sen, dafs man es hierbei stets mit den Momenten zu thun hat, dafs also die Kräfte jedes substituirten Kräftepaars in Bezug auf fortschreitende Bewegung sich aufheben, und dafs folglich durch dergleichen Reduktionen der Druck auf die fixen Punkte nicht geändert wird.

Von den in einem festen System thätigen Kräften.

Thätige (lebendige) Kräfte der fortschreitenden Bewegung; Mittelpunkt derselben, Schwerpunkt, Guldinsche Regeln.

§ 81. Wenden wir uns nunmehr wieder zu den Betrachtungen des § 66. S. 88. Wir haben in dem Vorstehenden die wichtigsten Gesetze über die Wirkung der auf ein festes System angebrachten Kräfte entwickelt, und es wird sich nun darum handeln, die Gesetze für die in einem festen System thätigen Kräfte festzustellen. Nachdem dies geschehen, haben wir noch die Beziehungen zu untersuchen, welche zwischen den auf ein festes System angebrachten, und den in einem festen System thätigen Kräften statt finden. Zunächst ist wiederholt darauf hinzuweisen, dafs der Begriff der in einem System thätigen Kräfte nur auf einer Vorstellung beruht, welche wir zur Erleichterung der Anschauung gewisser Vorgänge eingeführt haben. Wir substituiren für die auf das System in verschiedenen Angriffspunkten angebrachten Kräfte andere Kräfte, nämlich solche, die in jedem einzelnen Massenelement thätig sein müfsten, um in dem System genau dieselbe Wirkung hervorzubringen, welche jene erzeugen (S. 66), oder mit anderen Worten, wir denken uns in dem System anstatt der auf dasselbe angebrachten Kräfte, andere Kräfte angebracht, deren Betrachtung bequemer ist. Da also die in einem System thätigen Kräfte sich vollkommen ansehen lassen, als eine neue Gruppe auf das System angebrachter Kräfte, durch welche wir die Wirkung der ursprünglich angebrachten Kräfte ersetzt denken, so werden sie auch im Allgemeinen keinen anderen Gesetzen unterliegen, als denen, welche wir für die auf ein festes System angebrachten Kräfte in den vorigen Paragraphen hergeleitet haben, nur werden diese Gesetze sich dadurch modificiren, dafs gewisse neue Bedingungen hinzutreten, welche diese neuen Kräfte erfüllen müssen, um den Voraussetzungen zu entsprechen, die wir für dieselben gemacht haben.

Indem wir also die thätigen oder lebendigen Kräfte (S. 89) betrachten, welche der fortschreitenden Bewegung des Systems entsprechen, werden wir von der Resultirenden dieser Kräfte und von deren **Angriffspunkt** sprechen können, und indem wir die **thätigen** oder **lebendigen** Kräfte der **rotirenden Bewegung** des Systems untersuchen, werden wir von dem **Moment des resultirenden Kräftepaars**, von der **Lage der resultirenden Paaraxe** u. s. w. handeln können, und zu bestimmen haben, welche eigenthümlichen Verhältnisse durch das Hinzutreten der gemachten Voraussetzungen entstehen.

Erinnern wir uns an die Resultate der Untersuchungen, die wir in § 65 über die Bewegung eines festen Systems angestellt haben (S. 88) und betrachten wir zunächst die **fortschreitende Bewegung** des Systems.

Zufolge jener Untersuchungen haben wir die **lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung** als solche zu betrachten, welche die sämmtlichen Massenelemente in der betrachteten Zeit durch gleich grofse und parallele geradlinigte Wegelemente treiben. Dies ist nicht anders denkbar, als **indem wir diese in den einzelnen Massenelementen wirksamen Kräfte als gleich grofs und parallel ansehen.** Jede dieser Kräfte hat also denselben Werth

$$dK = dm\,.\,f$$

und da sie sämmtlich parallel sind, so ist ihre Resultirende (§ 72. Gl. 112):

$$143)\quad Q = \Sigma(dK) = \Sigma(dm\,.\,f) = f\,.\,\Sigma(dm) = f\,.\,M.$$

Es bezeichnet aber offenbar $\Sigma(dm)$ die Summe aller Massenelemente oder die **Gesammtmasse des Systems.** Wir bezeichnen dieselbe künftig durch M. Da nun die Leistung jeder einzelnen Kraft sich ausdrückt durch

$$dK\,.\,ds = dm\,.\,f\,.\,ds,$$

ds aber ebenfalls für sämmtliche Massenelemente gleich grofs ist, so ist die Gesammtleistung aller lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung mit Rücksicht auf Gleichung 47) (S. 27)

$$143a)\quad \Sigma(dK\,.\,ds) = ds\,.\,f\,.\,\Sigma(dm) = M\,.\,f\,.\,ds = M\,.\,c\,.\,dc,$$

d. h. **wenn ein festes System eine fortschreitende Bewegung hat, so ist die Leistung sämmtlicher lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung ebenso grofs, als ob die Gesammtmasse des Systems, in einem Punkte vereinigt, sich mit der, den sämmtlichen Massenelementen gemeinschaftlichen Geschwindigkeit bewegte.**

Wir können nun auch die **Lage des Angriffspunkts** dieser Resultirenden bestimmen (§ 74), d. h. denjenigen Punkt, in welchem wir anstatt der sämmtlichen lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung des Systems ihre Resultirende wirksam denken können, so dafs durch Einführung der Resultirenden lediglich die fortschreitende, aber keine drehende Bewegung in dem System erzeugt wird. Diesen so bestimmten Angriffspunkt nennen wir den Mittelpunkt der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung. Wir bedienen uns zu seiner Bestimmung ganz einfach der Gleichungen 117a), S. 104, welche, mit Berücksichtigung der hier gemachten Voraussetzungen, folgende Form annehmen:

$$144)\quad X = \frac{\Sigma(dm\,.\,x)}{M};\quad Y = \frac{\Sigma(dm\,.\,y)}{M};\quad Z = \frac{\Sigma(dm\,.\,z)}{M}.$$

Man sieht, dafs in diesen Werthen überall das gemeinschaftliche Aenderungsmaafs f herausgefallen ist, und, dafs der Abstand des Mittelpunkts der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung von irgend einer Ebene gefunden wird durch die Summe der Produkte jedes Massenelements in seinen Abstand von derselben Ebene, dividirt durch die Gesammtmasse des Systems.

Es folgt hieraus, dafs die Lage dieses Mittelpunktes unabhängig von der Gröfse der lebendigen Kräfte, und nur abhängig ist von der Gruppirung der einzelnen Massenelemente des Systems.

Der Mittelpunkt der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung ist also:

1) in einem gegebenen festen System ein bestimmter Punkt, der in dem System so lange eine unveränderte Lage behält, als die Vertheilung der Massenelemente des Systems unverändert bleibt;
2) stets derselbe für alle Kräfte, die auf das System so einwirken, dafs sie jedes Massenelement in derselben Richtung und mit demselben Aenderungsmaafs in Anspruch nehmen, gleichviel wie grofs dieses Aenderungsmaafs sein mag, und gleichviel ob diese Kräfte als lebendige oder als angebrachte Kräfte (§ 66) betrachtet werden.

Die Schwerkraft (§ 18) ist als eine auf jedes feste System in einer Weise wirkende Kraft zu betrachten, die den zuletzt gemachten Voraussetzungen entspricht. Der Angriffspunkt der Resultirenden der Schwerkraft (der Schwerpunkt) fällt also mit dem Mittelpunkt der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung in jedem materiellen System zusammen. Es ist also der Mittelpunkt der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung eines festen Systems und der Schwerpunkt identisch.

Bezeichnen wir mit dG die Gewichte der einzelnen Massenelemente, so ist $dG = g \cdot dm$ und $G = g \cdot M$ (Gl. 38. S. 25), und indem man in Gleichung 144) Zähler und Nenner mit g multiplizirt, ergiebt sich durch Einsetzung dieser Werthe

$$144\text{a)}\quad X = \frac{\Sigma(dG.x)}{G}; \quad Y = \frac{\Sigma(dG.y)}{G}; \quad Z = \frac{\Sigma(dG.z)}{G}.$$

Bezeichnet dV das Volumelement eines Körpers, und γ das Gewicht einer Volumeinheit, so ist offenbar $dG = dV.\gamma$ und $G = \Sigma(dV.\gamma)$, worin γ für jedes Volumelement einen andern oder auch denselben Werth haben kann. Im ersten Falle nennt man das System in Bezug auf seine Dichtigkeit heterogen (ungleichartig), im letzten Falle homogen (gleichartig). Setzt man diese Werthe in 144a), so hat man allgemein:

$$144\text{b)}\quad X = \frac{\Sigma(dV.\gamma.x)}{\Sigma(dV.\gamma)}; \quad Y = \frac{\Sigma(dV.\gamma.y)}{\Sigma(dV.\gamma)}; \quad Z = \frac{\Sigma(dV.\gamma.z)}{\Sigma(dV.\gamma)},$$

und für homogene Systeme:

$$144\text{c)}\quad X = \frac{\Sigma(dV.x)}{V}; \quad Y = \frac{\Sigma(dV.y)}{V}; \quad Z = \frac{\Sigma(dV.z)}{V}.$$

Nehmen wir in den Gleichungen 144, 144a, b und c) den Anfangspunkt des Koordinatensystems im Schwerpunkt an, so wird X, Y und Z einzeln gleich Null, und es folgt:

> dafs die Summe der Momente der einzelnen Massen-, Gewichts oder Raumelemente in Bezug auf jede durch den Schwerpunkt gedachte Ebene gleich Null sei.

Bezeichnet $\Sigma_{\prime}(dV.x)$ die Summe der Momente der auf einer Seite einer beliebigen durch den Schwerpunkt gedachten Ebene liegenden Elemente, und $\Sigma_{\prime\prime}(dV.x)$ die Summe der Momente der auf der anderen Seite dieser Ebene liegenden Elemente, so hat man:

$$\Sigma(dV.x) = \Sigma_{\prime}(dV.x) + \Sigma_{\prime\prime}(dV.x) = 0,$$

folglich:

$$\Sigma_{\prime}(dV.x) = -\Sigma_{\prime\prime}(dV.x),$$

d. h. jede durch den Schwerpunkt eines Systems gedachte Ebene theilt dasselbe in zwei Theile, die so beschaffen sind, dafs die Momentensummen beider Theile gleich grofs sind, aber nach entgegengesetzten Richtungen wirken.

Durch die Gleichung 144c) ist für homogene Systeme die Bestimmung der Lage des Schwerpunktes eine rein geometrische Operation.

Der Begriff des festen Systems (§ 63) gestattet für unsere Untersuchungen jede beliebige Gruppirung der materiellen Punkte (Massenelemente), wir können sie nach denselben Gesetzen gruppirt denken, nach denen geometrische Punkte sich gruppiren lassen, also auch nach den Gesetzen, nach denen diese in Gestalt von Linien, Flächen, Körpern sich anordnen lassen, und es wird nach dieser Bemerknng verständlich sein, wenn wir vom Schwerpunkt einer Linie, einer Fläche oder eines Körpers sprechen.

Wir müssen hier auf die geometrischen Bestimmungen der Schwerpunktslagen in Linien, Flächen und Körpern, sowie auf die weitern Untersuchungen der geometrischen Bedeutung des Schwerpunkts verzichten. Die wichtigsten Resultate jener Bestimmungen stellen wir weiter unten zusammen, und fügen hier gleichfalls in Gestalt eines Resultates zwei wichtige Gesetze an, welche die geometrische Bedeutung des Schwerpunkts erkennen lassen. Es sind dies die sogenannten Guldinschen Regeln *); sie lauten:

1) Der Inhalt eines Rotationskörpers [einer Rotationsfläche] ist gleich dem Produkte aus der Erzeugungsfläche [Erzeugungslinie] in den bei der Erzeugung des Rotationskörpers [der Rotationsfläche] durchlaufenen Weg des Schwerpunktes der erzeugenden Fläche [der Linie].

