = \Sigma\,(dm\,r^2) = J$ und $\Sigma(dm) = M$, und man erhält durch Einsetzung dieser Werthe die Gleichung 148).

In gleicher Weise ergiebt sich das räumliche Trägheitsmoment:

$$148\text{a})\quad T_{,} = T + Ve^2,$$

wenn V das Volum des Systems bezeichnet.

2) Bezeichnet ϱ den Trägheitshalbmesser des Systems, so kann man in die Gleichung 148) setzen: $J = M\varrho^2$ (147b) und man hat

$$149)\quad \begin{cases} J_{,} = M(\varrho^2 + e^2) \\ T_{,} = V(\varrho^2 + e^2). \end{cases}$$

Hieraus folgt, daſs wenn der Trägheitshalbmesser ϱ im Vergleich zu e sehr klein ist, das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Axe näherungsweise ausgedrückt werden kann durch:

$$149\text{a})\quad \begin{cases} J_{,} = Me^2 \\ T_{,} = Ve^2, \end{cases}$$

d. h. durch das Produkt aus der Masse, beziehlich dem Volum in das Quadrat des Abstandes des Schwerpunkts von der Rotationsaxe.

Da aber aus Gleichung 147b) folgt:

$$J_{,} = M\varrho_{,}^2; \quad T_{,} = V\varrho_{,}^2,$$

so hat man nach Einsetzung dieser Werthe in Gleichung 149) und wenn man $\varrho_{,}$ entwickelt:

$$150)\quad \varrho_{,} = \sqrt{(\varrho^2 + e^2)},$$

d. h. der Drehungshalbmesser eines festen Systems in

Bezug auf eine gegebene Axe ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate des Drehungshalbmessers in Bezug auf eine parallele durch den Schwerpunkt gehende Axe und der Entfernung der gegebenen Axe.

Auch folgt nach Gleichung 147c):

$$150\text{a)}\quad M_{\prime} = M \cdot \frac{\varrho^2 + e^2}{a^2},$$

d. h. die auf den Abstand a reduzirte Masse ist gleich der Gesammtmasse des Systems, multiplizirt mit dem Verhältnisse der Summe der Quadrate des Drehungshalbmessers des Systems für eine durch den Schwerpunkt gehende parallele Axe und der Entfernung dieser Axe von der Rotationsaxe zu dem Quadrat des Abstandes a.

3) Denken wir ein System welches durch zwei parallele Ebenen begrenzt wird, und welches sich also durch Ebenen, die mit jenen Begrenzungsebenen parallel sind, in lauter parallele, ebene und unendlich dünne Schichten zerlegen läfst; es sei F der Flächeninhalt einer dieser Schnittflächen, e die Entfernung ihres Schwerpunkts von einer Umdrehungsaxe, t das räumliche Trägheitsmoment der Schnittfläche in Beziehung auf eine durch ihren Schwerpunkt gehende parallele Axe, und dx die Dicke der Schicht. Man hat sodann:

$$151)\quad T_{\prime} = \Sigma(e^2 \cdot F \cdot dx) + \Sigma(t \cdot dx),$$

welcher Ausdruck sich integriren läfst, wenn t und F als Funktionen der Entfernung x der beiden parallelen Begrenzungsebenen gegeben sind.

Wenn ein System durch ein konstantes Profil erzeugt wird, welches sich*) normal auf einer Kurve fortbewegt, indem der Schwerpunkt dieses Profils das Kurvenelement ds beschreibt, so kann man das Trägheitsmoment des zwischen zwei aufeinander folgenden Profilen liegenden Elementes, dessen Volum $F \cdot ds$ ist, ausdrücken nach 149a) näherungsweise durch $t_{\prime} = F \cdot ds \cdot e^2$, folglich das räumliche Trägheitsmoment des ganzen Systems durch:

$$159\text{a)}\quad T_{\prime} = \Sigma(t_{\prime}) = \Sigma(F \cdot ds \cdot e^2) = F \cdot \Sigma(ds \cdot e^2).$$

Es ist aber $\Sigma(ds \cdot e^2)$ nichts anders, als das Trägheitsmoment der Richtlinie des Systems in Bezug auf die betrachtete Rotationsaxe d. h. das räumliche Trägheitsmoment des Systems ist näherungsweise gleich dem Produkte aus dem erzeugen-

*) Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen, von J. V. Poncelet; deutsch von Schnuse, I. S. 152 u. f.

den Profil in das räumliche Trägheitsmoment der Richtlinie.

4) Wenn man die Trägheitsmomente derselben Ebene in Beziehung auf zwei in dieser Ebene sich rechtwinklig schneidende Axen zusammenaddirt, so erhält man das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Axe, die im Durchschnittspunkt der beiden erstgenannten Axen auf der Ebene normal steht (polares Trägheitsmoment); denn es sei:

$$T_{\prime} = \Sigma (dV . R^2)$$

das Trägheitsmoment der Ebene in Bezug auf die zuletzt erwähnte Axe, und man nehme diese und die beiden in der Ebene liegenden Axen als Koordinatenaxen, dann ist offenbar, wenn x und y die Abstände des Elements dV von den beiden letztgenannten Axen bezeichnen $R^2 = x^2 + y^2$:

$$152)\quad \Sigma (dV . R^2) = \Sigma (dV . x^2) + \Sigma (dV . y^2),$$

worin die Werthe $\Sigma (dV . x^2)$ und $\Sigma (dV . y^2)$ die Trägheitsmomente der Ebene in Bezug auf die Axe X und Y ausdrücken.

Ist dz die Dicke eines räumlichen Elementes, so ist offenbar das Trägheitsmoment eines prismatischen Körpers, der jene Ebene zur Grundfläche hat:

$$T_{\prime} = \Sigma \left\{ [\Sigma (dV . R^2)] . dz \right\} = \Sigma (dV . R^2)\ (\Sigma . dz)$$

$$152\text{a})\quad T_{\prime} = z . \Sigma (dV . R^2) = z \left\{ \Sigma (dV . x^2) + \Sigma (dV . y^2) \right\}.$$

Gesetze für die Beziehungen zwischen den auf ein festes System angebrachten und den in dem festen System thätigen Kräften. — Massenwiderstände.

§ 86. Durch die Untersuchungen der §§ 81 bis 85 ist es gelungen, die Bewegung eines festen Systems zurückzuführen auf die Bewegung von Punkten, in denen die Masse des Systems vereinigt zu denken ist; nämlich so, dafs man die fortschreitende Bewegung des Systems immer so betrachten kann, als ob die Gesammtmasse des Systems im Schwerpunkt vereinigt, die fortschreitende Bewegung erleide, und dafs man die drehende Bewegung des Systems immer so auffassen kann, als ob die Gesammtmasse des Systems in einem Abstande von der Rotationsaxe gleich dem Drehungshalbmesser die drehende Bewegung erleide. Hierdurch ist man im Stande die Gesetze, welche wir in den Abschnitten a) und b) für die Bewegung eines Massenelementes entwickelt haben, auf die Bewegung eines Systems von Massenelementen zu beziehen.