

Der Begriff des festen Systems (§ 63) gestattet für unsere Untersuchungen jede beliebige Gruppierung der materiellen Punkte (Massenelemente), wir können sie nach denselben Gesetzen gruppiert denken, nach denen geometrische Punkte sich gruppieren lassen, also auch nach den Gesetzen, nach denen diese in Gestalt von Linien, Flächen, Körpern sich anordnen lassen, und es wird nach dieser Bemerkung verständlich sein, wenn wir vom Schwerpunkt einer Linie, einer Fläche oder eines Körpers sprechen.

Wir müssen hier auf die geometrischen Bestimmungen der Schwerpunktslagen in Linien, Flächen und Körpern, sowie auf die weitem Untersuchungen der geometrischen Bedeutung des Schwerpunkts verzichten. Die wichtigsten Resultate jener Bestimmungen stellen wir weiter unten zusammen, und fügen hier gleichfalls in Gestalt eines Resultates zwei wichtige Gesetze an, welche die geometrische Bedeutung des Schwerpunkts erkennen lassen. Es sind dies die sogenannten Guldinschen Regeln *); sie lauten:

- 1) Der Inhalt eines Rotationskörpers [einer Rotationsfläche] ist gleich dem Produkte aus der Erzeugungsfäche [Erzeugungslinie] in den bei der Erzeugung des Rotationskörpers [der Rotationsfläche] durchlaufenen Weg des Schwerpunktes der erzeugenden Fläche [der Linie].
- 2) Der Inhalt jedes Körpers [jeder Oberfläche], welcher zwischen zwei beliebigen Ebenen liegt, und außerdem von lauter parallelen geraden Linien begrenzt [gebildet] wird (schief abgeschnittener prismatischer Körper) ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt [Umfang] der ebenen Figur, welche den Durchschnitt mit der einen Ebene darstellt in den normalen Abstand dieser Ebene von dem Schwerpunkt der Fläche [des Umfangs] der Durchschnittsfigur mit der andern Ebene.

Gesetz für die Bewegung und die Lage der Drehaxe eines freien Systems.

§ 82. Wenn auf ein festes System beliebige Kräfte einwirken, so nimmt dasselbe, wie wir in § 65 gesehen haben, im Allgemeinen gleichzeitig außer der allen Massenelementen gemeinschaftlichen

*) Den Beweis dieser Sätze siehe „Weisbach, Ingenieur und Maschinen-Mechanik, Th. I. § 119 und 120“, und: „Die mechanischen Prinzipien der Ingenieurkunst und Architektur von Moseley; deutsch von Scheffler,“ I. § 38 bis 41.

fortschreitenden Bewegung auch eine Rotationsbewegung an, welche um eine gemeinschaftliche Axe mit einer allen Massenelementen gemeinsamen Winkelgeschwindigkeit statt findet. Die Axe um welche das System rotirt, ist entweder durch fixe Punkte (§ 79) bestimmt, und das System ist also gezwungen um eine gewisse Axe zu rotiren, oder das System ist frei, und dann wird offenbar die Axe um welche das System rotirt im Allgemeinen eine Lage annehmen, die von der Lage und Beschaffenheit der Kräfte abhängig ist, welche eine Rotation des Systems bewirken. Folgen wir der angenommenen Vorstellung, so haben wir uns die fortschreitende Bewegung in irgend einem Zeitelement durch Kräfte hervorgebracht zu denken, die, in den einzelnen Massenelementen wirksam, lediglich diese fortschreitende Bewegung erzeugen, und die drehende Bewegung, welche gleichzeitig erfolgt, haben wir durch eine andere Gruppe von Kräften hervorgebracht zu denken, welche in jedem einzelnen Massenelement wirksam, lediglich diejenige drehende Bewegung erzeugen, welche das Massenelement erleidet. Da nun die lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung in dem festen System nur eine fortschreitende, aber keine drehende Bewegung hervorbringen sollen, und da wir den Angriffspunkt ihrer Resultirenden der Bedingung gemäß bestimmt haben, daß wenn wir anstatt der Kräfte nur ihre Resultirende wirksam denken, in dem System gleichfalls keine Drehung erfolge: so muß offenbar die Richtung dieser Resultirenden unter allen Umständen die Drehungsaxe des Systems schneiden; oder mit andern Worten: die Axe, um welche das System unter dem Einfluß der zweiten Gruppe der lebendigen Kräfte gleichzeitig eine Drehung erleidet, muß durch die Richtung der Resultirenden der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung gehen; denn im entgegengesetzten Falle würde die Resultirende der fortschreitenden Bewegung einen Hebelsarm in Bezug auf diese Axe besitzen, und gleichfalls auf Drehung um dieselbe wirken, was der Voraussetzung widerspricht. Da nun aber in jedem Augenblick die Axe, um welche das System eine Drehung erleidet die Richtung der Resultirenden der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung schneiden soll, so muß sie auch in jedem Augenblick die Bahn des Angriffspunkts dieser Resultirenden schneiden, weil nämlich diese Bahn in jedem Augenblick mit der für diesen Augenblick statt findenden Richtung der Resultirenden zusammenfällt. Dies heißt aber nichts anders, als daß die Axe, um welche sich das freie System dreht in jenem Augenblick durch den Angriffspunkt der Resultirenden selbst gehen müsse,