2) Der Inhalt jedes Körpers [jeder Oberfläche], welcher zwischen zwei beliebigen Ebenen liegt, und aufserdem von lauter parallelen geraden Linien begrenzt [gebildet] wird (schief abgeschnittener prismatischer Körper) ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt [Umfang] der ebenen Figur, welche den Durchschnitt mit der einen Ebene darstellt in den normalen Abstand dieser Ebene von dem Schwerpunkt der Fläche [des Umfangs] der Durchschnittsfigur mit der andern Ebene.

Gesetz für die Bewegung und die Lage der Drehaxe eines freien Systems.

§ 82. Wenn auf ein festes System beliebige Kräfte einwirken, so nimmt dasselbe, wie wir in § 65 gesehen haben, im Allgemeinen gleichzeitig aufser der allen Massenelementen gemeinschaftlichen

---

*) Den Beweis dieser Sätze siehe „Weisbach, Ingenieur und Maschinen-Mechanik, Th. I. § 119 und 120", und: „Die mechanischen Prinzipien der Ingenieurkunst und Architektur von Moseley; deutsch von Scheffler," I. § 38 bis 41.

fortschreitenden Bewegung auch eine Rotationsbewegung an, welche um eine gemeinschaftliche Axe mit einer allen Massenelementen gemeinsamen Winkelgeschwindigkeit statt findet. Die Axe um welche das System rotirt, ist entweder durch fixe Punkte (§ 79) bestimmt, und das System ist also gezwungen um eine gewisse Axe zu rotiren, oder das System ist frei, und dann wird offenbar die Axe um welche das System rotirt im Allgemeinen eine Lage annehmen, die von der Lage und Beschaffenheit der Kräfte abhängig ist, welche eine Rotation des Systems bewirken. Folgen wir der angenommenen Vorstellung, so haben wir uns die fortschreitende Bewegung in irgend einem Zeitelement durch Kräfte hervorgebracht zu denken, die, in den einzelnen Massenelementen wirksam, lediglich diese fortschreitende Bewegung erzeugen, und die drehende Bewegung, welche gleichzeitig erfolgt, haben wir durch eine andere Gruppe von Kräften hervorgebracht zu denken, welche in jedem einzelnen Massenelement wirksam, lediglich diejenige drehende Bewegung erzeugen, welche das Massenelement erleidet. Da nun die lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung in dem festen System nur eine fortschreitende, aber keine drehende Bewegung hervorbringen sollen, und da wir den Angriffspunkt ihrer Resultirenden der Bedingung gemäfs bestimmt haben, dafs wenn wir anstatt der Kräfte nur ihre Resultirende wirksam denken, in dem System gleichfalls keine Drehung erfolge: so mufs offenbar die Richtung dieser Resultirenden unter allen Umständen die Drehungsaxe des Systems schneiden; oder mit andern Worten: die Axe, um welche das System unter dem Einflufs der zweiten Gruppe der lebendigen Kräfte gleichzeitig eine Drehung erleidet, mufs durch die Richtung der Resultirenden der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung gehen; denn im entgegengesetzten Falle würde die Resultirende der fortschreitenden Bewegung einen Hebelsarm in Bezug auf diese Axe besitzen, und gleichfalls auf Drehung um dieselbe wirken, was der Voraussetzung widerspricht. Da nun aber in jedem Augenblick die Axe, um welche das System eine Drehung erleidet die Richtung der Resultirenden der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung schneiden soll, so mufs sie auch in jedem Augenblick die Bahn des Angriffspunkts dieser Resultirenden schneiden, weil nämlich diese Bahn in jedem Augenblick mit der für diesen Augenblick statt finden Richtung der Resultirenden zusammenfällt. Dies heifst aber nichts anders, als dafs die Axe, um welche sich das freie System dreht in jenem Augenblick durch den Angriffspunkt der Resultirenden selbst gehen müsse, denn die in den verschiedenen Zeitelementen stetig aufeinanderfolgenden Lagen des Angriffspunkts einer Kraft bilden eben die Bahn desselben. Da nun der Angriffspunkt der Resultirenden der lebendigen Kräfte des Systems in jedem Augenblick derselbe Punkt, nämlich der Schwerpunkt des Systems ist, so geht die Drehaxe des freien Systems stets durch den Schwerpunkt desselben.

Die Bewegung eines freien Systems ist also immer so aufzufassen, als ob die Gesammtmasse des Systems im Schwerpunkt vereinigt, sich fortschreitend bewegte, und als ob sämmtliche Massenelemente gleichzeitig eine Drehung um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe und zwar mit gemeinschaftlicher Winkelgeschwindigkeit erleiden.

Trägheitsmoment eines festen Systems.

§ 83. Betrachten wir nunmehr ein festes System, welches um eine beliebige Axe rotirt. Die einzelnen Massenelemente beschreiben in jedem Augenblick Wegelemente, die in parallelen zur Drehaxe normalen Ebenen liegen (S. 86. § 65a.). Denkt man die kürzesten Abstände der Massenelemente von der Drehaxe, so fallen die bei der Drehung beschriebenen Wegelemente mit Bogenelementen zusammen, deren Radien diese Abstände sind, und deren Mittelpunkte in der Drehaxe liegen. Die in den einzelnen Massenelementen zu denkenden lebendigen Kräfte, welche diese Drehung hervorbringen, fallen aber ihrer Richtung nach mit diesen Wegelementen zusammen, es bilden also jene Radien auch die kürzesten Abstände der Kraftrichtungen von der Drehaxe, und da diese Kraftrichtungen mit der Drehaxe sämmtlich rechte Winkel machen, da sie in Ebenen liegen, welche zur Drehaxe normal sind, so drückt sich ihr Moment aus durch $dK.R$, wenn dK der in dem Massenelement wirksame Druck, und R der Abstand des Massenelements von der Drehaxe ist, oder indem wir setzen $dK = dm.f$ (S. 11. No. 4) und $f = \frac{dc}{dt}$ (S. 18) auch durch $dm.R.\frac{dc}{dt}$. Führen wir nach S. 50 anstatt dc die Winkelgeschwindigkeit w ein, so hat man $dc = dw.R$, folglich ist $f = \frac{dw}{dt}.R$, und es ist das auf Drehung wirkende Moment unter der Form:

$$dm.R^2.\frac{dw}{dt} = dK.R$$

für jedes einzelne Massenelement darzustellen.

Das Leistungselement der in dem Massenelement wirksam gedachten Kraft ist aber $dK \, . \, ds$, oder $dm . f . c . dt$ (S. 27), oder (indem man für c den Werth wR (S. 50) und für f wiederum $\frac{dw \, . \, R}{dt}$ setzt):

$$dm \, . \, R^2 \, . \, w \, . \, dw = dK \, . \, ds.$$

Vergleicht man diesen Werth mit dem eben gefundenen Ausdruck für das statische Moment, so ergiebt sich:

$$145) \quad dK \, . \, ds = (dK \, . \, R) \, . \, w \, . \, dt,$$

d. h. das Leistungselement einer Kraft, welche eine Drehung um eine Axe bewirkt, ist gleich dem statischen Moment in Bezug auf diese Axe, multiplizirt mit der Winkelgeschwindigkeit und dem Zeitelement.

Die Summe der statischen Momente drückt sich offenbar aus durch:

$$145\text{a}) \; \Sigma(dK . R) = \Sigma\left(dm . R^2 . \frac{dw}{dt}\right) = \frac{dw}{dt} . \Sigma(dm . R^2) = f_{,} . \Sigma(dm . R^2)$$

(wenn man nämlich unter $f_{,} = \frac{dw}{dt}$ das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit versteht), und die Summe der Leistungselemente sämmtlicher lebendigen Kräfte der drehenden Bewegung durch

$$145\text{b}) \;\; \Sigma(dK . ds) = \Sigma(dm . R^2 . w . dw) = w . dw . \Sigma(dm . R^2).$$

In beiden Ausdrücken kommt der Faktor $\Sigma(dm \, . \, R^2)$, oder die Summe der Produkte aus jedem Massenelement in das Quadrat seines kürzesten Abstandes von der Drehaxe vor. Diese Summe nennt man das Trägheitsmoment des festen Systems für diese Drehaxe.

Wenn man die Drehaxe, für welche das Trägheitsmoment gilt, nicht besonders bezeichnet, also allgemein vom Trägheitsmoment eines Systems spricht, so versteht man darunter, dafs dasselbe für eine Axe gilt, die durch den Schwerpunkt geht. Wir bezeichnen künftig das Trägheitsmoment eines Systems für eine durch den Schwerpunkt gehende Axe immer mit J, und für eine andere, nicht durch den Schwerpunkt gehende Axe mit $J_{,}$. Die Gleichungen 145a) und 145b) gehen also im Allgemeinen in die Form über:

$$145\text{c}) \left\{ \begin{array}{l} \Sigma(dK . R) = f_{,} . J_{,} = \frac{dw}{dt} . J_{,} \\ \Sigma(dK . ds) = J_{,} . w . dw, \end{array} \right.$$

worin das Trägheitsmoment

$$145\text{d}) \quad J_{,} = \Sigma(dm \, . \, R^2)$$

zu setzen ist.

Man sieht, dafs das Trägheitsmoment eines festen Systems unabhängig ist von der Gröfse der Kräfte, welche eine drehende Bewegung erzeugen und nur abhängig von der Gruppirung der Massenelemente gegen die Drehaxe. Stellen wir ähnliche Betrachtungen an, wie bei der Bestimmung der Lage des Schwerpunkts (S. 154), so ergiebt sich, indem wir für die Massenelemente deren Gewichte einführen:

$$146)\quad J_{,} = \Sigma(dm.R^2) = \frac{1}{g}.\Sigma(dG.R^2)$$

und wenn wir die Volumenelemente einführen:

$$146a)\quad J_{,} = \frac{1}{g}.\Sigma(dV.\gamma.R^2)$$

für homogene Systeme hat man:

$$146b)\quad J_{,} = \frac{\gamma}{g}.\Sigma(dV.R^2),$$

worin γ das Gewicht der Raumeinheit des Körpers bezeichnet. Der Ausdruck $\Sigma(dV.R^2)$ ist ein rein geometrischer; wir nennen ihn das räumliche Trägheitsmoment des Systems und bezeichnen denselben mit $T_{,}$ beziehlich mit T. Es ist also:

$$146c)\quad J_{,} = \frac{\gamma}{g}.T_{,};\quad J = \frac{\gamma}{g}.T.$$

wobei nicht zu vergessen ist, dafs diese Beziehungen nur für homogene Systeme gelten.

Drehungshalbmesser und Reduktion der Massen.

