gen die Ebene *YZ*, oder der Neigungswinkel der resultirenden Paar-Axe gegen die Axe der *X* nach No. 12:

$$141\text{ c)}\quad \operatorname{tang}\varphi_{,} = \operatorname{cotg}\eta_{,} = \frac{1}{\operatorname{tang}\eta_{,}}$$

u. s. w.

Die Gleichungen, welche entstehen, indem man anstatt der Koordinaten die Hebelsarme der Kräfte (nach Gleichung 135 a) S. 128) einführt, sind dieselben, welche wir unter 138 und 138 a) S. 131 auf anderem Wege entwickelt haben, uud es gelten für Kräftepaare, deren Paar-Axen normal zu einander sind und die nicht in derselben Ebene liegen, die auf S. 131 bei Gelegenheit der Entwickelung dieser Gleichungen aufgestellten Regeln.

Festes System mit fixen (festgehaltenen) Punkten.

§ 79. Die bisherigen Untersuchungen über die Gesetze, welche für Kräfte gelten, die auf ein festes System wirken, setzten überall voraus, dafs jeder Punkt des Systems diejenige Bewegung machen könne, welche durch die Einwirkung jener Kräfte bedingt wurde; wir nennen ein System, für welches diese Voraussetzung zutrifft ein freies System. Es kommen jedoch sehr häufig auch solche Anordnungen vor, bei denen jene Voraussetzungen nicht gelten; es kann vielmehr die Bedingung gestellt sein, dafs gewisse Punkte des festen Systems sich nicht bewegen dürfen, wie auch die Kräfte des Systems beschaffen sein mögen; solche Punkte nennen wir fixe Punkte, oder festgehaltene Punkte des Systems, und das System selbst im Gegensatz zu dem freien System, nennen wir ein festes System mit fixen Punkten. Die Fälle, welche hier von besonderem Interesse sind, sind folgende:

a) ein festes System mit einem fixen Punkte,
b) ein festes System mit zwei fixen Punkten,
c) ein festes System mit drei fixen Punkten.

Nach den vorstehenden Andeutungen haben wir unter einem fixen Punkt eines Systems überhaupt einen solchen zu verstehen, welcher weder eine fortschreitende Bewegung noch eine rotirende Bewegung um irgend eine Axe annehmen kann. Hieraus folgt zunächst:

1) dafs das System überhaupt keine fortschreitende Bewegung haben könne, denn eine solche würde allen Punkten des Systems gemeinschaftlich (§ 65. S. 88), folglich auch den fixen Punkten eigen sein, und dies widerspricht der Voraussetzung, und

2) dafs die Drehaxe des Systems immer durch die fixen Punkte gehen müsse; denn nur die Punkte, welche in der Drehaxe liegen, haben keine rotirende Bewegung.

Diese beiden Bedingungen erheischen, dafs in den fixen Punkten Kräfte wirksam sein müssen, deren Komponenten, in Bezug auf drei normale Axen, gleich und entgegengesetzt den Komponenten aller übrigen Kräfte in Bezug auf dieselben Axen sind (§ 71. S. 99), und deren Momente in Bezug auf irgend eine Axe, welche nicht durch die fixen Punkte geht, zusammen gleich und entgegengesetzt der Summe der Momente aller übrigen auf das System wirkenden Kräfte sein müssen; denn, denken wir solche Kräfte in das System eingeführt, so wird das System überhaupt im Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung sein (erste Bedingung), und es wird auch im Gleichgewicht gegen drehende Bewegung sein in Bezug auf jede Axe, welche nicht durch die fixen Punkte des Systems geht (zweite Bedingung).

Die Kräfte, welche dieser Darstellung nach in den fixen Punkten wirksam sein müssen, um diese Punkte eben als fixe zu konstituiren, nennen wir die Reaktionen des Systems gegen die fixen Punkte, und die ihnen gleichen aber entgegengesetzten Kräfte, deren Komponenten nach den drei Axen also in demselben Sinne wirken, wie die Komponenten der Resultirenden der fortschreitenden Bewegung des Systems nach denselben Axen, nennen wir die Drucke des Systems gegen die fixen Punkte.

