Man sieht, dafs das Trägheitsmoment eines festen Systems unabhängig ist von der Gröfse der Kräfte, welche eine drehende Bewegung erzeugen und nur abhängig von der Gruppirung der Massenelemente gegen die Drehaxe. Stellen wir ähnliche Betrachtungen an, wie bei der Bestimmung der Lage des Schwerpunkts (S. 154), so ergiebt sich, indem wir für die Massenelemente deren Gewichte einführen:

$$146)\quad J_{\prime} = \Sigma(dm \,.\, R^2) = \frac{1}{g} \,.\, \Sigma(dG \,.\, \mathrm{R}^2)$$

und wenn wir die Volumenelemente einführen:

$$146\mathrm{a})\quad J_{\prime} = \frac{1}{g} \,.\, \Sigma(dV \,.\, \gamma \,.\, R^2)$$

für homogene Systeme hat man:

$$146\mathrm{b})\quad J_{\prime} = \frac{\gamma}{g} \,.\, \Sigma(dV \,.\, R^2),$$

worin γ das Gewicht der Raumeinheit des Körpers bezeichnet. Der Ausdruck $\Sigma(dV . R^2)$ ist ein rein geometrischer; wir nennen ihn das räumliche Trägheitsmoment des Systems und bezeichnen denselben mit $T_{\prime}$ beziehlich mit T. Es ist also:

$$146\mathrm{c})\quad J_{\prime} = \frac{\gamma}{g} \,.\, T_{\prime};\quad J = \frac{\gamma}{g} \,.\, T.$$

wobei nicht zu vergessen ist, dafs diese Beziehungen nur für homogene Systeme gelten.

Drehungshalbmesser und Reduktion der Massen.

§ 84. Der Ausdruck (145a):

$$\Sigma(dK . R) = J_{\prime} . \frac{dw}{dt} = J_{\prime} . f_{\prime}$$

erscheint als das Moment des resultirenden Kräftepaars der sämmtlichen lebendigen Kräfte der drehenden Bewegung. Man kann dasselbe immer unter der Form Pa ausdrücken, und nach den Gesetzen in § 78 den Werth P oder den Hebelsarm a beliebig wählen, auch kann man die Richtung von $+P$ und $-P$, welche das Kräftepaar bilden und den Angriffspunkt dieser Kräfte in verschiedener Weise variiren. Denken wir den Angriffspunkt der einen Kraft $(-P)$ in der Drehaxe, so stellt a den Hebelarm der andern Kraft $(+P)$ in Bezug auf die Drehaxe dar. Ist der Angriffspunkt von $+P$ ein mit dem System fest verbundener Punkt, so rotirt er mit derselben Winkelgeschwindigkeit, und indem wir die in den einzelnen Massenelementen wirksam gedachten lebendigen Kräfte des Systems durch die Wirkung des resultirenden Kräftepaars ersetzt denken, werden wir nothwendig auch anstatt der in den einzelnen Punkten des Systems vertheilten Massenelemente in dem Angriffspunkt von P eine konzentrirte Masse $(M_{,})$ denken müssen, auf welche wirkend der Druck P dem System dieselbe Winkelgeschwindigkeit ertheilen würde, welche unter dem Einfluſs jener Kräfte statt findet. Ist f das Aenderungsmaaſs des Drucks P, so ist zunächt $P = M_{,} . f$, und da $f = \frac{dc}{dt} = \frac{dw . a}{dt}$, so hat man $P = M_{,} . \frac{dw \, a}{dt}$, folglich das Moment des resultirenden Kräftepaars $Pa = M_{,} . \frac{dw}{dt} . a^2$; es ist aber auch $Pa = \Sigma (dK . R) = J_{,} . \frac{dw}{dt}$, folglich hat man

$$147) \left\{ \begin{array}{l} M_{,} a^2 = J_{,} \\ M_{,} = \frac{J_{,}}{a^2}\,; \quad a = \sqrt{\left(\frac{J_{,}}{M_{,}}\right)}. \end{array} \right.$$

Man nennt das Maaſs der Masse $M_{,}$ welche in dem Abstand a von der Drehaxe vereinigt sein müſste, damit ein in diesem Abstande auf Drehung wirkender Druck dieselbe Winkelgeschwindigkeit in dem System erzeuge, wie die in den einzelnen Massenelementen wirksam gedachten, auf Drehung wirkenden lebendigen Kräfte des Systems: die auf diesen Abstand reduzirte Masse. Die auf einen gegebenen Abstand reduzirte Masse drückt sich aus durch das Trägheitsmoment des Systems in Beziehung auf diese Axe, dividirt durch das Quadrat des gegebenen Abstandes.

