Aus dieser Zusammenstellung ist ersichtlich, dafs die Vorzeichen der Kosinus von Winkeln, welche Linien bilden, die durch den Anfangspunkt der Koordinaten gehen und in irgend einer Abtheilung liegen, dieselben sind, welche auch die Koordinaten von Punkten haben, die in derselben Abtheilung liegen. Diese Vorzeichen sind jedoch nicht zu verwechseln mit den Vorzeichen, welche etwa die Koordinaten des Angriffspunkts der Kraft haben.

Es wirke z. B. in einem Punkte, dessen Koordinaten $+x$, $-y$, $+z$ sind, eine Kraft, welche mit der ersten und zweiten Axe einen Winkel mit positivem, mit der dritten Axe einen Winkel mit negativem Kosinus mache, so liegt der Winkel α im ersten, der Winkel β im vierten und der Winkel γ im zweiten Quadranten. Die Kraftrichtung ist in der Figur angedeutet. Die entgegengesetzte Kraftrichtung macht mit den drei Axen Winkel, deren Kosinus eben so grofs, aber entgegengesetzt sind, sie bildet also mit der ersten und zweiten Axe Winkel mit negativem und mit der dritten Axe einen Winkel mit positivem Kosinus, liegt also in der Abtheilung E.

Aus den obigen Darstellungen ist nun leicht ersichtlich, welche Bedeutung es haben müsse, wenn die Kräfte selbst mit positivem oder negativem Vorzeichen ($+P$ und $-P$) erscheinen, oder in die Rechnung eingeführt werden. Es kann dies nämlich in zwiefachem Sinne geschehen, entweder deuten die Vorzeichen $+P$ und $-P$ überhaupt nur an, dafs zwei Kräfte in parallelen Richtungen, aber entgegengesetzt wirkend, gedacht werden sollen, und es ist dann gleichgiltig, welche von beiden man als positiv, und welche man als negativ betrachten will, oder sie deuten an, dafs die betrachtete Kraft, welche mit negativem Vorzeichen erscheint, in ihrem Angriffspunkt in einem Sinne wirkt, welcher demjenigen der übrigen Kräfte entgegengesetzt ist; dafs sie also, wenn wir allgemein die Kräfte ziehend wirkend denken, in ihrem Angriffspunkte schiebend wirke; sie wird sofort in eine Kraft verwandelt werden können, welche ziehend wirkt, und dann absolut zu nehmen sein.

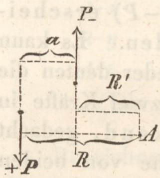
Gesetze über die Wirkung, Zusammensetzung und Zerlegung der Kräftepaare. Parallelogramm und Parallelepipedum der Kräftepaare und der Paar-Axen.

§ 78. Aus den Betrachtungen der §§ 74, 75 und 76 ergiebt sich, dafs, wenn auf ein festes System Kräfte wirken, welche in Bezug auf drehende Bewegung nicht im Gleichgewicht sind, das Gleichgewicht nur in dem einzigen Fall, wo die Kraftrichtungen parallel und zugleich die Summe sämmtlicher Kräfte nicht gleich Null ist (S. 105. No. 2, Gleichung 117a) durch eine einzige Gegenkraft herzustellen ist, in jedem andern Falle aber das Gleichgewicht gegen drehende Bewegung sich nur durch ein Kräftepaar herstellen läfst. Hieraus folgt, dafs überhaupt jede drehende Bewegung, welche Kräfte, die auf ein festes System wirken, diesem zu ertheilen streben, sich auf ein resultirendes Kräftepaar zurückführen lasse.

Es ist von Interesse einige Eigenschaften der Kräftepaare hier hervorzuheben.

1) Jedes Kräftepaar hat das Bestreben das System um eine Axe zu drehen, die normal ist zu der Ebene, in welcher das Kräftepaar liegt; der Punkt, in welchem die Axe die Ebene schneidet, läfst sich aus den Eigenschaften des Kräftepaares nicht bestimmen; es kann jeder beliebige Punkt sein, wenn er nicht durch andere Bedingungen gegeben ist.