1) Festes System mit einem fixen Punkt. Der Druck Q des Systems gegen den fixen Punkt und die Richtung dieses Druckes ist hier ohne Weiteres zu bestimmen durch die Gleichungen 110 und 111) S. 98; denn da nur ein fixer Punkt vorhanden ist, so mufs die Reaktion gegen denselben gleich der Gegenkraft des Systems ($-Q$) gegen fortschreitende Bewegung sein. Denken wir drei normale Koordinaten-Axen, auf welche wir das System beziehen, und denken wir in dem fixen Punkt, dessen Koordinaten X, Y und Z sein mögen, die Kraft $-Q$ wirkend, welche mit den Axen die Winkel A, B, Γ macht, so haben wir nunmehr in Bezug auf diese drei Axen drei Kräftepaare, und es ist das Moment des Kräftepaars, welches auf Drehung um die erste Axe wirkt:

$$\Sigma(K \,.\, \cos\beta \,.\, z) + \Sigma(K \,.\, \cos\gamma \,.\, y) - Q \,.\, \cos B \,.\, Z - Q \,.\, \cos\Gamma \,.\, Y),$$

nun ist aber (111. S. 98):

$$Q \,.\, \cos B = \Sigma(K \,.\, \cos\beta); \quad Q \,.\, \cos\Gamma = \Sigma(K \,.\, \cos\gamma);$$

folglich drückt sich das Moment des Kräftepaares in Bezug auf die erste Axe aus, durch:

$$\Sigma(K \cdot \cos\beta \cdot [z - Z]) + \Sigma(K \cdot \cos\gamma \cdot [y - Y]).$$

In ähnlicher Weise lassen sich die Momente der Kräftepaare in Bezug auf die beiden andern Axen darstellen. Nun sieht man aber leicht, dafs $(z - Z) \ldots (y - Y) \ldots (x - X)$ nichts anders bezeichnet, als die Koordinaten der Angriffspunkte der Kräfte in Bezug auf ein Koordinaten-System, dessen Anfangspunkt in dem ersten Koordinaten-System die Koordinaten X, Y, Z hat, mit anderen Worten, dessen Anfangspunkt der fixe Punkt ist. Verlegt man also den Anfangspunkt der Koordinaten in den fixen Punkt und nennt man die neuen Koordinaten $x_{,}, y_{,}, z_{,}$ so ist das Moment des Kräftepaares in Bezug auf die erste Axe

$$\Sigma(K \cdot \cos\beta \cdot z_{,}) + \Sigma(K \cdot \cos\gamma \cdot y_{,}) \text{ u. s. w.}$$

Es folgt sodann leicht folgendes Gesetz:

> Rotirt ein festes System um **einen** fixen Punkt, so erhält man die Lage der Drehaxe und das Moment des resultirenden Kräftepaares, indem man durch den fixen Punkt drei beliebige zu einander normale Koordinatenaxen annimmt, die Kräftepaare des Systems für diese drei Axen durch Bildung der entsprechenden Momentensummen bestimmt, und diese drei Kräftepaare nach den Gleichungen 141a) (resp. 138) zusammensetzt.

Für den Fall, dafs man die Koordinatenaxen durch den fixen Punkt legt, sind die Momente der Reaktion gegen den fixen Punkt in Bezug auf alle drei Axen Null; legt man dagegen die Koordinatenaxen nicht durch den fixen Punkt, so hat man die Momente der in dem fixen Punkte wirkenden Reaktion mit in Betracht zu ziehen.