Man kann die Masse des Systems auf jeden beliebigen Abstand reduziren, d. h. man kann in jedem beliebigen Abstand von der Drehaxe eine bestimmte Menge materieller Punkte vereinigt denken, so, daſs die einzelnen auf Drehung wirkenden lebendigen Kräfte durch eine einzige in diesem Abstande wirkende Kraft sich ersetzen lassen. Andererseits kann man eine beliebige Masse als reduzirte Masse des Systems betrachten, und den Abstand a berechnen in welchem sie unter der eben genannten Voraussetzung vereinigt sein müſste. Es ist daher auch zulässig diese Masse so zu wählen, daſs sie gleich der Summe aller Massenelemente des Systems ist. In diesem Falle hätten wir für $M_{,}$ zu setzen $(\Sigma dm) = M$ und es würde sich der entsprechende Abstand finden:

$$147\text{a}) \quad a_{,} = \sqrt{\left(\frac{J_{,}}{\Sigma (dm)}\right)} = \sqrt{\left(\frac{J_{,}}{M}\right)} = \varrho_{,}.$$

Wir nennen diesen Abstand, für welchen die reduzirte Masse des Systems gleich der Summe der Massenelemente des Systems ist, den Drehungshalbmesser oder Trägheitshalbmesser des

Systems für diese Axe, und bezeichnen ihn mit $\varrho_{\prime}$. Unter dem „Drehungshalbmesser“, ohne weitere Bezeichnung der Axe, ist der Drehungshalbmesser in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt gehende Axe verstanden; wir bezeichnen einen solchen mit ϱ.

Für homogene Systeme ist $M = V \cdot \frac{\gamma}{g}$ und 146c) $J_{\prime} = \frac{\gamma}{g} \cdot T_{\prime}$ folglich:

$$147\text{b)} \left\{ \begin{aligned} \varrho_{\prime} &= \sqrt{\left(\frac{J_{\prime}}{M}\right)} = \sqrt{\left(\frac{T_{\prime}}{V}\right)} \\ \varrho &= \sqrt{\left(\frac{J}{M}\right)} = \sqrt{\left(\frac{T}{V}\right)} \\ M &= \frac{J}{\varrho^2} = \frac{J_{\prime}}{\varrho_{\prime}^2} \end{aligned} \right.$$

Aus der Gleichung 147) und 147a) ergiebt sich:

$$147\text{c)} \left\{ \begin{aligned} a^2 \cdot M_{\prime} &= \varrho'^2 \cdot M \\ M_{\prime} &= \frac{\varrho'^2}{a^2} \cdot M \end{aligned} \right.$$

d. h. die auf einen gegebenen Abstand a von der Drehaxe reduzirte Masse ist gleich der Gesammtmasse des Systems, multiplizirt mit dem Quadrat des Verhältnisses des Drehungshalbmessers des Systems für diese Axe zu dem gegebenen Abstand.

Uebrigens bemerkt man, dafs wenn man die Masse des Systems auf einen gegebenen Abstand reduzirt, es für die Betrachtung gleichgiltig bleibt, ob man diese reduzirte Masse in einen Punkt konzentrirt denkt, oder ob man sie in einem Cylindermantel, dessen Axe die Rotationsaxe und dessen Halbmesser der gegebene Abstand ist, beliebig vertheilt denkt, denn es kommt für die hier vorliegenden Untersuchungen nur darauf an, dafs sämmtliche Elemente der reduzirten Masse denselben Abstand von der Drehaxe haben.

Einige Sätze für die Berechnung der räumlichen Trägheitsmomente.

§ 85. Die Berechnung der räumlichen Trägheitsmomente ist eine rein geometrische Operation. Wir wollen hier jedoch einige Sätze zusammenstellen, welche diese Berechnung in vielen Fällen erleichtern. Es läfst sich übrigens nach der Bemerkung auf S. 155 bei Gelegenheit der Schwerpunktsbestimmungen übersehen, was man unter dem räumlichen Trägheitsmoment von Linien, Flächen und Körpern zu verstehen habe.

1) Ist J das Trägheitsmoment eines Systems in Bezug auf eine Axe, die durch den Schwerpunkt des Systems geht, und ist M die