Denn es sei R der kürzeste Abstand der Kraft $+P$ von der beliebig angenommenen Drehaxe A; R' der kürzeste Abstand der Kraft $-P$, dann ist die Summe der Momente, welche auf Drehung um die angenommene Axe wirken, $P.R - P.R' = P.(R - R')$, es ist aber immer $R - R'$ der kürzeste Abstand der Kraftrichtungen $+P$ und $-P$, bezeichnen wir denselben mit a, so ist Pa das Moment des Kräftepaars (S. 106), und es folgt, dafs die Summe der Momente für die Drehung um eine beliebige zur Ebene des Paares normale Axe immer gleich dem Moment des Kräftepaars ist, d. h. immer denselben Werth hat.



2) Man kann für jedes Kräftepaar ein anderes substituiren, welches in derselben Ebene liegt, und dasselbe Moment hat; es ist dabei gleichgiltig, welche Lage die Kraftrichtungen des neuen Paares gegen die des ersten haben, auch kann man entweder den Abstand der neuen Kraftrichtungen von einander, oder die Gröfse der Drucke derselben beliebig annehmen.

Denn, da das Bestreben auf Drehung um eine beliebige Axe durch die Summe der Momente in Bezug auf diese Axe gemessen wird, so hat das neue Kräftepaar in Bezug auf jeden beliebigen Punkt der Ebene immer dasselbe Bestreben auf Drehung, wie das erste Kräftepaar, sobald sein Moment dasselbe ist (No. 1).

3) Man kann daher die eine Kraftrichtung eines Kräftepaares durch einen beliebigen Punkt in der Ebene gehen lassen, und derselben eine beliebige Richtung geben, während die andere einen beliebigen Abstand von diesem Punkt bekommen kann.

Ist Pa das Moment eines Kräftepaars, und a' der Abstand des neuen Kräftepaars, so ist:

$$139)\quad \begin{cases} P' = \dfrac{Pa}{a'} \\ a = \dfrac{Pa}{p'} \end{cases}$$

4) Jedes Kräftepaar kann durch ein anderes ersetzt werden, welches in einer parallele Ebene liegt, und dasselbe Moment hat.

Denn da das Bestreben auf Drehung um irgend eine zur Ebene des Paares normale Axe durch das Moment des Kräftepaares ausgedrückt wird, so hat das neue Kräftepaar, da es in einer parallelen Ebene liegt, die folglich auch normal ist zu einer beliebigen Axe, welche normal zur Ebene des ersten Paares ist, dasselbe Bestreben auf Drehung um diese Axe, welches das erste Paar hat, sobald sein Moment dasselbe ist.

5) Kräftepaare, welche in derselben Ebene liegen, lassen sich durch ein einziges Kräftepaar ersetzen, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Momente der einzelnen Kräftepaare ist, wobei diejenigen Momente, welche die Ebene in entgegengesetzten Richtungen zu drehen streben, mit entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen sind.

Denn man kann jedes der Kräftepaare $P'a'$, $P''a''$, $P'''a'''$ .... in ein anderes verwandeln, dessen Richtungen in zwei bestimmte Parallellinien fallen. Ist a der kürzeste Abstand dieser beiden Parallellinien, so ist nach 139 die Kräftesumme in der einen Richtung:

$$+\left(\frac{P'a'}{a} + \frac{P''a''}{a} + \frac{P'''a'''}{a} \ldots\ldots\right) = P$$

und die Kräftesumme in der entgegengesetzten Richtung:

$$-\left(\frac{P'a'}{a} + \frac{P''a''}{a} + \frac{P'''a'''}{a}\right) = -P,$$

folglich hat man wiederum ein Kräftepaar, und es ist dessen Moment:

$$Pa = P'a' + P''a'' + P'''a''' + \ldots\ldots$$

6) Kräftepaare, welche in parallelen Ebenen liegen, lassen sich durch ein einziges Kräftepaar ersetzen, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Momente der einzelnen Kräftepaare ist, wobei diejenigen Momente, welche die Ebenen in entgegengesetzten Richtungen zu drehen streben, mit entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen sind.