2) Festes System mit zwei fixen Punkten. Hat ein festes System zwei fixe Punkte, so müssen beide in der Drehaxe liegen, und es folgt daher, dafs die Drehaxe des festen Systems durch die gerade Linie gegeben ist, welche durch die beiden fixen Punkte geht; es erfolgt daher die Drehung sämmtlicher Punkte des Systems in Ebenen, welche zu der Verbindungslinie der beiden fixen Punkte normal sind. Das Kräftepaar in Bezug auf diese Verbin-

dungslinie als Drehaxe mufs das resultirende Kräftepaar des Systems sein, und es müssen folglich die Kräftepaare in Bezug auf zwei Axen, die unter sich und zu der Verbindungslinie der fixen Punkte normal sind, einzelne gleich Null sein; denn wäre dies nicht der Fall, und man brächte das System auf drei Kräftepaare für diese drei Axen, so würde das resultirende Kräftepaar eine andere Paar-Axe haben, als die Verbindungslinie der beiden fixen Punkte. Nehmen wir nun ein rechtwinkliges Koordinaten-System an, dessen eine Axe (Axe der Z) mit der Verbindungslinie der beiden fixen Punkte der Richtung nach zusammenfällt, so liegen die beiden andern Axen in einer Ebene, welche normal zu der Verbindungslinie ist, und es sind die Koordinaten der fixen Punkte in Bezug auf diese beiden Axen gleich Null, während sie in Bezug auf die Axe der Z mit Z_I und Z_{II} bezeichnet werden mögen.

Bezeichnet nun Q_I' den Druck des Systems gegen den ersten fixen Punkt, parallel mit der Axe der X, Q_I'' und Q_I''' die Drucke in demselben Punkt, welche parallel mit der zweiten und dritten Axe sind, und bezeichnen wir analog mit Q_{II}', Q_{II}'', Q_{II}''' die Drucke des Systems in dem zweiten fixen Punkt; ihre Reaktionen also mit entgegengesetztem Vorzeichen, so müssen folgende Gleichungen erfüllt werden:

1) $\Sigma(K.\cos\alpha) - Q_I' - Q_{II}' = 0.$
2) $\Sigma(K.\cos\beta) - Q_I'' - Q_{II}'' = 0.$
3) $\Sigma(K.\cos\gamma) - Q_I''' - Q_{II}''' = 0.$
4) $\Sigma(K.\cos\beta.z) + \Sigma(K.\cos\gamma.y) - Q_I''.Z_I - Q_{II}''.Z_{II} = 0.$
5) $\Sigma(K.\cos\alpha.z) + \Sigma(K.\cos\gamma.x) - Q_I'.Z_I - Q_{II}'.Z_{II} = 0.$

Die drei ersten Gleichungen stellen die Bedingungen des Gleichgewichts gegen fortschreitende Bewegung dar, die beiden letzten die Bedingungen des Gleichgewichts gegen Drehung um die Axen X und Y. Die Gleichungen 1), 2), 4) und 5) genügen zur Bestimmung der Drucke Q_I' Q_I'' und Q_{II}' Q_{II}'', wogegen zur Bestimmung der Drucke Q_I''' und Q_{II}''', nämlich derjenigen, welche in den fixen Punkten auf Verschieben des Systems in der Richtung der Verbindungslinie wirken, nur die eine Gleichung 3) vorhanden ist; es bleibt daher einer von diesen beiden Drucken entweder willkürlich anzunehmen oder durch andere Bedingungen zu bestimmen.

Entwickelt man aus 1) und 5) die Drucke Q_I' und Q_{II}' so findet man:

$$142)\left\{\begin{array}{l} Q_I' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha.[z - Z_{II}]) + \Sigma(K.\cos\gamma.x)}{Z_I - Z_{II}} \\ Q_{II}' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha.[z - Z_I]) + \Sigma(K.\cos\gamma.x)}{Z_{II} - Z_I} \\ Q_I'' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\beta.[z - Z_{II}]) + \Sigma(K.\cos\gamma.y)}{Z_I - Z_{II}} \\ Q_{II}'' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\beta.[z - Z_I]) + \Sigma(K.\cos\gamma.y)}{Z_{II} - Z_I} \\ \text{während zwischen } Q_I''' \text{ und } Q_{II}''' \text{ nur die Beziehung bleibt} \\ \qquad Q_I''' + Q_{II}''' = \Sigma(K.\cos\gamma). \end{array}\right.$$