§ 84. Der Ausdruck (145a):

$$\Sigma(dK.R) = J_{,}.\frac{dw}{dt} = J_{,}.f_{,}$$

erscheint als das Moment des resultirenden Kräftepaars der sämmtlichen lebendigen Kräfte der drehenden Bewegung. Man kann dasselbe immer unter der Form Pa ausdrücken, und nach den Gesetzen in § 78 den Werth P oder den Hebelsarm a beliebig wählen, auch kann man die Richtung von $+P$ und $-P$, welche das Kräftepaar bilden und den Angriffspunkt dieser Kräfte in verschiedener Weise variiren. Denken wir den Angriffspunkt der einen Kraft $(-P)$ in der Drehaxe, so stellt a den Hebelarm der andern Kraft $(+P)$ in Bezug auf die Drehaxe dar. Ist der Angriffspunkt von $+P$ ein mit dem System fest verbundener Punkt, so rotirt er mit derselben Winkelgeschwindigkeit, und indem wir die in den einzelnen Massenelementen wirksam gedachten lebendigen Kräfte des Systems durch die Wirkung des resultirenden Kräftepaars ersetzt denken, werden wir nothwendig auch anstatt der in den einzelnen Punkten des Systems vertheilten Massenelemente in dem Angriffspunkt von P eine konzentrirte Masse ($M_{\prime}$) denken müssen, auf welche wirkend der Druck P dem System dieselbe Winkelgeschwindigkeit ertheilen würde, welche unter dem Einflufs jener Kräfte statt findet. Ist f das Aenderungsmaafs des Drucks P, so ist zunächt $P = M_{\prime}.f$, und da $f = \frac{dc}{dt} = \frac{dw.a}{dt}$, so hat man $P = M_{\prime}.\frac{dw\,a}{dt}$, folglich das Moment des resultirenden Kräftepaars $Pa = M_{\prime}.\frac{dw}{dt}.a^2$; es ist aber auch $Pa = \Sigma(dK.R) = J_{\prime}.\frac{dw}{dt}$, folglich hat man

$$147)\quad \begin{cases} M_{\prime}a^2 = J_{\prime} \\ M_{\prime} = \frac{J_{\prime}}{a^2};\quad a = \sqrt{\left(\frac{J_{\prime}}{M_{\prime}}\right)}. \end{cases}$$

Man nennt das Maafs der Masse $M_{\prime}$ welche in dem Abstand a von der Drehaxe vereinigt sein müfste, damit ein in diesem Abstande auf Drehung wirkender Druck dieselbe Winkelgeschwindigkeit in dem System erzeuge, wie die in den einzelnen Massenelementen wirksam gedachten, auf Drehung wirkenden lebendigen Kräfte des Systems: die auf diesen Abstand reduzirte Masse. Die auf einen gegebenen Abstand reduzirte Masse drückt sich aus durch das Trägheitsmoment des Systems in Beziehung auf diese Axe, dividirt durch das Quadrat des gegebenen Abstandes.

Man kann die Masse des Systems auf jeden beliebigen Abstand reduziren, d. h. man kann in jedem beliebigen Abstand von der Drehaxe eine bestimmte Menge materieller Punkte vereinigt denken, so, dafs die einzelnen auf Drehung wirkenden lebendigen Kräfte durch eine einzige in diesem Abstande wirkende Kraft sich ersetzen lassen. Andererseits kann man eine beliebige Masse als reduzirte Masse des Systems betrachten, und den Abstand a berechnen in welchem sie unter der eben genannten Voraussetzung vereinigt sein müfste. Es ist daher auch zulässig diese Masse so zu wählen, dafs sie gleich der Summe aller Massenelemente des Systems ist. In diesem Falle hätten wir für $M_{\prime}$ zu setzen $(\Sigma dm) = M$ und es würde sich der entsprechende Abstand finden:

$$147\text{a})\quad a_{\prime} = \sqrt{\left(\frac{J_{\prime}}{\Sigma(dm)}\right)} = \sqrt{\left(\frac{J_{\prime}}{M}\right)} = \varrho_{\prime}.$$

Wir nennen diesen Abstand, für welchen die reduzirte Masse des Systems gleich der Summe der Massenelemente des Systems ist, den Drehungshalbmesser oder Trägheitshalbmesser des

Systems für diese Axe, und bezeichnen ihn mit $\varrho_{\prime}$. Unter dem „Drehungshalbmesser“, ohne weitere Bezeichnung der Axe, ist der Drehungshalbmesser in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt gehende Axe verstanden; wir bezeichnen einen solchen mit ϱ.

Für homogene Systeme ist $M = V.\frac{\gamma}{g}$ und 146c) $J_{\prime} = \frac{\gamma}{g}.T_{\prime}$ folglich:

$$147b)\quad \begin{cases} \varrho_{\prime} = \sqrt{\left(\frac{J_{\prime}}{M}\right)} = \sqrt{\left(\frac{T_{\prime}}{V}\right)} \\ \varrho = \sqrt{\left(\frac{J}{M}\right)} = \sqrt{\left(\frac{T}{V}\right)} \\ M = \frac{J}{\varrho^2} = \frac{J_{\prime}}{\varrho_{\prime}^2} \end{cases}$$

Aus der Gleichung 147) und 147a) ergiebt sich:

$$147c)\quad \begin{cases} a^2 . M_{\prime} = \varrho'^2 . M \\ M_{\prime} = \frac{\varrho'^2}{a^2} . M \end{cases}$$

d. h. die auf einen gegebenen Abstand a von der Drehaxe reduzirte Masse ist gleich der Gesammtmasse des Systems, multiplizirt mit dem Quadrat des Verhältnisses des Drehungshalbmessers des Systems für diese Axe zu dem gegebenen Abstand.

Uebrigens bemerkt man, dafs wenn man die Masse des Systems auf einen gegebenen Abstand reduzirt, es für die Betrachtung gleichgiltig bleibt, ob man diese reduzirte Masse in einen Punkt konzentrirt denkt, oder ob man sie in einem Cylindermantel, dessen Axe die Rotationsaxe und dessen Halbmesser der gegebene Abstand ist, beliebig vertheilt denkt, denn es kommt für die hier vorliegenden Untersuchungen nur darauf an, dafs sämmtliche Elemente der reduzirten Masse denselben Abstand von der Drehaxe haben.

Einige Sätze für die Berechnung der räumlichen Trägheitsmomente.

§ 85. Die Berechnung der räumlichen Trägheitsmomente ist eine rein geometrische Operation. Wir wollen hier jedoch einige Sätze zusammenstellen, welche diese Berechnung in vielen Fällen erleichtern. Es läfst sich übrigens nach der Bemerkung auf S. 155 bei Gelegenheit der Schwerpunktsbestimmungen übersehen, was man unter dem räumlichen Trägheitsmoment von Linien, Flächen und Körpern zu verstehen habe.

1) Ist J das Trägheitsmoment eines Systems in Bezug auf eine Axe, die durch den Schwerpunkt des Systems geht, und ist M die

Masse des Systems, so ist das Trägheitsmoment in Bezug auf eine in dem Abstande e mit jener parallele Axe

$$148)\quad J_{,} = J + Me^2,$$

denn wenn man die Richtung von dem Schwerpunkt normal auf die neue Axe als Axe der X eines Koordinatensystems ansieht, dessen zweite (Y) Axe auf der durch beide Axen zu legenden Ebene normal steht, so ist für den Schwerpunkt als Anfangspunkt der Koordinaten der Abstand jedes Massenelementes von der Axe der Z, welche mit der Rotationsaxe durch den Schwerpunkt identisch ist:

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

und der Abstand von der neuen Axe ist offenbar

$$R = \sqrt{[(x+e)^2 + y^2]}.$$

Es ist also:

$$J_{,} = \Sigma\,(dm\,.\,R^2) = \Sigma\left(dm\,.\,[(x+e)^2 + y^2]\right)$$

und wenn man entwickelt:

$$J_{,} = \Sigma\,[dm\,(x^2 + y^2)] + \Sigma\,(dm)\,e^2 + 2e\,.\,\Sigma\,(dmx).$$

Nun ist $\Sigma(dmx) = 0$ nach S. 154, $\Sigma\,[dm\,(x^2+y^2)] = \Sigma\,(dm\,r^2) = J$ und $\Sigma(dm) = M$, und man erhält durch Einsetzung dieser Werthe die Gleichung 148).

In gleicher Weise ergiebt sich das räumliche Trägheitsmoment:

$$148\text{a})\quad T_{,} = T + Ve^2,$$

wenn V das Volum des Systems bezeichnet.

2) Bezeichnet ϱ den Trägheitshalbmesser des Systems, so kann man in die Gleichung 148) setzen: $J = M\varrho^2$ (147b) und man hat

$$149)\quad \begin{cases} J_{,} = M(\varrho^2 + e^2) \\ T_{,} = V(\varrho^2 + e^2). \end{cases}$$

Hieraus folgt, daſs wenn der Trägheitshalbmesser ϱ im Vergleich zu e sehr klein ist, das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Axe näherungsweise ausgedrückt werden kann durch:

$$149\text{a})\quad \begin{cases} J_{,} = Me^2 \\ T_{,} = Ve^2, \end{cases}$$

d. h. durch das Produkt aus der Masse, beziehlich dem Volum in das Quadrat des Abstandes des Schwerpunkts von der Rotationsaxe.

Da aber aus Gleichung 147b) folgt:

$$J_{,} = M\varrho_{,}^2;\qquad T_{,} = V\varrho_{,}^2,$$

so hat man nach Einsetzung dieser Werthe in Gleichung 149) und wenn man $\varrho_{,}$ entwickelt:

$$150)\quad \varrho_{,} = \sqrt{(\varrho^2 + e^2)},$$

d. h. der Drehungshalbmesser eines festen Systems in

Bezug auf eine gegebene Axe ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate des Drehungshalbmessers in Bezug auf eine parallele durch den Schwerpunkt gehende Axe und der Entfernung der gegebenen Axe.

Auch folgt nach Gleichung 147c):

$$150a)\quad M_{\prime} = M \cdot \frac{\varrho^2 + e^2}{a^2},$$

d. h. die auf den Abstand a reduzirte Masse ist gleich der Gesammtmasse des Systems, multiplizirt mit dem Verhältnisse der Summe der Quadrate des Drehungshalbmessers des Systems für eine durch den Schwerpunkt gehende parallele Axe und der Entfernung dieser Axe von der Rotationsaxe zu dem Quadrat des Abstandes a.

3) Denken wir ein System welches durch zwei parallele Ebenen begrenzt wird, und welches sich also durch Ebenen, die mit jenen Begrenzungsebenen parallel sind, in lauter parallele, ebene und unendlich dünne Schichten zerlegen läſst; es sei F der Flächeninhalt einer dieser Schnittflächen, e die Entfernung ihres Schwerpunkts von einer Umdrehungsaxe, t das räumliche Trägheitsmoment der Schnittfläche in Beziehung auf eine durch ihren Schwerpunkt gehende parallele Axe, und dx die Dicke der Schicht. Man hat sodann:

$$151)\quad T_{\prime} = \Sigma(e^2 \cdot F \cdot dx) + \Sigma(t \cdot dx),$$

welcher Ausdruck sich integriren läſst, wenn t und F als Funktionen der Entfernung x der beiden parallelen Begrenzungsebenen gegeben sind.

Wenn ein System durch ein konstantes Profil erzeugt wird, welches sich*) normal auf einer Kurve fortbewegt, indem der Schwerpunkt dieses Profils das Kurvenelement ds beschreibt, so kann man das Trägheitsmoment des zwischen zwei aufeinander folgenden Profilen liegenden Elementes, dessen Volum $F \cdot ds$ ist, ausdrücken nach 149a) näherungsweise durch $t_{\prime} = F \cdot ds \cdot e^2$, folglich das räumliche Trägheitsmoment des ganzen Systems durch:

$$159a)\quad T_{\prime} = \Sigma(t_{\prime}) = \Sigma(F \cdot ds \cdot e^2) = F \cdot \Sigma(ds \cdot e^2).$$

Es ist aber $\Sigma(ds \cdot e^2)$ nichts anders, als das Trägheitsmoment der Richtlinie des Systems in Bezug auf die betrachtete Rotationsaxe d. h. das räumliche Trägheitsmoment des Systems ist näherungsweise gleich dem Produkte aus dem erzeugen-

*) Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen, von J. V. Poncelet; deutsch von Schnuse, I. S. 152 u. f.

den Profil in das räumliche Trägheitsmoment der Richtlinie.