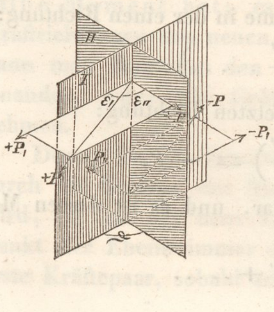
Denn, man kann jedes dieser Kräftepaare nach No. 4 in eine bestimmte Ebene verlegen, welche mit den Ebenen der Kräftepaare parallel ist, und dann nach No. 5 diese Kräftepaare vereinigen.

7) Kräfte, welche auf Drehung um irgend eine Axe wirken, lassen sich in Bezug auf drehende Bewegung durch ein Kräftepaar ersetzen, welches in einer zu der Axe normalen Ebene liegt, und dessen Moment gleich der Summe der Momente der einzelnen Kräfte in Bezug auf diese Axe ist.

Denn das Bestreben auf Drehung um eine gegebene Axe wird gemessen durch die Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte in Bezug auf diese Axe (S. 95); ein Kräftepaar, dessen Moment gleich der Summe der Momente der einzelnen Kräfte ist, hat dasselbe Bestreben auf Drehung zu wirken, (No. 1 und 2) würde also, wenn man es im entgegengesetzten Sinne wirken liefse, die Drehung durch die einzelnen Kräfte aufheben, und ersetzt demnach deren Wirkung auf drehende Bewegung.

Die Ebene, in welcher ein Kräftepaar liegt, nennen wir die Paar-Ebene; eine Normale zu dieser Ebene: eine Paar-Axe, und den kürzesten Abstand der Richtungslinien: den Hebelsarm des Kräftepaars, oder kurz der Paar-Arm.

8) Kräftepaare, welche in Ebenen liegen, die sich schneiden, lassen sich immer durch ein Kräftepaar ersetzen, dessen Moment sich bestimmen läfst, welches in einer Ebene liegt, die durch die Durchschnittslinie der beiden Paar-Ebenen geht, und deren Lage gegen die beiden Paar-Ebenen eine bestimmte ist.



Es sei ϑ der Neigungswinkel der beiden Paar-Ebenen, $a^I P^I$ sei das Moment des Kräftepaars in der ersten Ebene, $a^{II} P^{II}$ das Moment des Paares in der zweiten Ebene. Da die Kräftepaare jede Lage in der Ebene haben können, so lassen sich ihre Richtungen auch normal zur Durchschnittslinie denken, und wenn a der Abstand zweier Punkte der Durchschnittslinie ist, so lassen sich die Kräfte beider Paare durch diese Punkte der Durchschnittslinie legen. Nach Gleichung 139) sind sodann die Kräfte der beiden Paare:

$$P_{\prime} = \frac{a^I P^I}{a}; \quad P_{\prime\prime} = \frac{a^{II} P^{II}}{a}.$$

Nun greifen in dem einen Punkte der Durchschnittslinie die Kräfte $+P_{\prime}$ und $\pm P_{\prime\prime}$, im andern Punkte die Kräfte $-P_{\prime}$ und $\mp P_{\prime\prime}$ an. Da diese beiden Gruppen in ihren Angriffspunkten normal zur Durchschnittslinie sind, so liegen sie in parallelen Ebenen, die normal zur Durchschnittslinie sind; jede der beiden Gruppen läfst sich zusammensetzen nach dem Parallelogramm der Kräfte (§§ 28 und 30) und man hat in dem einen Angriffspunkt die Resultante:

$$P = \{P_{\prime}^2 + P_{\prime\prime}^2 + 2P_{\prime}P_{\prime\prime} . \cos\vartheta\},$$

in dem andern Angriffspunkt eine ebenso grofse, aber entgegengesetzt gerichtete Resultante. Anstatt der ursprünglichen Kräfte können wir diese beiden Kräfte wirkend denken; sie sind parallel, liegen in einer Ebene, welche durch die Durchschnittslinie der ersten beiden Paar-Ebenen geht, und ihr Moment ist $=Pa$, oder wenn wir für P den obigen Werth, und darin für $P_{\prime}$ und $P_{\prime\prime}$ die vorhin gefundenen Ausdrücke setzen:

$$140)\quad Pa = \sqrt{\{(a^I P^I)^2 + (a^{II}P^{II})^2 + 2(a^I P^I) . (a^{II}P^{II}) . \cos\vartheta\}}.$$

