138b) Das Moment des Kräftepaars

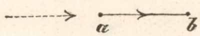
$$\sqrt{\left\{[\Sigma(K.\sin\alpha.R_{\prime})]^2 + [\Sigma(K.\sin\beta.R_{\prime\prime})]^2 + [\Sigma(K.\sin\gamma.R_{\prime\prime\prime})]^2\right\}},$$

d. h. das Moment des resultirenden Kräftepaars ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Momentensummen der einzelnen Kräfte in Bezug auf die drei Axen.

Vorschlag zur Annahme eines allgemein giltigen Modus die Winkel zu zählen, welche Kraftrichtungen mit rechtwinkligen Koordinaten-Axen bilden.

§ 77. Bei den vorhergehenden statischen Untersuchungen hat man mit Kräften zu thun, deren Richtungslinien nicht in ein und derselben Ebene liegen; man bestimmt sodann die Lage dieser Richtungslinien durch die Winkel, welche sie mit drei angenommenen Koordinaten-Axen machen; es ist sehr wichtig die Vorzeichen der Winkelfunktionen richtig in die Rechnung einzuführen, und um in dieser Beziehung keinen Irrthum zu begehen, mufs man die Winkel, welche die Richtungslinien mit den einzelnen Axen machen, von jeder Axe aus stets in demselben Sinne rechnen (vergl. § 59). Es erscheint wünschenswerth, dafs man sich allgemein über einen Modus einige, nach welchem bei dergleichen Untersuchungen die Kraftrichtungen zu bestimmen sind, und zu dem Zwecke scheint folgendes Verfahren empfehlenswerth:

1) Man sehe sämmtliche Kräfte so an, als ob sie in ihrem Angriffspunkt ziehend wirken, und nehme ihre Werthe dann absolut.

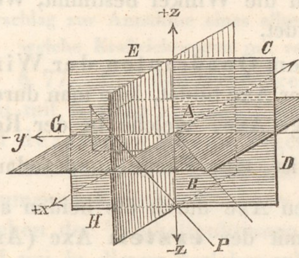


Um dies zu verstehen, diene folgende Erläuterung: Strebt eine Kraft ein Massenelement von a nach b zu bewegen, so können wir entweder die Kraft in einem Punkte wirkend denken, der auf derselben Seite von a liegt, auf welcher auch b liegt, und so als ob sie das Massenelement anziehe, oder wir können die Kraft auch in einem Punkte wirksam denken, der auf der entgegengesetzten Seite von a liegt, und so, als ob die Kraft das Bestreben habe, das Massenelement abzustofsen (§ 55. S. 67). Im ersten Falle bezeichnen wir die Wirkung, indem wir sagen, die Kraft wirke ziehend, im andern Fall, indem wir sagen, die Kraft wirke schiebend auf das Massenelement. Es ist gleichgiltig, ob wir sämmtliche Kräfte in ihren Angriffspunkten ziehend, oder ob wir sämmtliche Kräfte schiebend wirkend denken. Um eine Uebereinstimmung herbeizuführen, mögen stets sämmtliche Kräfte ziehend angenommen werden, und wenn sie schiebend gedacht werden sollen, möge man es ausdrücklich bemerken.

2) Die Winkel, welche eine Kraftrichtung mit den drei Axen macht, werden gefunden, wenn man von dem Anfangspunkt der Koordinaten eine Linie zieht, parallel mit der Richtung der Kraft, und in demselben Sinne, in welchem die Kraft auf ihren Angriffspunkt ziehend wirkt, und nun die Winkel bestimmt, welche diese Linie mit den drei Axen bildet.

3) Um zu beurtheilen, in welchem Quadranten der Winkel liegt, den diese Richtung mit einer Axe bildet, lege man durch die betrachtete Axe und durch diejenige Axe, welche in der Reihenfolge $\overset{1}{X}, \overset{2}{Y}, \overset{3}{Z}$ ihr die entfernteste ist, eine Ebene, und sodann eine Ebene normal zu der betrachteten Axe durch die beiden anderen Axen. Um also den Winkel mit der **ersten** Axe (Axe der X) zu bestimmen, lege man eine Ebene durch die erste und dritte Axe (Axe der X und der Z) und eine Ebene durch die zweite und dritte Axe (Axe der Y und der Z). Um den Winkel mit der **zweiten** Axe (Axe der Y) zu beurtheilen, lege man eine Ebene durch die zweite und erste Axe (Axe der Y und der X) und eine Ebene durch die erste und dritte Axe (Axe der X und der Z) und endlich um den Winkel zu bestimmen, welchen eine Kraftrichtung mit der **dritten** Axe macht, lege man eine Ebene durch die dritte und erste Axe und eine Ebene durch die erste und zweite Axe. Die beiden Ebenen, welche man für jede einzelne Axe gedacht hat, theilen den Raum in vier Abtheilungen. Die erste Abtheilung liegt zwischen dem Theile der durch die betrachtete Axe gelegten Ebene, welcher den positiven Zweig dieser Axe enthält, und demjenigen Theil der durch die beiden andern Axen gelegten Ebene, welcher den positiven Zweig der in der obenerwähnten Reihenfolge zunächst liegenden Axe enthält. Alle Linien, welche vom Anfangspunkt der Koordinaten gezogen in diese Abtheilung fallen, bilden mit der betrachteten Axe Winkel, die im ersten Quadranten liegen. Die zweite Abtheilung liegt zwischen diesem zuletzt erwähnten Theil der durch die beiden andern Axen gelegten Ebene, und demjenigen Theil der durch die betrachtete Axe gelegten Ebene, welche den negativen Zweig dieser Axe enthält. Alle Linien, die in diese Abtheilung fallen, bilden Winkel mit der betrachteten Axe, die im zweiten Quadranten liegen. Die dritte Abtheilung des Raumes liegt zwischen den so eben be-

