sen, dafs man es hierbei stets mit den Momenten zu thun hat, dafs also die Kräfte jedes substituirten Kräftepaars in Bezug auf fortschreitende Bewegung sich aufheben, und dafs folglich durch dergleichen Reduktionen der Druck auf die fixen Punkte nicht geändert wird.

Von den in einem festen System thätigen Kräften.

Thätige (lebendige) Kräfte der fortschreitenden Bewegung; Mittelpunkt derselben, Schwerpunkt, Guldinsche Regeln.

§ 81. Wenden wir uns nunmehr wieder zu den Betrachtungen des § 66. S. 88. Wir haben in dem Vorstehenden die wichtigsten Gesetze über die Wirkung der auf ein festes System angebrachten Kräfte entwickelt, und es wird sich nun darum handeln, die Gesetze für die in einem festen System thätigen Kräfte festzustellen. Nachdem dies geschehen, haben wir noch die Beziehungen zu untersuchen, welche zwischen den auf ein festes System angebrachten, und den in einem festen System thätigen Kräften statt finden. Zunächst ist wiederholt darauf hinzuweisen, dafs der Begriff der in einem System thätigen Kräfte nur auf einer Vorstellung beruht, welche wir zur Erleichterung der Anschauung gewisser Vorgänge eingeführt haben. Wir substituiren für die auf das System in verschiedenen Angriffspunkten angebrachten Kräfte andere Kräfte, nämlich solche, die in jedem einzelnen Massenelement thätig sein müfsten, um in dem System genau dieselbe Wirkung hervorzubringen, welche jene erzeugen (S. 66), oder mit anderen Worten, wir denken uns in dem System anstatt der auf dasselbe angebrachten Kräfte, andere Kräfte angebracht, deren Betrachtung bequemer ist. Da also die in einem System thätigen Kräfte sich vollkommen ansehen lassen, als eine neue Gruppe auf das System angebrachter Kräfte, durch welche wir die Wirkung der ursprünglich angebrachten Kräfte ersetzt denken, so werden sie auch im Allgemeinen keinen anderen Gesetzen unterliegen, als denen, welche wir für die auf ein festes System angebrachten Kräfte in den vorigen Paragraphen hergeleitet haben, nur werden diese Gesetze sich dadurch modificiren, dafs gewisse neue Bedingungen hinzutreten, welche diese neuen Kräfte erfüllen müssen, um den Voraussetzungen zu entsprechen, die wir für dieselben gemacht haben.

Indem wir also die thätigen oder lebendigen Kräfte (S. 89) betrachten, welche der fortschreitenden Bewegung des Systems entsprechen, werden wir von der Resultirenden dieser Kräfte und von deren Angriffspunkt sprechen können, und indem wir die thätigen oder lebendigen Kräfte der rotirenden Bewegung des Systems untersuchen, werden wir von dem Moment des resultirenden Kräftepaars, von der Lage der resultirenden Paaraxe u. s. w. handeln können, und zu bestimmen haben, welche eigenthümlichen Verhältnisse durch das Hinzutreten der gemachten Voraussetzungen entstehen.

Erinnern wir uns an die Resultate der Untersuchungen, die wir in § 65 über die Bewegung eines festen Systems angestellt haben (S. 88) und betrachten wir zunächst die fortschreitende Bewegung des Systems.

Zufolge jener Untersuchungen haben wir die lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung als solche zu betrachten, welche die sämmtlichen Massenelemente in der betrachteten Zeit durch gleich grofse und parallele geradlinigte Wegelemente treiben. Dies ist nicht anders denkbar, als indem wir diese in den einzelnen Massenelementen wirksamen Kräfte als gleich grofs und parallel ansehen. Jede dieser Kräfte hat also denselben Werth

$$dK = dm \, . \, f$$

und da sie sämmtlich parallel sind, so ist ihre Resultirende (§ 72. Gl. 112):

$$143) \quad Q = \Sigma(dK) = \Sigma(dm \, . \, f) = f \, . \, \Sigma(dm) = f \, . \, M.$$

