denn die in den verschiedenen Zeitelementen stetig aufeinanderfolgenden Lagen des Angriffspunkts einer Kraft bilden eben die Bahn desselben. Da nun der Angriffspunkt der Resultirenden der lebendigen Kräfte des Systems in jedem Augenblick derselbe Punkt, nämlich der Schwerpunkt des Systems ist, so geht die Drehaxe des freien Systems stets durch den Schwerpunkt desselben.

Die Bewegung eines freien Systems ist also immer so aufzufassen, als ob die Gesammtmasse des Systems im Schwerpunkt vereinigt, sich fortschreitend bewegte, und als ob sämmtliche Massenelemente gleichzeitig eine Drehung um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe und zwar mit gemeinschaftlicher Winkelgeschwindigkeit erleiden.

Trägheitsmoment eines festen Systems.

§ 83. Betrachten wir nunmehr ein festes System, welches um eine beliebige Axe rotirt. Die einzelnen Massenelemente beschreiben in jedem Augenblick Wegelemente, die in parallelen zur Drehaxe normalen Ebenen liegen (S. 86. § 65 a.). Denkt man die kürzesten Abstände der Massenelemente von der Drehaxe, so fallen die bei der Drehung beschriebenen Wegelemente mit Bogenelementen zusammen, deren Radien diese Abstände sind, und deren Mittelpunkte in der Drehaxe liegen. Die in den einzelnen Massenelementen zu denkenden lebendigen Kräfte, welche diese Drehung hervorbringen, fallen aber ihrer Richtung nach mit diesen Wegelementen zusammen, es bilden also jene Radien auch die kürzesten Abstände der Kraftrichtungen von der Drehaxe, und da diese Kraftrichtungen mit der Drehaxe sämmtlich rechte Winkel machen, da sie in Ebenen liegen, welche zur Drehaxe normal sind, so drückt sich ihr Moment aus durch $dK.R$, wenn dK der in dem Massenelement wirksame Druck, und R der Abstand des Massenelements von der Drehaxe ist, oder indem wir setzen $dK = dm.f$ (S. 11. No. 4) und $f = \frac{dc}{dt}$ (S. 18) auch durch $dm.R.\frac{dc}{dt}$. Führen wir nach S. 50 anstatt dc die Winkelgeschwindigkeit w ein, so hat man $dc = dw.R$, folglich ist $f = \frac{dw}{dt}.R$, und es ist das auf Drehung wirkende Moment unter der Form:

$$dm.R^2.\frac{dw}{dt} = dK.R$$

für jedes einzelne Massenelement darzustellen.

Das Leistungselement der in dem Massenelement wirksam gedachten Kraft ist aber $dK.ds$, oder $dm.f.c.dt$ (S. 27), oder (indem man für c den Werth wR (S. 50) und für f wiederum $\frac{dw.R}{dt}$ setzt):

$$dm.R^2.w.dw = dK.ds.$$

Vergleicht man diesen Werth mit dem eben gefundenen Ausdruck für das statische Moment, so ergiebt sich:

$$145)\quad dK.ds = (dK.R).w.dt,$$

d. h. das Leistungselement einer Kraft, welche eine Drehung um eine Axe bewirkt, ist gleich dem statischen Moment in Bezug auf diese Axe, multiplizirt mit der Winkelgeschwindigkeit und dem Zeitelement.

Die Summe der statischen Momente drückt sich offenbar aus durch:

$$145a)\quad \Sigma(dK.R) = \Sigma\left(dm.R^2.\frac{dw}{dt}\right) = \frac{dw}{dt}.\Sigma(dm.R^2) = f_,.\Sigma(dm.R^2)$$

(wenn man nämlich unter $f_, = \frac{dw}{dt}$ das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit versteht), und die Summe der Leistungselemente sämmtlicher lebendigen Kräfte der drehenden Bewegung durch

$$145b)\quad \Sigma(dK.ds) = \Sigma(dm.R^2.w.dw) = w.dw.\Sigma(dm.R^2).$$

In beiden Ausdrücken kommt der Faktor $\Sigma(dm.R^2)$, oder die Summe der Produkte aus jedem Massenelement in das Quadrat seines kürzesten Abstandes von der Drehaxe vor. Diese Summe nennt man das Trägheitsmoment des festen Systems für diese Drehaxe.