Der Neigungswinkel, welchen die neue Paar-Ebene gegen die erste oder die zweite Paar-Ebene macht, ist gleich dem Winkel, welchen die Kraftrichtungen P und $P_{\prime}$ resp. $P_{\prime\prime}$ einschliefsen. Es ist also, wenn diese Winkel mit $\varepsilon_{\prime}$ und $\varepsilon_{\prime\prime}$ bezeichnet werden:

$$140\text{a})\quad \begin{cases} \sin\varepsilon_{\prime} = \sin\vartheta . \dfrac{P_{\prime}}{P} = \sin\vartheta . \dfrac{a^I P^I}{aP} \\ \sin\varepsilon_{\prime\prime} = \sin\vartheta . \dfrac{P_{\prime\prime}}{P} = \sin\vartheta . \dfrac{a^{II} P^{II}}{aP}. \end{cases}$$

Man sieht hieraus folgendes Gesetz:

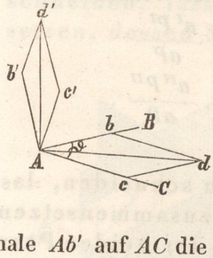
Kräftepaare in Ebenen, die sich schneiden, lassen sich stets zu einem Paare zusammensetzen, indem man den Neigungswinkel der beiden Paar-Ebenen konstruirt, auf den Schenkeln desselben in jeder Ebene Stücke abschneidet, welche dem Kräftepaar in dieser Ebene proportional sind, in der Ebene dieses Winkels über diesen Stücken ein

Parallelogramm konstruirt, und von dem Scheitel des Winkels die Diagonale zieht. Die Diagonale ist proportional dem resultirenden Kräftepaar; die Ebene durch die Diagonale und normal zur Ebene des Winkels ist die Paar-Ebene des resultirenden Kräftepaares, und die Winkel, welche die Diagonale mit den Schenkeln des Winkels bildet, sind gleich den Neigungswinkeln dieser Ebene gegen die betreffenden ersten Paar-Ebenen.

Dies interessante Gesetz bietet die gröſste Analogie mit dem Prinzip des Parallelogramms der Kräfte und der Geschwindigkeiten dar; wir nennen es das Prinzip des Parallelogramms der Kräftepaare.

9) Zwei Kräftepaare, deren Paar-Axen nicht parallel sind, lassen sich zu einem Kräftepaare vereinigen, indem man zwei Linien konstruirt, die sich schneiden, und den Paar-Axen einzeln parallel sind, von dem Durchschnittspunkt dieser Linien auf jeder ein Stück abträgt, welches dem Moment des Kräftepaars proportional ist, mit dessen Axe die betreffende Linie parallel ist, und aus diesen Stücken ein Parallelogramm konstruirt. Die Diagonale des Parallelogramms vom Durchschnittspunkt der Linien aus, repräsentirt, der Gröſse nach, das Moment des resultirenden Kräftepaars, und der Lage nach die Axe desselben. Die Paar-Ebene des resultirenden Kräftepaars ist normal zu dieser Axe.

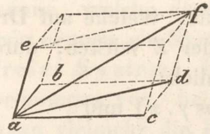
Denn es seien AB und AC die Schnitte der Paar-Ebenen der gegebenen Kräftepaare mit einer Ebene, die zu beiden normal ist, $ABC = \vartheta$ ist der Neigungswinkel beider Ebenen, nach dem vorigen Satz ist der Normalschnitt der resultirenden Paar-Ebene und das Moment des resultirenden Kräftepaars durch die Diagonale Ad zu bestimmen, wenn Ac dem Moment des Kräftepaars in der Ebene AC, Ab dem Moment des Kräftepaares in der Ebene AB proportional ist. Errichten wir in der Ebene ABC in A auf AB die Normale Ab' auf AC die Normale Ac', so sind diese Normalen auch normal auf den Ebenen AB und AC, und folglich parallel mit den Paar-Axen; machen wir $Ab' = Ab$, $Ac' = Ac$, vollenden das Parallelogramm und ziehen die Diagonale Ad', so ist sehr leicht geometrisch zu zeigen, daſs $Ad' = Ad$, und normal zu Ad sei. Da Ad'



$=Ad$ ist, so ist auch Ad' proportional dem resultirenden Kräftepaar, und da Ad' normal zu Ad ist, so ist Ad' auch normal zu der Ebene, in welcher das resultirende Paar liegt, folglich eine Paar-Axe des resultirenden Paars. Dies war nachzuweisen.