4) Wenn man die Trägheitsmomente derselben Ebene in Beziehung auf zwei in dieser Ebene sich rechtwinklig schneidende Axen zusammenaddirt, so erhält man das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Axe, die im Durchschnittspunkt der beiden erstgenannten Axen auf der Ebene normal steht (polares Trägheitsmoment); denn es sei:

$$T_{,} = \Sigma(dV.R^2)$$

das Trägheitsmoment der Ebene in Bezug auf die zuletzt erwähnte Axe, und man nehme diese und die beiden in der Ebene liegenden Axen als Koordinatenaxen, dann ist offenbar, wenn x und y die Abstände des Elements dV von den beiden letztgenannten Axen bezeichnen $R^2 = x^2 + y^2$:

$$152) \quad \Sigma(dV.R^2) = \Sigma(dV.x^2) + \Sigma(dV.y^2),$$

worin die Werthe $\Sigma(dV.x^2)$ und $\Sigma(dV.y^2)$ die Trägheitsmomente der Ebene in Bezug auf die Axe X und Y ausdrücken.

Ist dz die Dicke eines räumlichen Elementes, so ist offenbar das Trägheitsmoment eines prismatischen Körpers, der jene Ebene zur Grundfläche hat:

$$T_{,} = \Sigma\left\{[\Sigma(dV.R^2)].dz\right\} = \Sigma(dV.R^2)\,(\Sigma.dz)$$

$$152a) \quad T_{,} = z.\Sigma(dV.R^2) = z\left\{\Sigma(dV.x^2) + \Sigma(dV.y^2)\right\}.$$

Gesetze für die Beziehungen zwischen den auf ein festes System angebrachten und den in dem festen System thätigen Kräften. — Massenwiderstände.

§ 86. Durch die Untersuchungen der §§ 81 bis 85 ist es gelungen, die Bewegung eines festen Systems zurückzuführen auf die Bewegung von Punkten, in denen die Masse des Systems vereinigt zu denken ist; nämlich so, dafs man die fortschreitende Bewegung des Systems immer so betrachten kann, als ob die Gesammtmasse des Systems im Schwerpunkt vereinigt, die fortschreitende Bewegung erleide, und dafs man die drehende Bewegung des Systems immer so auffassen kann, als ob die Gesammtmasse des Systems in einem Abstande von der Rotationsaxe gleich dem Drehungshalbmesser die drehende Bewegung erleide. Hierdurch ist man im Stande die Gesetze, welche wir in den Abschnitten a) und b) für die Bewegung eines Massenelementes entwickelt haben, auf die Bewegung eines Systems von Massenelementen zu beziehen.

Die in dem System thätigen (lebendigen) Kräfte und folglich auch ihre Resultirenden sind nach der Voraussetzung nichts anderes, als Kräfte, welche wir für die Wirkung der auf das System angebrachten Kräfte substituiren; es folgt hieraus ohne Weiteres (§ 35. S. 38) dafs in jedem Augenblick die Wirkung der sämmtlichen auf das System angebrachten Kräfte gleich der Wirkung der denselben substituirten Kräfte sein müsse. Bezeichnet

dL das Leistungselement der Resultirenden sämmtlicher auf das System angebrachten Kräfte in Bezug auf fortschreitende Bewegung,
$dL_{\prime}$ das Leistungselement der Resultirenden sämmtlicher auf das System angebrachten auf Drehung wirkenden Kräfte,
M die Gesammtmasse des Systems,
ds das Wegelement,
f das Aenderungsmaafs (die Beschleunigung) und
c die Geschwindigkeit des Schwerpunkts des Systems,
$J_{\prime}$ das Trägheitsmoment,
$\varrho_{\prime}$ den Drehungshalbmesser,
w die Winkelgeschwindigkeit, und
$f_{\prime}$ das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit,

so mufs sein:

$$153)\quad \begin{cases} dL = M.f.ds = M.c.dc \\ dL_{\prime} = J_{\prime}.w.dw = M.\varrho_{\prime}^2.w.dw, \end{cases}$$

folglich:

$$153\text{a})\quad \begin{cases} dL + dL_{\prime} = M.c.dc + J_{\prime}.w.dw \\ \qquad\qquad = M.(c.dc + \varrho_{\prime}^2.w.dw), \end{cases}$$

oder wenn $v = \varrho_{\prime}.w$ die Geschwindigkeit ist, mit welcher ein Punkt in den Abstand $\varrho_{\prime}$ von der Drehaxe rotirt:

$$153\text{b})\quad \begin{cases} dL = M.c.dc \\ dL_{\prime} = M.v.dv \\ dL + dL_{\prime} = M.(c.dc + v.dv). \end{cases}$$

Diese wichtigen Gleichungen drücken folgendes Gesetz aus:

1) Wenn ein festes System unter dem Einflufs beliebiger Kräfte sich bewegt, so ist in jedem Augenblick das Leistungselement der Resultirenden der auf das System **angebrachten** Kräfte sowohl für die fortschreitende, als für die drehende Bewegung gleich dem Leistungselement der sämmtlichen in dem System **thätigen** Kräfte.

Da wir nach § 71, zufolge der Bemerkung auf S. 99, die Resultante der fortschreitenden Bewegung in jedem beliebigen

Punkt angreifend denken können; so lange es nur darauf ankommt, die Gesetze der fortschreitenden Bewegung zu untersuchen, so können wir, indem wir nur die fortschreitende Bewegung des Systems betrachten, die Resultante der fortschreitenden Bewegung im Schwerpunkt, welcher ja die fortschreitende Bewegung des ganzen Systems repräsentirt, angreifend denken, und wenn wir die Bemerkung am Ende der S. 98 beachten, ergiebt sich folgendes Gesetz:

2) Die fortschreitende Bewegung des Schwerpunkts eines festen Systems findet immer in derselben Weise statt, als ob sämmtliche auf das System wirkenden Kräfte parallel mit ihren ursprünglichen Richtungen im Schwerpunkt vereinigt wirkten.

Die gleichzeitigen Bewegungen, nämlich die fortschreitende Bewegung des ganzen Systems und die Rotationsbewegung um eine Axe, die durch den Schwerpunkt geht (§ 82), kann man auch nach dem Grundsatz No. 1 in § 24 als innerhalb der Dauer eines Zeitelements aufeinander folgend betrachten. Während nun die drehende Bewegnng erfolgt, kann man offenbar den Schwerpunkt, durch welchen nothwendig die Drehaxe des Systems geht (§ 82), für diesen Augenblick als fixen Punkt des Systems auffassen. Die Lage der Drehaxe wird sich daher nach dem Gesetz in § 79. No. 1 (S. 145) ermitteln lassen. Es folgt hieraus das Gesetz:

3) Die Lage der Drehaxe eines festen Systems wird gefunden, wenn man durch den Schwerpunkt drei normale Koordinatenaxen legt, die Momente der auf das System wirkenden Kräfte für jede dieser Axen bestimmt und nach der Gleichung 141c) (resp. 138) die Lage der resultirenden Paaraxe des Systems gegen die angenommenen Axen ermittelt.

Aus den Gleichungen 153) und 153a) folgt:

$$154)\quad \begin{cases} dL - M.c.dc = 0 \\ dL_{,} - J_{,}.w.dw = 0 \\ dL + dL_{,} - M.c.dc - J_{,}.w.dw = 0. \end{cases}$$

Die Werthe $-M.c.dc$ und $-J_{,}.w.dw$ drücken aber nichts anders aus, als die Leistungselemente der Resultirenden von Kräften, welche den lebendigen Kräften der Gröfse nach gleich, der Richtung nach entgegengesetzt sind, solche Kräfte würden also als Gegenkräfte der in dem System wirksamen Kräfte erscheinen, und wenn man daher in den einzelnen Massenelementen die Gegenkräfte der in dem System wirksamen Kräfte angebracht denkt, so würde zufolge der Gleichungen 154) Gleichgewicht in dem System vorhanden sein, denn die Gleichungen 154) sind nichts anderes, als die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht. Da die in den einzelnen Massenelementen wirksam gedachten Kräfte solche sind, welche in den Massenelementen die entsprechende Bewegung erzeugen würden, so sind ihre Gegenkräfte als solche aufzufassen, welche der Bewegung der Massenelemente entgegenwirken, wir wollen sie daher als die Massenwiderstände der Bewegung bezeichnen, und es folgt aus der Gleichung 154) das Gesetz:

4) Wie auch die auf ein festes System wirkenden Kräfte beschaffen sein mögen, so ist doch in jedem Zeitelement zwischen diesen Kräften und den Massenwiderständen der Bewegung Gleichgewicht vorhanden.

Es lassen sich also für jedes Zeitelement die Gleichgewichtsgesetze (§ 69 und folgende) auf ein jedes System, das sich in Bewegung befindet, anwenden, sobald man die sämmtlichen auf das System angebrachten, und die sämmtlichen in dem System wirkenden Massenwiderstände in Betracht zieht.

Der aus sämmtlichen lebendigen Kräften der fortschreitenden Bewegung resultirende Druck für irgend eine Richtung drückt sich aus nach Gleichung 143) (S. 152) durch $M.f$, folglich der Druck der Massenwiderstände durch $-M.f$; und das Moment des aus sämmtlichen lebendigen Kräften der drehenden Bewegung resultirenden Kräftepaars drückt sich aus nach Gleichung 145c) (S. 158) durch $f_{,}.J_{,}$, folglich das Moment der Massenwidersände in Bezug auf drehende Bewegung durch $-f_{,}.J_{,}$. Wenn nun die Resultirende der fortschreitenden Bewegung aus sämmtlichen auf das System angebrachten Kräften für dieselbe Richtung mit $\Sigma(K)$ und das Moment des resultirenden Kräftepaars aus sämmtlichen auf das System angebrachten Kräften für dieselbe Axe mit $\Sigma(Ka)$ bezeichnet wird, so mufs nach dem eben entwickelten Satze No. 4 und zufolge der Bedingungen des Gleichgewichts sein:

$$154a)\quad \begin{cases} \Sigma K - M.f = 0 \\ \Sigma(Ka) - f_{,}.J_{,} = 0, \end{cases}$$

und daraus folgt:

das Aenderungsmaafs der fortschreitenden Bewegung:

$$154\text{b)}\quad f = \frac{\Sigma(K)}{M} = \frac{\text{Resultirender Druck}}{\text{Gesammtmasse}},$$

und das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit:

$$154\text{c)}\quad f_{\prime} = \frac{\Sigma(Ka)}{J_{\prime}} = \frac{\text{Summe der statischen Momente}}{\text{Trägheitsmoment}}.$$

Substituirung der auf Drehung wirkenden Kräfte eines festen Systems durch die Normalkräfte und Tangentialkräfte. Resultirende der Normalkräfte.

§ 87. Betrachten wir ein festes System, welches um irgend eine Axe rotirt, die Axe selbst möge fortschreiten oder nicht. Wenden wir auf jedes Massenelement die Betrachtungen an, welche wir in § 42 und 43 angestellt haben, so können wir die Bewegungen der einzelnen Massenelemente allemal auch erzeugt denken durch eine Normalkraft und eine Tangentialkraft; wir können also anstatt der Kräftegruppe, welche wir bisher als die in dem System wirksamen Kräfte der rotirenden Bewegung bezeichnet haben, noch andere Kräftegruppen substituiren, nämlich so, dafs wir in jedem Augenblick in jedem Massenelement eine konstantwirkende Normalkraft, und eine im Gleichgewicht befindliche Tangentialkraft wirksam denken. Die in den einzelnen Massenelementen wirkenden Tangentialkräfte sind in ihren Angriffspunkten einzeln im Gleichgewicht, ihr Druck auf das System ist folglich gleich Null (§ 34); die in den einzelnen Massenelementen wirksamen Normalkräfte wirken in der Richtung des Halbmessers des Kreiselements, welches das Massenelement in diesem Augenblick durchläuft; sie liegen folglich alle in parallelen Ebenen und ihre Richtungen schneiden sämmtlich die Drehaxe, sie üben auf jedes Massenelement einen Druck, durch welchen die Ablenkung des Massenelements von der Richtung der Tangente bedingt wird, diesem Druck (die Centripetalkraft) entspricht in jedem Massenelement eine gleich grofse entgegengesetzt gerichtete Reaktion (Centrifugalkraft), welche zunächst die Festigkeit des Systems in Anspruch nimmt, indem sie das Bestreben darstellt, die einzelnen Massenelemente radial von der Drehaxe zu entfernen. Wir können nun für die sämmtlichen in den einzelnen Massenelementen wirksamen Normalkräfte, die Resultirende bestimmen, wobei es im Allgemeinen gleichgiltig ist, ob wir für diese Untersuchung die Centrifugalkräfte, oder die Centripetalkräfte benutzen; die

Resultirenden werden sich nur durch die entgegengesetzte Richtung von einander unterscheiden *).