Wenn man die Drehaxe, für welche das Trägheitsmoment gilt, nicht besonders bezeichnet, also allgemein vom Trägheitsmoment eines Systems spricht, so versteht man darunter, dafs dasselbe für eine Axe gilt, die durch den Schwerpunkt geht. Wir bezeichnen künftig das Trägheitsmoment eines Systems für eine durch den Schwerpunkt gehende Axe immer mit J, und für eine andere, nicht durch den Schwerpunkt gehende Axe mit $J_,$. Die Gleichungen 145a) und 145b) gehen also im Allgemeinen in die Form über:

$$145c)\quad \begin{cases} \Sigma(dK.R) = f_,.J_, = \frac{dw}{dt}.J_, \\ \Sigma(dK.ds) = J_,.w.dw, \end{cases}$$

worin das Trägheitsmoment

$$145d)\quad J_, = \Sigma(dm.R^2)$$

zu setzen ist.

Man sieht, dafs das Trägheitsmoment eines festen Systems unabhängig ist von der Gröfse der Kräfte, welche eine drehende Bewegung erzeugen und nur abhängig von der Gruppirung der Massenelemente gegen die Drehaxe. Stellen wir ähnliche Betrachtungen an, wie bei der Bestimmung der Lage des Schwerpunkts (S. 154), so ergiebt sich, indem wir für die Massenelemente deren Gewichte einführen:

$$146)\quad J_{,} = \Sigma(dm\,.\,R^2) = \frac{1}{g}\,.\,\Sigma(dG\,.\,\mathrm{R}^2)$$

und wenn wir die Volumenelemente einführen:

$$146\text{a})\quad J_{,} = \frac{1}{g}\,.\,\Sigma(dV\,.\,\gamma\,.\,R^2)$$

für homogene Systeme hat man:

$$146\text{b})\quad J_{,} = \frac{\gamma}{g}\,.\,\Sigma(dV\,.\,R^2),$$

worin γ das Gewicht der Raumeinheit des Körpers bezeichnet. Der Ausdruck $\Sigma(dV.R^2)$ ist ein rein geometrischer; wir nennen ihn das räumliche Trägheitsmoment des Systems und bezeichnen denselben mit $T_{,}$ beziehlich mit T. Es ist also:

$$146\text{c})\quad J_{,} = \frac{\gamma}{g}\,.\,T_{,};\quad J = \frac{\gamma}{g}\,.\,T.$$

wobei nicht zu vergessen ist, dafs diese Beziehungen nur für homogene Systeme gelten.

Drehungshalbmesser und Reduktion der Massen.

§ 84. Der Ausdruck (145a):

$$\Sigma(dK\,.\,R) = J_{,}\,.\,\frac{dw}{dt} = J_{,}\,.\,f_{,}$$

erscheint als das Moment des resultirenden Kräftepaars der sämmtlichen lebendigen Kräfte der drehenden Bewegung. Man kann dasselbe immer unter der Form Pa ausdrücken, und nach den Gesetzen in § 78 den Werth P oder den Hebelsarm a beliebig wählen, auch kann man die Richtung von $+P$ und $-P$, welche das Kräftepaar bilden und den Angriffspunkt dieser Kräfte in verschiedener Weise variiren. Denken wir den Angriffspunkt der einen Kraft $(-P)$ in der Drehaxe, so stellt a den Hebelarm der andern Kraft $(+P)$ in Bezug auf die Drehaxe dar. Ist der Angriffspunkt von $+P$ ein mit dem System fest verbundener Punkt, so rotirt er mit derselben Winkelgeschwindigkeit, und indem wir die in den einzelnen Massenelementen wirksam gedachten lebendigen Kräfte des Systems durch die Wirkung des resultirenden Kräftepaars ersetzt denken, werden wir nothwendig auch anstatt der in den einzelnen Punkten