Wir nennen dies Gesetz das Parallelogramm der Paar-Axen.

10) Wirken auf ein festes System drei Kräftepaare, deren Paar-Axen nicht in eine Ebene gelegt werden können, so kann man dieselben zu einem Kräftepaar vereinigen, dessen Moment durch die Gröfse, und dessen Paar-Axe durch die Lage der Diagonale eines Parallelepipedums repräsentirt wird, dessen Seiten einzeln proportional den Momenten der gegebenen Kräftepaare, und parallel mit deren Paar-Axen sind. Die Ebene des resultirenden Kräftepaars steht normal auf der Diagonale des Parallelepipedums.



Denn es lassen sich nach dem vorigen Satze die Kräftepaare, deren Axen parallel mit ab und ac sind, zu einem Kräftepaar zusammensetzen, dessen Axe ad ist, und es läfst sich dieses Kräftepaar mit dem dritten, dessen Axe ac ist, wiederum zusammensetzen zu einem resultirenden Kräftepaare.

Die Axe desselben ist af, und es ist auch af proportional dem Moment desselben, wenn ae, ac und ab proportional sind dem Momente der einzelnen Kräftepaare. Nun ist aber af auch die Diagonale des Parallelepipedums $eabdcf$.

Wir nennen dies Gesetz das Parallelepipedum der Paar-Axen.

Die Kräftepaare lassen sich auch nach dem Gesetz No. 8 zusammensetzen, indem man zuerst die Kräftepaare in zwei Ebenen zu einem komponirt, und dieses dann mit dem Kräftepaar in der dritten Ebene zusammensetzt.

11) Jedes Kräftepaar läfst sich in zwei oder mehre andere zerlegen, von denen entweder die Lage der Paar-Axen oder die Gröfse der Momente der Kräftepaare gegeben sein kann.

Dies folgt unmittelbar aus den Gesetzen No. 8, 9 und 10.

12) Der Neigungswinkel der Paar-Axe gegen eine beliebige Ebene ist der Komplementswinkel des Neigungswinkels der Paar-Ebene gegen dieselbe Ebene, oder

auch des Neigungswinkels der Paar-Axe gegen eine auf dieser Ebene normale Axe.

Dies folgt unmittelbar aus der Bedingung, dafs die Paar-Axe normal zur Paar-Ebene ist.

Mit Hilfe dieser Gesetze lassen sich oft die Entwickelungen der §§ 75 und 76 wesentlich vereinfachen. Betrachten wir z. B. den Fall in § 76A. Wir zerlegen sämmtliche Kräfte in ihren Angriffspunkten nach drei Richtungen, parallel mit den drei Axen; es entstehen die Kräfte: $K.\cos\alpha \ldots$, $K.\cos\beta \ldots$, $K.\cos\gamma \ldots$, und es läfst sich die Resultirende der **fortschreitenden Bewegung** nach den Gesetzen auf S. 100 und nach den Gleichungen 127, 128, 128a) der Gröfse und Richtung nach, so wie ihr Angriffspunkt bestimmen. Nun wirken die Kräfte $K.\cos\beta$ und $K.\cos\gamma$ auf Drehung um die Axe der X; ihre Momente sind $K.\cos\beta.z \ldots$ und $K.\cos\gamma.y$. Diese Momente lassen sich durch ein **Kräftepaar** ersetzen (No. 7), dessen Moment ist:

$$141)\quad \Sigma(K.\cos\beta.z) + \Sigma(K.\cos\gamma.y).$$

In gleicher Weise lassen sich die Momente, welche auf Drehung um die Axe der Y nnd um diejenige der Z wirken, durch **Kräftepaare** ersetzen, deren Momente beziehlich:

$$141)\quad \begin{cases} \Sigma(K.\cos\alpha.z) + \Sigma(K.\cos\gamma.x) \text{ und} \\ \Sigma(K.\cos\alpha.y) + \Sigma(K.\cos\beta.x) \end{cases}$$