Es ist am Orte die Bemerkung ausdrücklich hervorzuheben, dafs die Centrifugalkraft oder die Centripetalkraft nicht als Kräfte aufgefafst werden dürfen, welche durch die rotirende Bewegung erst entstehen, und welche nun fähig sein könnten, auf das System irgend wie als darauf angebrachte Kräfte eine Wirkung zu äufsern. Die in den einzelnen Massenelementen wirkenden Normalkräfte, welche wir nunmehr betrachten, sind vielmehr nichts anders, als Kräfte, welche wir für die Wirkung der auf das System angebrachten, die drehende Bewegung bedingenden Kräfte, oder auch für die Wirkung der in dem System wirksamen (lebendigen) Kräfte der drehenden Bewegung substituiren. Wir dürfen dieselben also nicht mit jenen zugleich wirksam denken, sondern nur entweder die einen, oder die andern. Die Normalkräfte (Centrifugal- oder Centripetalkräfte), oder deren Resultirende sind daher nicht im Stande, irgend welche Aenderung derjenigen Bewegung hervorzubringen, welche die auf das System angebrachten Kräfte bedingt haben, oder welche das System überhaupt besitzt. Wir betrachten sie nur, weil die Anschauung von den Verhältnissen der drehenden Bewegung und ihren Bedingungen zuweilen einfacher und bequemer ist, wenn wir diese drehende Bewegung durch die gleichzeitige Bewegung der Massenelemente mit gleichförmiger Geschwindigkeit nach der Richtung der Tangente und mit gleichmäfsig beschleunigter, durch einen konstantwirkenden Normaldruck bedingter Geschwindigkeit nach der Richtung des Radius hervorgebracht denken (§ 42).

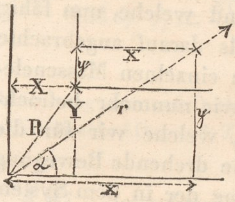
Da die Normalkräfte als Kräfte, die zwar in parallelen Ebenen liegen, deren Richtungen aber unter einander nicht parallel sind, erscheinen, so können wir ihre Wirkung im Allgemeinen auffassen nach dem in § 75 unter A. behandelten Fall; sie läfst sich also zurückführen (§ 75. AIII. S. 114) auf eine der Richtung und Gröfse nach zu bestimmende Resultirende Q, und auf ein Kräftepaar, welches in einer zur Richtung Q normalen Ebene liegt.

Es sei die Drehaxe die dritte Axe eines Koordinatensystems, dessen beide andern Axen also in einer zur Drehaxe normalen Ebene liegen. X, Y, Z seien die Korrdinaten des Schwerpunkts, x, y, z die Koordinaten der einzelnen Massenelemente, und x', y', z'

*) Vergleiche die Bemerkung am Schlusse des § 43.

seien die Koordinaten derselben Massenelemente in Bezug auf ein mit dem erwähnten Koordinatensystem paralleles durch den Schwerpunkt gehendes Koordinatensystem, endlich sei R der kürzeste Abstand des Schwerpunkts von der Drehaxe.

Zufolge dieser Disposition ist offenbar:



$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)} \qquad R = \sqrt{(X^2 + Y^2)}$$
$$x = X + x' \qquad y = Y + y'$$

und da die Normalkräfte sämmtlich in der Richtung ihres kürzesten Abstandes r von der Drehaxe wirken, so ist der Winkel α den sie mit der ersten Axe machen zu bestimmen durch die Werthe

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$
$$\sin\alpha = \frac{y}{r}.$$

Die Resultirende von Kräften in parallelen Ebenen drückt sich durch Gleichung 119) aus:

$$Q = \sqrt{\left\{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K.\sin\alpha)^2]\right\}}$$

worin wir hier für K die Werthe der in den einzelnen Massenelementen wirksam zu denkenden Normalkräfte zu setzen haben. Es ist aber nach Gleichung 79), S. 50 der Druck der Normalkraft:

$$dF = dm.w^2.r$$

und demnächst für jedes Massenelemennt:

$$K.\cos\alpha = dm.w^2.r.\frac{x}{r} = w^2.dm.x = w^2.dm.(X + x')$$
$$K.\sin\alpha = dm.w^2.r.\frac{y}{r} = w^2.dm.y = w^2.dm.(Y + y').$$

Man hat also, da w^2 gemeinschaftlich ist, die Resultirende aus allen Centrifugalkräften:

$$Q = w^2.\sqrt{\left\{[\Sigma(dm.X + dm.x')]^2 + [\Sigma(dm.Y + dm.y')]^2\right\}}.$$

Es ist aber nach dem Gesetz in § 81, S. 154 der Werth $\Sigma(dm.x')$ und $\Sigma(dm.y')$ jeder gleich Null, da diese Ausdrücke die Momentensummen für Ebenen vorstellen, die durch den Schwerpunkt gehen, und wenn man nun die Ausdrücke:

$$[\Sigma(dm.X + dm.x')]^2 \text{ und } [\Sigma(dm.Y + dm.y')]^2$$

berechnet, indem man sie auf die Form bringt:

$$[\Sigma(dm.X) + \Sigma(dm.x')] \text{ und } [\Sigma(dm.Y) + \Sigma(dm.y')]$$

so fallen die Summanden $\Sigma(dm.x')$ und $\Sigma(dm.y')$, da sie gleich Null sind fort, und man erhält schliefslich:

$$Q = w^2 \cdot \sqrt{\left\{[\Sigma(dm \cdot X)]^2 + [\Sigma(dm \cdot Y)]^2\right\}}$$

$$= w^2 \cdot \sqrt{\left\{[\Sigma(dm)]^2 \cdot [X^2 + Y^2]\right\}}.$$

$$155) \quad Q = w^2 \cdot (\Sigma \cdot dm) \cdot R = M \cdot w^2 \cdot R,$$

auch ergiebt sich nach Gleichung 119) für die Richtung von Q:

$$\cos A = \frac{w^2 \cdot [\Sigma(dm \cdot X) + \Sigma(dm \cdot x')]}{Q} = \frac{X}{R}; \quad \sin A = \frac{Y}{R}.$$

Hieraus folgt, dafs die Richtung der Resultirenden der Normalkraft mit der Richtung der kürzesten Entfernung des Schwerpunkts des Systems von der Drehungsaxe zusammenfällt, und folglich sowohl die Drehaxe, als die mit derselben parallele durch den Schwerpunkt gehende Koordinatenaxe schneidet.

Für eine Drehaxe, die durch den Schwerpunkt geht, ist $R = 0$, folglich auch die Resultirende aller Normalkräfte nach Gleichung 155) gleich Null. Aus dieser Gleichung und der eben angeführten Bemerkung folgt folgendes Gesetz:

> Wenn ein festes System um eine gegebene Axe rotirt, so ist der resultirende Druck aller in den einzelnen Massenelementen wirkenden Normalkräfte derselbe, welcher auch statt finden würde, wenn die Gesammtmasse des Systems in einem Punkte vereinigt, dessen Abstand gleich dem kürzesten Abstande des Schwerpunkts des Systems von der Drehaxe ist, mit der gemeinschaftlichen Winkelgeschwindigkeit des Systems um dieselbe Axe rotirt; für jede durch den Schwerpunkt gehende Rotationsaxe ist der Druck aller Normalkräfte gleich Null.

Rotation eines freien Systems. — Freie Axen.

§ 88. In einem freien System geht die Drehaxe immer durch den Schwerpunkt des Systems (§ 82. S. 157). Die Normalkräfte sind hier also immer als Kräfte aufzufassen, die in parallelen Ebenen liegen, und deren Resultirende gleich Null ist; der Fall entspricht also dem in § 75 unter C. S. 116 behandelten. Solche Kräfte können aber im Allgemeinen noch ein resultirendes Kräftepaar haben, dessen Ebene und Moment durch die Gleichungen 123), 123a) und 123b) zu bestimmen bleibt. Nach 123a) ist der Neigungswinkel der Paarebene gegen die parallele Ebene, in welcher die Kräfte liegen zu finden; da nun die Kraftrichtungen hier sämmtlich die Drehaxe schneiden, so ist ihr kürzester Abstand von derselben $R_{,,,} = 0$ und folglich findet sich tang $\varphi = \infty$, daher steht die Ebene des resultirenden Kräftepaars normal auf der Ebene der Kräfte, d. h. sie ist parallel mit der Drehaxe. Der Winkel ψ, unter welchem sie die angenommene Koordinatenaxe der X schneidet, ist nach Gleichung 123) zu bestimmen und nach Einsetzung der entsprechenden Werthe hat man:

$$\text{tang}\,\psi = \frac{\Sigma(dm\,.\,y'\,.\,z')}{\Sigma(dm\,.\,x'\,.\,z')}.$$

Endlich ist das Moment der resultirenden, in dieser Ebene liegenden Kräftepaares nach Gleichung 123b) und nach Einsetzung der entsprechenden Werthe:

$$w^2\,.\,\sqrt{\left\{[\Sigma(dm\,.\,y'\,.\,z')]^2 + [\Sigma(dm\,.\,x'\,.\,z')]^2\right\}}.$$

Da nun aber zufolge der Voraussetzung die Axe der Z' die resultirende Axe des freien Systems ist, deren Lage durch die auf das System angebrachten Kräfte bestimmt ist (vergl. § 86. No. 3), so mufs in Bezug auf jede zu dieser Axe normale Axe das resultirende Moment gleich Null sein (vergl. die Darstellung in § 79. No. 2). Das eben berechnete Moment ist aber ein solches, welches eine Drehung um eine Axe bedingen würde, die zu der Axe der Z' normal ist und mit der Axe der X den Winkel $(90^0 - \psi)$ bildet, (da die Paarebene dieses Moments mit der Axe der Z' parallel ist und mit der Axe der X den Winkel ψ macht). Es mufs also das eben berechnete Moment gleich Null sein. Nun bemerkt man aber, dafs der Werth dieses Moments bedingt ist, durch die Lage der Massenelemente gegen die resultirende Axe der Z'. Diese Lage kann von vorne herein so beschaffen sein, dafs der Ausdruck

$$w^2\,.\,\sqrt{\left\{[\Sigma(dm\,.\,y'\,.\,z)]^2 + [\Sigma(dm\,.\,x'\,.\,z')]^2\right\}} = 0$$

ist, was im Allgemeinen erfordern würde, dafs einzeln:

$$\Sigma(dm\,.\,y'\,.\,z') = 0 \text{ und } \Sigma(dm\,.\,x'\,.\,z') = 0$$

sei, oder es läfst sich auch denken, dafs die Massenelemente von vorne herein eine solche Lage nicht haben; dafs sich also für das Moment ein reeller Werth ergiebt. In diesem Falle müssen aber offenbar die Massenelemente in dem Augenblick in welchem Bewegung eintritt eine Lage annehmen, durch welche jene Bedingung erfüllt wird, d. h. es mufs das ganze System sich gegen die (durch die auf dasselbe angebrachten Kräfte bedingte) Rotationsaxe so verschieben, dafs die eben aufgestellte Bedingungsgleichung erfüllt wird. Das System rotirt dabei um die Axe der Z', allein in sehr eigenthümlicher Weise, indem nämlich sämmtliche Massenelemente gleichzeitig um eine zweite Axe rotiren, die gegen die Axe der Z' geneigt ist, und welche gemeinschaftlich mit den um sie rotirenden Massenelementen um die Axe der Z' als um diejenige, welche durch die auf das System angebrachten Kräfte gegeben ist, rotirt. Die hierdurch bedingten höchst merkwürdigen Bewegungsverhältnisse können wir hier nicht spezieller untersuchen, da dies eine zu weit führende Diskussion nöthig machen würde; wir können darauf um so eher verzichten, als dieselben für unsere Zwecke von minderer Wichtigkeit sind.