Man bemerkt leicht, dafs der Nenner in den obigen Gleichungen überall die Entfernung der beiden fixen Punkte ausdrückt, und dafs der Zähler die Momentensummen in Bezug auf Drehung um eine Axe bezeichnet, die durch den andern fixen Punkt geht, und normal sowohl zu der Richtung der Verbindungslinie der fixen Punkte, als zu der Richung ist, für welche man den Druck des Systems bestimmen will (135a). Hieraus ergiebt sich, dafs die Gleichungen 142) folgendes Gesetz darstellen:

Wenn in einem festen System, auf welches beliebige Kräfte einwirken zwei fixe Punkte vorhanden sind, so rotirt dasselbe um eine Axe, welche durch die beiden fixen Punkte geht (fixe Axe); man findet den Druck des Systems auf einen der fixen Punkte nach einer Richtung, die normal zu dieser Drehaxe ist, wenn man die Summe der Momente der sämmtlichen übrigen auf das System angebrachten Kräfte in Bezug auf eine Axe, die durch den andern fixen Punkt geht, und normal sowohl zur Drehaxe, als zu der betrachteten Richtung ist, dividirt durch den Abstand der beiden fixen Punkte.

Das Moment des auf Drehung um die fixe Axe wirkenden Kräftepaares drückt sich aus durch:

$$142\text{a})\left\{\begin{array}{l} \Sigma(K.\cos\alpha.y) + \Sigma(K.\cos\beta.x) \\ \text{oder auch durch} \\ \Sigma(K.\sin\gamma.R_{III}) \text{ (Gleichung 135a)} \end{array}\right.$$

wenn R_{III} den kürzesten Abstand jeder Kraftrichtung von der fixen Axe, und γ den Winkel bezeichnet, den die Kraftrichtung mit der fixen Axe bildet.

Liegen die sämmtlichen Drucke in Ebenen, welche normal zu der fixen Axe sind, so ist für alle Drucke $\gamma = 90°$ folglich

$\cos\gamma = 0$, und es folgt, daſs der Druck, welcher auf Verschieben in der Richtung der Axe wirkt, Null ist; bezeichnen wir den Abstand der beiden fixen Punkte mit L, die Koordinaten der Drucke $K\ldots$ in Bezug auf eine Ebene, welche durch den ersten fixen Punkt geht und normal zur fixen Axe ist mit $z_0\ldots$ so folgt:

$$Z_{II} - Z_I = L;\quad z = z_0 + Z_I = z_0 + Z_{II} - L$$
$$Z_I - Z_{II} = -L;\quad z - Z_{II} = z_0 - L;\quad z - Z_I = z_0.$$

Es gehen also die Gleichungen 142) für diesen Fall über in folgende:

$$142\,b)\quad \begin{cases} Q_I' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha.[L - z_0])}{L};\quad Q_I'' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\beta.[L - z_0])}{L} \\ Q_{II}' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha.z_0)}{L};\quad Q_{II}'' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\beta.z_0)}{L}; \end{cases}$$

d. h. wenn ein festes System um eine Axe rotirt, welche durch zwei fixe Punkte geht, und es liegen sämmtliche Kräfte, die auf das System wirken, in Ebenen die zu der Axe normal sind, so findet man den Druck auf jeden der fixen Punkte nach irgend einer Richtung, wenn man die mit dieser Richtung parallelen Komponenten jeder Kraft mit dem Abstand ihres Angriffspunkts von einer Ebene, welche in dem andern fixen Punkt normal zur Drehaxe ist, multiplizirt, und die Summe der Produkte durch den Abstand der beiden fixen Punkte dividirt.

3) Festes System mit drei fixen Punkten. Hat ein festes System drei fixe Punkte, so können dieselben entweder in gerader Linie liegen, oder nicht.