sind. Da die Axen dieser Kräftepaare normal zu einander sind, so ergiebt sich nach No. 10 das Moment des resultirenden Kräftepaars gleich:

$$141\text{a})\quad \sqrt{\left\{[\Sigma(K.\cos\beta.z) + \Sigma(K.\cos\gamma.y)]^2 + [\Sigma(K.\cos\alpha.z) + \Sigma(K.\cos\gamma.x)]^2 + [\Sigma(K.\cos\alpha.y) + \Sigma(K.\cos\beta.x)]^2\right\}},$$

oder:

$$\sqrt{\left\{[\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,})]^2 + [\Sigma(K.\sin\beta.R_{,,})]^2 + [\Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,})]^2\right\}},$$

und es findet sich der Neigungswinkel $\eta_{,}$ der **resultirenden Paar-Axe** gegen die Ebene YZ:

$$141\text{b})\quad \tan\eta_{,} = \frac{\Sigma(K.\cos\beta.z) + \Sigma(K.\cos\gamma.y)}{\sqrt{\left\{[\Sigma(K.\cos\alpha.z) + \Sigma(K.\cos\gamma.x)]^2 + [\Sigma(K.\cos\alpha.y) + \Sigma(K.\cos\beta.x)]^2\right\}}}$$

oder nach 135a) gleich:

$$\tan\eta_{,} = \frac{\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,})}{\sqrt{\left\{[\Sigma(K.\sin\beta.R_{,,})]^2 + [\Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,})]^2\right\}}}.$$

und der Neigungswinkel $\varphi_{,}$ der **resultirenden Paar-Ebene** gegen die Ebene *YZ*, oder der Neigungswinkel der resultirenden Paar-Axe gegen die Axe der *X* nach No. 12:

$$141\,c)\quad \operatorname{tang} \varphi_{,} = \operatorname{cotg} \eta_{,} = \frac{1}{\operatorname{tang} \eta_{,}}$$

u. s. w.

Die Gleichungen, welche entstehen, indem man anstatt der Koordinaten die Hebelsarme der Kräfte (nach Gleichung 135a) S. 128) einführt, sind dieselben, welche wir unter 138 und 138a) S. 131 auf anderem Wege entwickelt haben, uud es gelten für Kräftepaare, deren Paar-Axen normal zu einander sind und die nicht in derselben Ebene liegen, die auf S. 131 bei Gelegenheit der Entwickelung dieser Gleichungen aufgestellten Regeln.

Festes System mit fixen (festgehaltenen) Punkten.

§ 79. Die bisherigen Untersuchungen über die Gesetze, welche für Kräfte gelten, die auf ein festes System wirken, setzten überall voraus, dafs jeder Punkt des Systems diejenige Bewegung machen könne, welche durch die Einwirkung jener Kräfte bedingt wurde; wir nennen ein System, für welches diese Voraussetzung zutrifft ein freies System. Es kommen jedoch sehr häufig auch solche Anordnungen vor, bei denen jene Voraussetzungen nicht gelten; es kann vielmehr die Bedingung gestellt sein, dafs gewisse Punkte des festen Systems sich nicht bewegen dürfen, wie auch die Kräfte des Systems beschaffen sein mögen; solche Punkte nennen wir fixe Punkte, oder festgehaltene Punkte des Systems, und das System selbst im Gegensatz zu dem freien System, nennen wir ein festes System mit fixen Punkten. Die Fälle, welche hier von besonderem Interesse sind, sind folgende:

a) ein festes System mit einem fixen Punkte,
b) ein festes System mit zwei fixen Punkten,
c) ein festes System mit drei fixen Punkten.

Nach den vorstehenden Andeutungen haben wir unter einem fixen Punkt eines Systems überhaupt einen solchen zu verstehen, welcher weder eine fortschreitende Bewegung noch eine rotirende Bewegung um irgend eine Axe annehmen kann. Hieraus folgt zunächst:

1) dafs das System überhaupt keine fortschreitende Bewegung haben könne, denn eine solche würde allen Punkten des Systems gemeinschaftlich (§ 65. S. 88), folglich auch den fixen Punkten eigen sein, und dies widerspricht der Voraussetzung, und