Eine Axe für welche die in dem System wirksam zu denkenden Normalkräfte (Centripetal- oder Centrifugalkräfte) der einzelnen Massenelemente in vollkommenem Gleichgewicht (§ 70) sich befinden, nennt man eine **freie Axe.**

Damit die Axe gegen fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sei, mufs die Resultirende aus allen Normalkräften gleich Null sein; dies ist der Fall, wie in § 87 nachgewiesen, wenn die Axe durch den Schwerpunkt des Systems geht. Eine freie Axe mufs also durch den Schwerpunkt des Systems gehen.

Aber nicht jede Axe, die durch den Schwerpunkt des Systems geht, ist eine freie Axe; es mufs vielmehr auch das aus den Normalkräften, welche eine Rotation um die Axe bedingen, hervorgehende resultirende Kräftepaar gleich Null sein, um die Axe zu einer freien zu machen, d. h. es müssen die Momentensummen für drei zu einander normale Axen gleich Null sein. Dazu gehört nach der obigen Darstellung:

$$156)\quad \begin{cases} \Sigma(dm\,.\,x'\,.\,z') = 0 \text{ und} \\ \Sigma(dm\,.\,y'\,.\,z') = 0, \end{cases}$$

wenn z' die Koordinaten der Massenelemente in Bezugauf die Rotationsaxe, x' und y' aber die Koordinaten der Massenelemente in Bezug auf zwei andere, im Schwerpunkt des Systems auf der Rotationsaxe normale, Axen bezeichnen.

Diese Bedingung wird erfüllt:

a) wenn z' für alle Massenelemente gleich Null ist, d. h. wenn alle Massenelemente in einer Ebene liegen, die auf der Axe der Z' normal ist. Hieraus folgt:

> Für Massenelemente, die sämmtlich in einer Ebene liegen, ist die im Schwerpunkt der Ebene zu derselben normale Axe eine freie Axe.

b) Wenn das System durch Ebenen, die normal zu der Axe der Z' sind, sich in ebene Schichten zerlegen läfst, und für jede einzelne Schicht, deren Massenelemente also immer einen gemeinschaftlichen Werth von z' haben, die Bedingungen $\Sigma(dm\,.\,x') = 0$ und $\Sigma(dm\,.\,y' = 0)$ erfüllt werden, d. h. also wenn die Schwerpunkte der sämmtlichen Schichten in der Axe der Z' liegen. Dies wird durch folgendes Gesetz ausgedrückt:

> Jede durch den Schwerpunkt gehende Axe, welche die Schwerpunkte sämmtlicher auf derselben normal stehenden Elemente eines Systems enthält, ist eine freie Axe.

Es läfst sich zeigen, dafs jedes feste System wenigstens drei freie Axen haben müsse, und dafs diese freien Axen im Schwerpunkt normal zu einander sind.

Kennt man eine freie Axe des Systems, so lassen sich die andern freien Axen zuweilen ohne weitere Rechnung angeben, denn nach dem eben angeführten, nur mit Hilfe ausgedehnter analytischer Rechnungen nachzuweisenden Satze, müssen die andern Axen in der Ebene liegen, welche im Schwerpunkt normal zu der ersten freien Axe ist; haben nun sämmtliche in dieser Ebene liegenden Axen zu der ersten Axe ganz gleiche Beziehungen, so werden alle diese Axen freie sein. Dies ist z. B. der Fall mit einem homogenen Rotationskörper: denn, dreht sich eine ebene Figur um eine in ihrer Ebene liegende Axe, so ist diese Axe eine freie Axe des erzeugten Rotationskörpers, nach dem Satz b), und wenn man durch den Schwerpunkt dieses Rotationskörpers eine zu jener Axe normale Ebene legt, so liegen die andern freien Axen in dieser Ebene, und da der Durchschnitt dieser Ebene mit dem Rotationskörper entweder eine Kreisfläche oder eine Kreis-Ringfläche ist, so haben alle Durchmesser dieser Fläche dieselben Beziehungen zur Rotationsaxe, sind also sämmtlich freie Axen.

Für jede Axe, die mit einer freien Axe parallel ist, aber nicht durch den Schwerpunkt geht, ist das Moment des auf Kippen der Achse wirkenden Kräftepaars ebenfalls gleich Null; denn wenn für die freie Axe $\Sigma(dm.x'.z') = 0$ und $\Sigma(dm.y'.z')$ gleich Null ist, und wir legen durch den Schwerpunkt eine Ebene normal zu den beiden Axen, nehmen den Durchschnittpunkt der neuen Axe mit diese Ebene als Anfangspunkt des neuen Koordinatensystems, dessen Axen parallel sein sollen mit denen des erstgedachten Koordinatensystems (dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt war), so sind, wenn X und Y die Koordinaten jenes neuen Anfangspunkts bedeuten:

$$z = z'; \quad x = X + x'; \quad y = Y + y'$$

wenn wir diese Werthe in die obigen Bedingungs-Gleichungen (156) einsetzen, so ist:

$$\Sigma(dm \,.\, x \,.\, z) \;-\; X \,.\, \Sigma(dm \,.\, z') = 0$$

$$\Sigma(dm \,.\, y \,.\, z) \;-\; Y \,.\, \Sigma(dm \,.\, z') = 0$$

und da $\Sigma(dm.z') = 0$ ist (§ 81. S. 154), so ist auch $\Sigma(dm.x.z) = 0$ und $\Sigma(dm \,.\, y \,.\, z) = 0$, d. h. es sind die Summen der Momente der Normalkräfte für zwei zu der neuen Axe normale Koordinatenaxen einzeln gleich Null, und daher besteht kein Bestreben die Axe zu kippen. Wohl aber besteht für solche Axe durch die Resultirende der Normalkräfte (Gleichung 155) ein Bestreben auf Verschieben, d. h. ein Druck auf die Axe. Eine Axe für welche kein Bestreben auf Kippen besteht, sondern nur ein aus den Normalkräften resultirender Druck, nennen wir eine Hauptaxe des Systems.

Rotation eines Systems mit fixen Punkten; Druck der Normalkräfte auf die fixen Punkte.

§ 89. Wenn ein festes System um einen fixen Punkt rotirt, der nicht der Schwerpunkt ist, und man denkt die Bewegung durch den Einflufs der in den einzelnen Massenelementen wirkenden Normal- und Tangentialkräfte bedingt, so ist zunächst der Druck auf den fixen Punkt gleich der Resultirenden aus allen Normalkräften; das ist nach Gleichung 155):

$$Q = M \,.\, w^2 \,.\, R.$$

worin M die Gesammtmasse des Systems und R den kürzesten Abstand des Schwerpunkts des Systems von der durch den fixen Punkt zu denkenden Rotationsaxe bezeichnet. Ist diese, durch die auf das System angebrachten Kräfte bedingte, und nach § 79. S. 145 der Lage nach zu bestimmende Rotationsaxe eine Hauptaxe (§ 88. Schlufs), so wird die Rotation um diese Hauptaxe unmittelbar statt finden; ist jedoch die in angegebener Weise ermittelte Rotationsaxe keine Hauptaxe, so mufs das feste System seine Lage gegen dieselbe so lange ändern, bis eine Hauptaxe des Systems mit dieser gegebenen Rotationsaxe zusammenfällt. Die hierdurch komplizirten Bewegungsverhältnisse sind analog denen in § 87. S. 172 erwähnten Rotationsbewegungen eines freien Systems, dessen resultirende Paaraxe nicht mit einer freien Axe zusammenfällt, und können hier nicht weiter erörtert werden.

Bei weitem gröfsere Wichtigkeit für unsere Zwecke hat die Rotation eines festen Systems um eine fixe Axe, die durch zwei gegebene fixe Punkte geht. Behalten wir die in § 79 und 87 gewählten Bezeichnungen bei, so läfst sich der Fall offenbar zurück führen auf den in § 79 unter No. 2 (S. 148) behandelten Fall, dafs sämmtliche Drucke (die Normalkräfte) in Ebenen liegen, die zur fixen Axe normal sind, wir werden also die Drucke in den fixen Punkten I und II nach zwei Richtungen, die parallel sind, mit zwei durch den ersten fixen Punkt angenommenen zu der fixen Axe und unter einander normalen Koordinatenaxen finden, indem wir in die Gleichung 142b) für $K.\cos\alpha$ und für $K.\cos\beta = K.\sin\alpha$ die auf Seite 170 bestimmten Werthe $w^2.dm.x$ und $w^2.dm.y$ setzen. Wir haben sodann:

$$157)\quad \begin{cases} Q_I' = w^2.\dfrac{\Sigma[dm.x.(L-z)]}{L}; & Q_I'' = w^2.\dfrac{\Sigma[dm.y.(L-z)]}{L} \\ Q_{II}' = w^2.\dfrac{\Sigma(dm.x.z)}{L}; & Q_{II}'' = w^2.\dfrac{\Sigma(dm.y.z)}{L}, \end{cases}$$

worin Q_I' und Q_I'' die Drucke im ersten fixen Punkt Q_{II}' und Q_{II}'' die Drucke im zweiten fixen Punkt; z die Abstände der Massenelemente von einer Ebene durch den ersten fixen Punkt, und normal zur Drehaxe, x und y die Ordinaten der Massenelemente auf den Axen gemessen, in deren Richtung die Drucke Q_I', Q_I'' und Q_{II}'', Q_{II}'' statt finden, L die Entfernung der beiden fixen Punkte von einander, und w die Winkelgeschwindigkeit des Systems bezeichnen.