Es bezeichnet aber offenbar $\Sigma(dm)$ die Summe aller Massenelemente oder die Gesammtmasse des Systems. Wir bezeichnen dieselbe künftig durch M. Da nun die Leistung jeder einzelnen Kraft sich ausdrückt durch

$$dK \, . \, ds = dm \, . \, f \, . \, ds,$$

ds aber ebenfalls für sämmtliche Massenelemente gleich grofs ist, so ist die Gesammtleistung aller lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung mit Rücksicht auf Gleichung 47) (S. 27)

$$143\text{a}) \quad \Sigma(dK \, . \, ds) = ds \, . \, f \, . \, \Sigma(dm) = M \, . \, f \, . \, ds = M \, . \, c \, . \, dc,$$

d. h. wenn ein festes System eine fortschreitende Bewegung hat, so ist die Leistung sämmtlicher lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung ebenso grofs, als ob die Gesammtmasse des Systems, in einem Punkte vereinigt, sich mit der, den sämmtlichen Massenelementen gemeinschaftlichen Geschwindigkeit bewegte.

Wir können nun auch die Lage des Angriffspunkts dieser Resultirenden bestimmen (§ 74), d. h. denjenigen Punkt, in welchem wir anstatt der sämmtlichen lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung des Systems ihre Resultirende wirksam denken können, so dafs durch Einführung der Resultirenden lediglich die fortschreitende, aber keine drehende Bewegung in dem System erzeugt wird. Diesen so bestimmten Angriffspunkt nennen wir den Mittelpunkt der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung. Wir bedienen uns zu seiner Bestimmung ganz einfach der Gleichungen 117a), S. 104, welche, mit Berücksichtigung der hier gemachten Voraussetzungen, folgende Form annehmen:

$$144)\quad X = \frac{\Sigma(dm\,.\,x)}{M};\quad Y = \frac{\Sigma(dm\,.\,y)}{M};\quad Z = \frac{\Sigma(dm\,.\,z)}{M}.$$

Man sieht, dafs in diesen Werthen überall das gemeinschaftliche Aenderungsmaafs f herausgefallen ist, und, dafs der Abstand des Mittelpunkts der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung von irgend einer Ebene gefunden wird durch die Summe der Produkte jedes Massenelements in seinen Abstand von derselben Ebene, dividirt durch die Gesammtmasse des Systems.

Es folgt hieraus, dafs die Lage dieses Mittelpunktes unabhängig von der Gröfse der lebendigen Kräfte, und nur abhängig ist von der Gruppirung der einzelnen Massenelemente des Systems.

Der Mittelpunkt der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung ist also:

1) in einem gegebenen festen System ein bestimmter Punkt, der in dem System so lange eine unveränderte Lage behält, als die Vertheilung der Massenelemente des Systems unverändert bleibt;

2) stets derselbe für alle Kräfte, die auf das System so einwirken, dafs sie jedes Massenelement in derselben Richtung und mit demselben Aenderungsmaafs in Anspruch nehmen, gleichviel wie grofs dieses Aenderungsmaafs sein mag, und gleichviel ob diese Kräfte als lebendige oder als angebrachte Kräfte (§ 66) betrachtet werden.

Die Schwerkraft (§ 18) ist als eine auf jedes feste System in einer Weise wirkende Kraft zu betrachten, die den zuletzt gemachten Voraussetzungen entspricht. Der Angriffspunkt der Resultirenden der Schwerkraft (der Schwerpunkt) fällt also mit dem Mittelpunkt der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung in jedem materiellen System zusammen. Es ist also der Mittelpunkt der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung eines festen Systems und der Schwerpunkt identisch.

Bezeichnen wir mit dG die Gewichte der einzelnen Massenelemente, so ist $dG = g \cdot dm$ und $G = g \cdot M$ (Gl. 38. S. 25), und indem man in Gleichung 144) Zähler und Nenner mit g multiplizirt, ergiebt sich durch Einsetzung dieser Werthe

$$144\text{a)}\quad X = \frac{\Sigma(dG.x)}{G};\quad Y = \frac{\Sigma(dG.y)}{G};\quad Z = \frac{\Sigma(dG.z)}{G}.$$

Bezeichnet dV das Volumelement eines Körpers, und γ das Gewicht einer Volumeinheit, so ist offenbar $dG = dV.\gamma$ und $G = \Sigma(dV.\gamma)$, worin γ für jedes Volumelement einen andern oder auch denselben Werth haben kann. Im ersten Falle nennt man das System in Bezug auf seine Dichtigkeit heterogen (ungleichartig), im letzten Falle homogen (gleichartig). Setzt man diese Werthe in 144a), so hat man allgemein:

$$144\text{b)}\quad X = \frac{\Sigma(dV.\gamma.x)}{\Sigma(dV.\gamma)};\quad Y = \frac{\Sigma(dV.\gamma.y)}{\Sigma(dV.\gamma)},\quad Z = \frac{\Sigma(dV.\gamma.z)}{\Sigma(dV.\gamma)},$$

und für homogene Systeme:

$$144\text{c)}\quad X = \frac{\Sigma(dV.x)}{V};\quad Y = \frac{\Sigma(dV.y)}{V};\quad Z = \frac{\Sigma(dV.z)}{V}.$$