Liegen die der fixen Punkte in gerader Linie, so ist der Fall zum Theil auf den vorigen zurückzuführen; die Drehaxe muſs mit jener geraden Linie zusammenfallen, allein indem man die Bedingungsgleichung 1 bis 5 (S. 146) bildet, und die Drucke auf den dritten fixen Punkt Q_{III}', Q_{III}'', Q_{III}''' mit den Koordinaten X_{III}, Y_{III} und Z_{III} einführt, so ergiebt sich bald, daſs nun die Zahl der Unbekannten gröſser ist, als die Zahl der Gleichungen; es lassen sich also nun die Drucke auf die fixen Punkte nicht anders bestimmen, als indem man entweder neue Bedingungen giebt, oder indem man gewisse Drucke annimmt. Diese Bemerkung gilt natürlich nur unter der Voraussetzung, daſs das System ein absosut festes (§ 64. S. 84) sei, daſs wir also keine Formveränderung desselben voraussetzen dürfen. In manchen Fällen ist die Voraussetzung zulässig, daſs das System durch eine Ebene, die normal zu der Verbindungslinie der drei fixen Punkte ist, und durch den mittlern fixen

Punkt geht, sich in zwei feste Systeme jedes mit zwei fixen Punkten zerlegen lasse, und dann sind die Drucke auf die fixen Punkte nach Anleitung der Gleichungen 142) zu bestimmen, indem man die Kräfte, deren Angriffspunkte auf der einen Seite der Ebene liegen als zu dem einen System, diejenigen auf der anderen Seite der Ebene als zu dem andern System gehörig ansieht.

Hat ein festes System drei fixe Punkte, welche **nicht** in gerader Linie liegen, so ist das System in vollkommenem Gleichgewicht, denn es kann zufolge des für die fixen Punkte im Anfange dieses Paragraphen entwickelten Satzes No. 1 (S. 143) keine fortschreitende Bewegung haben, und es kann auch keine drehende Bewegung um irgend eine Axe annehmen, denn eine solche Drehaxe müfste alle drei fixen Punkte aufnehmen, und das würde der Voraussetzung widersprechen, dafs die drei fixen Punkte nicht in ein und derselben geraden Linie liegen.

Reduktion der Kräfte in einem System mit zwei fixen Punkten.

§ 80. Hat ein festes System zwei fixe Punkte, und ist es daher gezwungen um eine Axe zu rotiren, welche durch diese beiden Punkte geht, so nennt man diese Axe die fixe Axe des Systems.

I. Denken wir ein festes System mit zwei fixen Punkten, und es mögen die Kraftrichtungen sämmtlich in Ebenen liegen, die normal zur fixen Axe sind. Wir können nun den Druck bestimmen, den jede einzelne Kraft parallel mit ihrer Richtung in jedem der beiden fixen Punkte erzeugt, indem wir nämlich einstweilen alle übrigen Kräfte fortdenken, und die Gleichung 142b) oder das Gesetz derselben (S. 148) für diese Kraft allein anwenden. Wir sagen dann, die Kraft werde auf die fixen Punkte reduzirt. Wenn wir sämmtliche Kräfte einzeln auf die fixen Punkte reduziren, so erhalten wir in jedem der fixen Punkte eine Reihe von Drucken, deren Richtungen sämmtlich in einer Ebene liegen, die in dem fixen Punkt normal zur Drehaxe ist, und indem wir diese Drucke nach bekannten Regeln zusammensetzen, oder auch nach zwei rechtwinklig angenommenen Axen zerlegen, erhalten wir wieder die Drucke sämmtlicher Kräfte auf den fixen Punkt.

Die Richtigkeit dieses Gesetzes leuchtet ein, wenn wir berücksichtigen, dafs die mit den Kräften vorgenommenen Operationen lediglich die Berechnung der Gleichungen 142b) darstellen, mit dem Unterschiede, dafs wir für jede Kraft zuerst die Werthe $\frac{K.(L-z_0)}{L}$