denn die in den verschiedenen Zeitelementen stetig aufeinanderfolgenden Lagen des Angriffspunkts einer Kraft bilden eben die Bahn desselben. Da nun der Angriffspunkt der Resultirenden der lebendigen Kräfte des Systems in jedem Augenblick derselbe Punkt, nämlich der Schwerpunkt des Systems ist, so geht die Drehaxe des freien Systems stets durch den Schwerpunkt desselben.

Die Bewegung eines freien Systems ist also immer so aufzufassen, als ob die Gesamtmasse des Systems im Schwerpunkt vereinigt, sich fortschreitend bewegte, und als ob sämtliche Massenelemente gleichzeitig eine Drehung um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe und zwar mit gemeinschaftlicher Winkelgeschwindigkeit erleiden.

Trägheitsmoment eines festen Systems.

§ 83. Betrachten wir nunmehr ein festes System, welches um eine beliebige Axe rotirt. Die einzelnen Massenelemente beschreiben in jedem Augenblick Wegelemente, die in parallelen zur Drehaxe normalen Ebenen liegen (S. 86. § 65 a.). Denkt man die kürzesten Abstände der Massenelemente von der Drehaxe, so fallen die bei der Drehung beschriebenen Wegelemente mit Bogenelementen zusammen, deren Radien diese Abstände sind, und deren Mittelpunkte in der Drehaxe liegen. Die in den einzelnen Massenelementen zu denkenden lebendigen Kräfte, welche diese Drehung hervorbringen, fallen aber ihrer Richtung nach mit diesen Wegelementen zusammen, es bilden also jene Radien auch die kürzesten Abstände der Krafrichtungen von der Drehaxe, und da diese Krafrichtungen mit der Drehaxe sämtlich rechte Winkel machen, da sie in Ebenen liegen, welche zur Drehaxe normal sind, so drückt sich ihr Moment aus durch $dK \cdot R$, wenn dK der in dem Massenelement wirksame Druck, und R der Abstand des Massenelements von der Drehaxe ist, oder indem wir setzen $dK = dm \cdot f$ (S. 11. No. 4) und $f = \frac{dc}{dt}$ (S. 18) auch durch $dm \cdot R \cdot \frac{dc}{dt}$. Führen wir nach S. 50 anstatt dc die Winkelgeschwindigkeit w ein, so hat man $dc = dw \cdot R$, folglich ist $f = \frac{dw}{dt} \cdot R$, und es ist das auf Drehung wirkende Moment unter der Form:

$$dm \cdot R^2 \cdot \frac{dw}{dt} = dK \cdot R$$

für jedes einzelne Massenelement darzustellen.