Nehmen wir in den Gleichungen 144, 144a, b und c) den Anfangspunkt des Koordinatensystems im Schwerpunkt an, so wird X, Y und Z einzeln gleich Null, und es folgt:

> dafs die Summe der Momente der einzelnen Massen-, Gewichts oder Raumelemente in Bezug auf jede durch den Schwerpunkt gedachte Ebene gleich Null sei.

Bezeichnet $\Sigma_{,}(dV.x)$ die Summe der Momente der auf einer Seite einer beliebigen durch den Schwerpunkt gedachten Ebene liegenden Elemente, und $\Sigma_{,,}(dV.x)$ die Summe der Momente der auf der anderen Seite dieser Ebene liegenden Elemente, so hat man:

$$\Sigma(dV.x) = \Sigma_{,}(dV.x) + \Sigma_{,,}(dV.x) = 0,$$

folglich:

$$\Sigma_{,}(dV.x) = -\Sigma_{,,}(dV.x),$$

d. h. jede durch den Schwerpunkt eines Systems gedachte Ebene theilt dasselbe in zwei Theile, die so beschaffen sind, dafs die Momentensummen beider Theile gleich grofs sind, aber nach entgegengesetzten Richtungen wirken.

Durch die Gleichung 144c) ist für homogene Systeme die Bestimmung der Lage des Schwerpunktes eine rein geometrische Operation.

Der Begriff des festen Systems (§ 63) gestattet für unsere Untersuchungen jede beliebige Gruppirung der materiellen Punkte (Massenelemente), wir können sie nach denselben Gesetzen gruppirt denken, nach denen geometrische Punkte sich gruppiren lassen, also auch nach den Gesetzen, nach denen diese in Gestalt von Linien, Flächen, Körpern sich anordnen lassen, und es wird nach dieser Bemerknng verständlich sein, wenn wir vom Schwerpunkt einer Linie, einer Fläche oder eines Körpers sprechen.

Wir müssen hier auf die geometrischen Bestimmungen der Schwerpunktslagen in Linien, Flächen und Körpern, sowie auf die weitern Untersuchungen der geometrischen Bedeutung des Schwerpunkts verzichten. Die wichtigsten Resultate jener Bestimmungen stellen wir weiter unten zusammen, und fügen hier gleichfalls in Gestalt eines Resultates zwei wichtige Gesetze an, welche die geometrische Bedeutung des Schwerpunkts erkennen lassen. Es sind dies die sogenannten Guldinschen Regeln *); sie lauten:

1) Der Inhalt eines Rotationskörpers [einer Rotationsfläche] ist gleich dem Produkte aus der Erzeugungsfläche [Erzeugungslinie] in den bei der Erzeugung des Rotationskörpers [der Rotationsfläche] durchlaufenen Weg des Schwerpunktes der erzeugenden Fläche [der Linie].

2) Der Inhalt jedes Körpers [jeder Oberfläche], welcher zwischen zwei beliebigen Ebenen liegt, und aufserdem von lauter parallelen geraden Linien begrenzt [gebildet] wird (schief abgeschnittener prismatischer Körper) ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt [Umfang] der ebenen Figur, welche den Durchschnitt mit der einen Ebene darstellt in den normalen Abstand dieser Ebene von dem Schwerpunkt der Fläche [des Umfangs] der Durchschnittsfigur mit der andern Ebene.

Gesetz für die Bewegung und die Lage der Drehaxe eines freien Systems.

§ 82. Wenn auf ein festes System beliebige Kräfte einwirken, so nimmt dasselbe, wie wir in § 65 gesehen haben, im Allgemeinen gleichzeitig aufser der allen Massenelementen gemeinschaftlichen

*) Den Beweis dieser Sätze siehe „Weisbach, Ingenieur und Maschinen-Mechanik, Th. I. § 119 und 120“, und: „Die mechanischen Prinzipien der Ingenieurkunst und Architektur von Moseley; deutsch von Scheffler,“ I. § 38 bis 41.