Es seien wieder x', y', z' die Koordinaten in Bezug auf ein Koordinatensystem, das mit dem angenommenen parallel ist, und dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt ist; es seien X, Y, Z die Koordinaten des Schwerpunkts in Bezng auf das zuerst angenommene System. Setzt man wieder $x = X + x'$, $y = Y + y'$, $z = Z + z'$ wie auf Seite 170 und beachtet man, dafs $\Sigma(dm.x')$, $\Sigma(dm.y')$, $\Sigma(dm.z')$ einzeln gleich Null sind (§ 81. S. 154), so lassen sich die Werthe für die Drucke durch leichte Rechnung umformen in folgende:

$$157a)\quad \begin{cases} Q_I' = w^2.\dfrac{X.(L-Z).\Sigma(dm) - \Sigma(dm.x'.z')}{L} \\ Q_{II}' = w^2.\dfrac{X.Z.\Sigma(dm) + \Sigma(dm.x'.z')}{L} \\ Q_I'' = w^2.\dfrac{Y.(L-Z).\Sigma(dm) - \Sigma(dm.y'.z')}{L} \\ Q_{II}'' = w^2.\dfrac{Y.Z.\Sigma(dm) + \Sigma(dm.y'.z')}{L}. \end{cases}$$

Ist die Rotationsaxe eine Hauptaxe, so ist für die durch den Schwerpunkt gehende mit derselben parallele Axe, welche dann eine freie Axe ist $\Sigma(dm.x'.z') = 0$ und $\Sigma(dm.y'.z') = 0$, folglich hat man für diesen Fall:

$$157\text{b})\quad \begin{cases} Q_I' = w^2 \cdot \dfrac{X}{L} \cdot (L-Z) \cdot M; & Q_I'' = w^2 \cdot \dfrac{Y}{L} \cdot (L-Z) \cdot M \\ Q_{II}' = w^2 \cdot \dfrac{X}{L} \cdot Z \cdot M; & Q_{II}'' = w^2 \cdot \dfrac{Y}{L} \cdot Z \cdot M. \end{cases}$$

Setzt man Q_I' und Q_I'' im ersten fixen Punkt, und ebenso Q_{II}' Q_{II}'' im zweiten fixen Punkt zu einer Resultirenden zusammen, so hat man nach einer einfachen Umformung mit Hilfe der Gleichung 155), S. 171:

$$157\text{c})\quad \begin{cases} Q_I = w^2 \cdot M \cdot R \cdot \dfrac{L-Z}{L}; & Q_{II} = w^2 \cdot M \cdot R \cdot \dfrac{Z}{L} \\ \quad = Q \cdot \dfrac{L-Z}{L}; & \quad = Q \cdot \dfrac{Z}{L}. \end{cases}$$

worin Q_I den resultirenden Druck auf den ersten fixen Punkt, Q_{II} denjenigen auf den zweiten fixen Punkt, R den Abstand des Schwerpunkts von der Drehaxe, M die Gesammtmasse des Systems, Q den resultirenden Druck durch die Normalkraft bezeichnen. Auch ergiebt sich leicht, dafs in diesem Falle Q_I und Q_{II} parallel mit dem kürzesten Abstande R sind. Hieraus folgt:

> Rotirt ein festes System um eine fixe Axe, welche parallel mit einer freien Axe des Systems ist, so kann man die Gesammtmasse des Systems im Schwerpunkt vereinigt rotirend denken, und findet den Druck auf die fixen Punkte, indem man den Druck der durch den Schwerpunkt gehenden Normalkraft auf die fixen Punkte nach § 79 oder 80 reduzirt. Ist die fixe Axe des Systems nicht parallel mit einer freien Axe, so ist dies nicht zulässig.

Pendelschwingungen eines festen Systems um horizontale und um geneigte Axen.

§ 90. Ein festes System, welches unter dem Einflufs der Schwere um eine fixe Axe schwingt, so dafs es bei dieser Schwingung eine stabile Gleichgewichtslage durchläuft, nennen wir ein **körperliches** (— zusammengesetztes — physikalisches —) **Pendel.**

Ist nämlich ein festes System um eine fixe Axe drehbar, so ist jedes Massenelement gezwungen in einem Kreisbogen sich zu bewegen, und es wird, wenn die Bedingungen des § 56 und 57 statt finden, eine schwingende Bewegung machen; es mufs folglich auch das ganze System schwingen. Nun haben aber die einzelnen Massenelemente verschiedene Abstände von der Drehaxe, und auch verschiedene Erhebungswinkel; jedes Massenelement würde also, wenn es frei schwingen könnte, im Allgemeinen eine andere Schwingungsdauer (§ 57) und folglich auch eine audere Winkelgeschwindigkeit besitzen; dies ist nicht möglich, sobald die Massenelemente ein festes System bilden.

Haben wir es nun mit der Untersuchung der Bewegungsverhältnisse eines festen Systems welches um eine fixe Axe schwingt zu thun, so verfahren wir wieder am Besten in der Weise, dafs wir einen Punkt zu ermitteln suchen, der mit dem System fest verbunden ist, und in welchem die Gesammtmasse des System vereinigt, dieselben Einflüsse auf das System ausüben würde, wie die in den einzelnen Punkten vertheilten Massenelemente. Diesen Punkt nennen wir den Mittelpunkt der Schwingung, auch wohl kurz den Schwingungspunkt.

Der Schwingungspunkt mufs offenbar folgende Bedingungen erfüllen:

1) die in dem Schwingungspunkt vereinigte Gesammtmasse mufs denselben Druck auf die fixen Punkte ausüben, welcher aus den einzelnen Massenelementen resultiren würde;
2) wenn das System durch die stabile Gleichgewichtslage geht (§ 54 bis 57), mufs auch der Schwingungspunkt in stabiler Gleichgewichtslage sein, und
3) die in dem Schwingungspunkt vereinigte Gesammtmasse mufs dieselbe Schwingungsdauer haben, welche das körperliche Pendel hat.

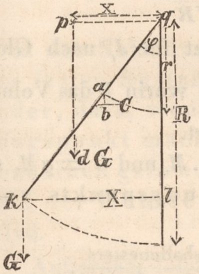
Wir betrachten zunächst den Fall, in welchem die fixe Axe horizontal ist, und dann folgt leicht, dafs zur Erfüllung der ersten Bedingung gehört, dafs der Schwingungspunkt in derselben zur fixen Axe normalen Ebene liegen mufs, in welcher der Schwerpunkt liegt (§ 79) und ebenso leicht folgt aus der zweiten Bedingung, dafs der Schwingungspunkt auch in derjengien Ebene liegen mufs, welche durch die Axe und den Schwerpunkt gelegt werden kann; es folgt also, indem wir die beiden ersten Bedingungen zusammenfassen, dafs der Schwingungspunkt in der Durchschnittslinie zweier Ebenen liegen mufs, von denen die eine durch den Schwerpunkt normal zur Axe, und die andere durch den Schwerpunkt und die Axe gelegt werden kann; hierin liegt der Satz:

der Schwingungspunkt eines festen Systems liegt in der Linie, welche den kürzesten Abstand des Schwerpunkts von der fixen Axe darstellt.

Zur Untersuchung der dritten Bedingung stellen wir folgende Betrachtungen an:

Es bezeichne r den Abstand des Schwingungspunkts von der Drehaxe, und wir denken in demselben die Gesammtmasse $M = \frac{G}{g}$ des Systems vereinigt, $ac = ds$ sei das Wegelement, welches der Schwingungspunkt bei der Drehung durchläuft $ab = dh$ sei das Wegelement in der Richtung der Schwere, so folgt aus § 52, wenn wir unter f das Aenderungsmaafs in der Richtung ac verstehen:

$$f . M . ds = M . g . dh; \quad f = g . \frac{dh}{ds} = g . \sin \varphi.$$



Bezeichnet c die Peripheriegeschwindigkeit des Schwingungspunktes, so ist $c = w . r = f . dt$, und wenn wir unter f' das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit verstehen, so ist $w = f' dt$; wir haben also:

$$c = w . r = f . dt = f' . dt . r.$$

Daher

$$\text{I.} \quad f' = \frac{f}{r} = g . \frac{\sin \varphi}{r}.$$

Nun ist hier die Schwere als die auf das System angebrachte Kraft anzusehen, und daher das Moment des auf Drehung wirkenden Kräftepaars $\Sigma(dG . x)$, wenn $x = pq$ der Hebelsarm der in dem betrachteten Massenelement wirkenden Schwerkraft ist; bezeichnet $kl = X$ den Abstand des Schwerpunkts von der durch die Axe gelegten Vertikalebene, so ist nach Gleichung 144a), S. 154:

$$\Sigma(dG . x) = G . X$$

und da $X = kl = R . \sin \varphi$ ist, wenn wir unter R den Abstand qk des Schwerpunkts von der Drehaxe verstehen, so ist das auf Drehung wirkende Moment: $GR . \sin \varphi$. Substituiren wir für die auf das System angebrachten Kräfte, die in dem System thätigen Kräfte, so ist deren Moment nach Gleichung 145a) $f_{,} J_{,}$ und es ist nach dem Gesetz in § 86. No. 1 und nach Gleichung 154c) zu setzen:

$$G . R . \sin \varphi = f_{,} . J_{,}.$$

$$\text{II.} \quad f_{,} = \frac{G . R . \sin \varphi}{J_{,}}.$$

Da nun der Schwingungspunkt ein mit dem System fest verbundener Punkt ist, so hat er in jedem Augenblick dieselbe Winkelgeschwindigkeit, welche das System hat, es mufs daher auch das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit des Schwingungspunkts f' gleich demjenigen der Winkelgeschwindigkeit sein, welche die auf das System angebrachten Kräfte bedingen, d. h. es ist zu setzen $f' = f_{\prime}$ oder

$$g \cdot \frac{\sin\varphi}{r} = \frac{G \cdot R \cdot \sin\varphi}{J_{\prime}},$$

da nun $\sin\varphi$ auf beiden Seiten der Gleichung identisch ist, insofern der Schwingungspunkt denselben Erhebungswinkel hat, wie der Schwerpunkt, weil beide auf demselben Radius liegen, so folgt der Abstand des Schwingungspunkts von der Drehaxe:

$$158)\quad r = \frac{gJ_{\prime}}{GR} = \frac{\gamma T_{\prime}}{GR} = \frac{T_{\prime}}{VR}$$

indem man nämlich für homogene Systeme setzt für $J_{\prime}$ nach Gleichung 146c) $\frac{\gamma}{g} \cdot T_{\prime}$ und für G den Werth γV, worin V das Volum und γ das Gewicht der Volumeinheit bezeichnet.

Setzt man nach Gleichung 147b) $J_{\prime} = \varrho_{\prime}^{2} \cdot M$ und $G = gM$, so findet man auch den Abstand des Schwingungspunkts vom Drehpunkt:

$$158a)\quad r = \frac{\varrho_{\prime}^{2}}{R} = \frac{\text{Quadrat des Drehungshalbmessers}}{\text{Abstand des Schwerpunkts}},$$

und folglich für ein Kreispendel bei geringen Ausschlägen nach Gleichung 190), S. 72 die Schwingungsdauer:

$$158b)\quad T = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{J_{\prime}}{GR}\right)} = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{T_{\prime}}{gVR}\right)}$$
$$= \pi\varrho_{\prime} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{gR}\right)} = 0{,}5620 \cdot \frac{\varrho_{\prime}}{R} \cdot \sqrt{R}.$$

Der Punkt, in welchem die Axe durch die Ebene geschnitten wird, welche man normal zur Axe durch den Schwingungspunkt legen kann, heifst der Aufhängepunkt des körperlichen Pendels.

Denken wir, das System schwinge um eine andere fixe Axe, welche durch den eben bestimmten Schwingungspunkt geht, und mit der eben betrachteten Axe parallel ist, so dafs der eben ermittelte Schwingungspunkt nun Aufhängepunkt wird. Der Abstand des neuen Schwingungspunkts ist offenbar

$$r' = \frac{\varrho'^{2}_{\prime}}{R'}$$

wen $\varrho'_{\prime}$ den Drehungshalbmesser und R' den Abstand des Schwerpunkts von der neuen Drehaxe bezeichnet. Nun sei ϱ der Drehungshalbmesser für eine durch den Schwerpunkt gehende Axe, so ist, da der Abstand des Schwerpunkts von der ersten Axe R, und da offenbar $r = R + R'$ ist, nach Gleichung 150) und 158a)

$$r = \frac{\varrho^2 + R^2}{R} = R + R', \text{ daher}$$

$$159) \quad R' = \frac{\varrho^2}{R},$$

aufserdem ist offenbar nach derselben Gleichung und mit Benutzung des eben gefundenen Werths

$$r' = \frac{\varrho^2 + R'^2}{R'} = \frac{\varrho^2}{R'} + R' = R + R'$$

also

$$159\text{a}) \quad r' = r,$$

d. h. der Schwingungspunkt und der Aufhängepunkt eines festen Systems stehen in solcher Beziehung zu einander, dafs, wenn man den Schwingungspunkt zum Aufhängepunkt macht, und läfst das System um eine durch denselben gehende mit der vorigen parallele Axe schwingen, der frühere Aufhängepunkt nun Schwingungspunkt wird.

Aufserdem folgt aus der Gleichung 159) noch

$$R' . R = \varrho^2,$$

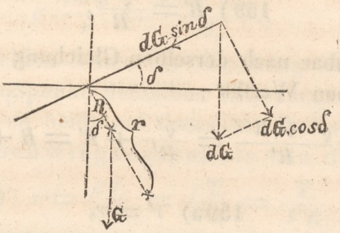
d. h. das Quadrat des Drehungshalbmessers für eine durch den Schwerpunkt gehende Axe ist gleich dem Produkt aus den Abständen des Schwerpunkts von dem Aufhängepunkt und von dem Schwingungspunkt.

Da nun ferner ϱ^2, d. i. das Quadrat des Drehungshalbmessers für eine bestimmte durch den Schwerpunkt gehende Axe ein konstanter Werth ist, so folgt, dafs auch $R . R'$ ein konstanter Werth ist, und folglich liegt hierin das Gesetz:

> Wenn man in einem festen System beliebig viele horizontale und unter sich parallele Axen denkt, und man denkt für jede Axe den entsprechenden Schwingungspunkt, so ist das Produkt aus dem Abstande des Schwerpunktes von einer beliebigen Axe, und aus dem Abstande des Schwerpunkts von dem zu dieser Axe gehörigen Schwingungspunkte für alle parallelen Axen ein konstanter Werth, und gleich dem Quadrat des Drehungshalbmessers für eine durch den Schwerpunkt gehende parallele Axe.

Wir haben bis jetzt die Schwingungen eines Systems um eine horizontale Axe betrachtet; nehmen wir nunmehr an, die fixe

Axe sei nicht horizontal, sondern bilde mit der Horizontalen den Winkel δ.



Offenbar lassen sich nun die in den einzelnen Massenelementen wirksamen Drucke der Schwerkraft zerlegen in zwei andere, von denen die einen $dG . \sin\delta$ durch den Widerstand der fixen Punkte aufgehoben werden, die andere $dG . \cos\delta$ aber als lauter gleich grofse in den einzelnen Massenelementen wirksame und konstant wirkende Drucke zu betrachten sind. Wir werden für diese Drucke genau dieselben Betrachtungen anstellen können, die wir zu Anfange dieses Paragraphen für die Drucke angestellt haben, die parallel mit der Schwerkraft waren, und es werden offenbar überall dieselben Resultate gefunden werden, wenn wir nur überall für das Aenderungsmaafs der Schwere g jetzt das Aenderungsmaafs $g . \cos\delta$ einführen. Wir finden dann nach I. und II. (S. 179):

$$f' = g . \cos\delta . \frac{\sin\varphi}{r_0} \qquad f_{\prime} = \frac{G . \cos\delta . R_0 . \sin\varphi}{J_{\prime}}$$

worin r_0 den kürzesten Abstand des Schwingungspunkts von der geneigten Drehungsaxe, R_0 den kürzesten Abstand des Schwerpunkts von derselben Axe $J_{\prime}$ das Trägheitsmoment in Bezug auf dieselbe Axe bezeichnet. Durch Gleichsetzung beider Werthe findet man wieder wie in Gleichung 158 und 158a):

$$160)\ r_0 = \frac{gJ_{\prime}}{GR_0} = \frac{\gamma T_{\prime}}{GR_0} = \frac{T_{\prime}}{VR_0} = \frac{\varrho_{\prime}^2}{R_0}$$

worin unter r_0 der Abstand eines Punkts von der Drehaxe, der auf der kürzesten Entfernung des Schwerpunkts von der Drehaxe liegt, verstanden ist, welcher, wenn die Gesammtmasse des Systems in demselben vereinigt wäre, mit dem System dieselbe Schwingungsdauer hätte, dieselbe Reaktion in den fixen Punkten hervorrufen, auch mit dem System gleichzeitig die stabile Gleichgewichtslage passiren würde. Die Schwingungsdauer eines solchen Systems findet sich leicht durch Gleichung 90) S. 72, wenn man für g den Werth $g . \cos\delta$ setzt:

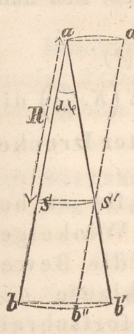
$$160\text{a)}\quad T = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{r_0}{g \cdot \cos\delta}\right)} = 0{,}5620 \cdot \sqrt{\left(\frac{r_0}{\cos\delta}\right)}.$$

Man sieht aus Gleichung 158) und 160), dafs wenn die fixe Axe durch den Schwerpunkt geht, wenn also $R = 0$, oder $R_0 = 0$ ist, der Abstand des Schwingungspunktes und auch die Schwingungsdauer unendlich grofs sein müfste, d. h. dafs ein solches System überhaupt nicht schwingt, ebenso folgt aus Gleichung 160a) dafs wenn $\delta = 90^0$ ist, d. h. wenn die Schwingungsaxe vertikal ist, ebenfalls die Schwingungsdauer unendlich grofs sein müfste, d. h. dafs in diesem Fall keine Pendelschwingungen statt finden können.

Uebrigens gelten, wie leicht zu übersehen ist, die Gesetze der Gleichungen 159 und 159a) auch für geneigte Axen.

Zurückführung eines festen Systems mit fixen Punkten auf ein freies System.

§ 91. Denken wir ein festes System, welches um einen fixen Punkt oder um eine fixe Axe rotirt, und stellen wir uns vor, dafs wir in jedem Augenblicke die Reaktionen (§ 79, S. 144) kennen, welche in den fixen Punkten statt finden müssen, um dieselben als fixe Punkte zu konstituiren. Wenn wir nun das System als freies System betrachten, und wir denken in den Punkten, die wir bisher als fixe Punkte angesehen haben, Kräfte auf das System angebracht, deren Angriffspunkte diese Punkte sind, und die in jedem Augenblick der Richtung und Gröfse nach gleich jenen Reaktionen sind, so mufs offenbar das System genau dieselbe Bewegung haben, die es als System mit fixen Punkten hatte. Es wird sich durch diese Betrachtungsweise jedes System mit fixen Punkten auf ein freies System zurückführen lassen.



Da aber jedes freie System sich so bewegt, als habe der Schwerpunkt eine fortschreitende Bewegung, und als rotirten alle Massenelemente mit gleicher Winkelgeschwindigkeit um eine Axe, die durch den Schwerpunkt geht, so mufs dieses Gesetz der obigen Darstellung zufolge auch für ein System mit fixen Punkten gelten. Dafs dem so sei, läfst sich durch folgende Betrachtung veranschaulichen. Es sei a ein fixer Punkt des Systems, S der Schwerpunkt, R der Abstand des Schwerpunkts von der Drehaxe, b sei ein beliebiges Massenelement, w die Winkelgeschwindigkeit, und es sei in irgend einem Zeitelement das System aus der Lage aSb durch Drehung um den Winkel $d\varphi$ in die Lage $aS'b'$ gekommen, durch Rotation um den den Punkt a; es läfst sich nun zufolge des Grundsatzes § 24 (S. 29) die Bewegung auch so betrachten, als ob das System in diesem Zeitelement sich so bewegt hätte, dafs zuerst der Schwerpunkt und alle Massenelemente gemeinschaftlich um gleiche und parallele Wegstücken fortgeschritten wären, und dafs dann alle Massenelemente um eine Drehaxe, die parallel mit der Axe durch den fixen Punkt ist, und durch den Schwerpunkt geht, sich um den Winkel $d\varphi$ gedreht hätten, wodurch dann der Punkt a' wieder in den Punkt a, und der Punkt b'' in den Punkt b' rücken, und folglich das System die Lage $aS'b'$, die es auch durch Rotation um die fixe Axe erlangt hat, annehmen würde. Es ist hierbei wieder gleichgiltig, in welcher Reihenfolge wir diese beiden Bewegungen uns vorstellen; jedenfalls finden aber beide Bewegungen während der Dauer desselben Zeitelements dt statt, in dessen Verlauf auch die Drehung um den Punkt a statt finden kann. Hieraus folgt:

1) Die Drehung um die Axe durch den Schwerpunkt mufs man so ansehen, als ob sie mit derselben Winkelgeschwindigkeit erfolgt, wie die Drehung um den fixen Punkt, wie dies durch eine einfache Betrachtung der Figur sich zeigen läfst.

2) Die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung des Schwerpunkts ist offenbar gleich der Geschwindigkeit, mit welcher der Schwerpunkt das Bogenelement SS' durchläuft, d. i. gleich wR, folglich ist das Aenderungsmaafs der fortschreitenden Bewegung $f = f_{,}R$, wenn $f_{,}$ das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit ist.

Mit Anwendung der Gleichung 154c) und 149) ergiebt sich nun:

$$161) \quad f = f_{,}R = \frac{\Sigma(Ka)}{J_{,}} . R = \frac{\Sigma(Ka)}{R . M} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + \varrho^2)} .$$

Nach Gleichung 139) (S. 137) ist $\frac{\Sigma(Ka)}{R} = \Sigma\left(K . \frac{a}{R}\right)$ die Summe sämmtlicher auf den Abstand R reduzirter Drucke; hierin liegt folgender Satz:

Wenn ein festes System um eine als fix zu betrachtende Axe mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit w rotirt, so läfst sich die Bewegung auch so betrachten, als durchlaufe der Schwerpunkt in jedem Zeitelement mit fortschreitender Bewegung ein Wegelement, das normal ist zu dem kürzesten Abstand des Schwerpunkts von der Drehaxe, während gleichzeitig sämmtliche Massenelemente um eine durch den Schwerpunkt gehende, mit der fixen Axe parallele Axe mit derselben Winkelgeschwindigkeit w rotiren. Das Aenderungsmaafs jener fortschreitenden Bewegung drückt sich aus durch die Summe aller auf den Abstand des Schwerpunkts reduzirten Drucke, dividirt durch die Masse und multiplizirt mit dem Verhältnifs des Quadrats des kürzesten Abstandes des Schwerpunkts von der fixen Axe zur Summe dieses Quadrates und dem Quadrat des Drehungshalbmessers für die durch den Schwerpunkt gedachte Axe.

Aus der Gleichung 161) folgt, dafs der Druck, der im Schwerpunkt auf fortschreitende Bewegung wirkt, und welcher durch die Reaktion im fixen Punkte aufgehoben werden mufs, indem er mit dieser Reaktion ein Kräftepaar bildet, sich ausdrückt durch:

$$161\text{a})\quad K = fM = \frac{\Sigma(Ka)}{R} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + \varrho^2)}\,.$$

Endlich ist das Moment des Kräftepaars, welches auf Drehung des Schwerpunkts um den fixen Punkt wirkt

$$161\text{b})\quad K \,.\, R = \Sigma(Ka) \cdot \frac{R^2}{R^2 + \varrho^2}$$

und das Moment des Kräftepaars, welches auf Drehung um die durch den Schwerpunkt gehende parallele Axe wirkt, nach Gleichung 145a) und 161):

$$161\text{c})\quad f_{\prime}J = \frac{\Sigma(Ka)}{J_{\prime}} \,.\, J = \Sigma(Ka)\frac{\varrho^2}{R^2 + \varrho^2}\,.$$

Durch Addition der Gleichungen 161b) und 161c) ergiebt sich wieder $\Sigma(Ka)$ als die Summe der Momente der Kräftepaare in der zur Drehaxe des Systems normalen Ebene.

d) Wirkung fester Systeme, die von mechanischen Kräften in Anspruch genommen werden, auf einander.

Grundsätze für die Wirkung fester Systeme auf einander.

§ 92. Denken wir zunächst zwei feste Systeme (§ 63) von Massenelementen, so können dieselben sich entweder berühren