zeichneten Theil der durch die betrachtete Axe gelegten Ebene, und demjenigen Theil der durch die beiden andern Axen gelegten Ebene, welcher den negativen Zweig der in der obigen Reihenfolge zunächst liegenden Axe enthält. Diese Abtheilung stellt den dritten Quadranten, und die noch übrige Abtheilung den vierten Quadranten dar.



Denkt man die drei Koordinatenebenen, so wird durch dieselben der Raum in acht Abtheilnngen getheilt, die wir mit A, B, C, D, E, F, G, H bezeichnen. Die Punkte, welche in diesen Abtheilungen liegen, haben folgende Koordinaten-Vorzeichen, nach welchen sich die Bezeichnung der Abtheilungen bestimmen soll.

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
$+x$	$+x$	$-x$	$-x$	$-x$	$-x$	$+x$	$+x$
$+y$	$+y$	$+y$	$+y$	$-y$	$-y$	$-y$	$-y$
$+z$	$-z$	$+z$	$-z$	$+z$	$-z$	$+z$	$-z$.

(Die Abtheilung *F* ist in der Figur nicht sichtbar).

Bezeichnen wir die Winkel mit der ersten Axe durch α, mit der zweiten Axe durch β und mit der dritten Axe durch γ, und nehmen wir den oben dargestellten Modus der Winkelzählung an, so ergiebt sich folgende Zusammenstellung:

Eine Linie, durch den Angriffspunkt der Koordinaten parallel mit einer Kraftrichtung gezogen, liegt in der Abtheilung	Die Winkel liegen in den Quadranten			Vorzeichen der Kosinus			Vorzeichen der Sinus			Vorzeichen der Kotangente			Vorzeichen der Tangente		
	α	β	γ	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	$\sin\alpha$	$\sin\beta$	$\sin\gamma$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\beta$	$\mathrm{ctg}\,\gamma$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\beta$	$\mathrm{tg}\,\gamma$
A	I	I	I	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
B	I	IV	II	+	+	−	+	−	+	+	−	−	+	−	−
C	II	I	IV	−	+	+	+	+	−	−	+	−	−	+	−
D	II	IV	III	−	+	−	+	−	−	−	−	+	−	−	+
E	III	II	IV	−	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	−
F	III	III	III	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+
G	IV	II	I	+	−	+	−	+	+	−	−	+	−	−	+
H	IV	III	II	+	−	−	−	−	+	−	+	−	−	+	−

Aus dieser Zusammenstellung ist ersichtlich, dafs die Vorzeichen der Kosinus von Winkeln, welche Linien bilden, die durch den Anfangspunkt der Koordinaten gehen und in irgend einer Abtheilung liegen, dieselben sind, welche auch die Koordinaten von Punkten haben, die in derselben Abtheilung liegen. Diese Vorzeichen sind jedoch nicht zu verwechseln mit den Vorzeichen, welche etwa die Koordinaten des Angriffspunkts der Kraft haben.

Es wirke z. B. in einem Punkte, dessen Koordinaten $+x$, $-y$, $+z$ sind, eine Kraft, welche mit der ersten und zweiten Axe einen Winkel mit positivem, mit der dritten Axe einen Winkel mit negativem Kosinus mache, so liegt der Winkel α im ersten, der Winkel β im vierten und der Winkel γ im zweiten Quadranten. Die Kraftrichtung ist in der Figur angedeutet. Die entgegengesetzte Kraftrichtung macht mit den drei Axen Winkel, deren Kosinus eben so grofs, aber entgegengesetzt sind, sie bildet also mit der ersten und zweiten Axe Winkel mit negativem und mit der dritten Axe einen Winkel mit positivem Kosinus, liegt also in der Abtheilung E.

Aus den obigen Darstellungen ist nun leicht ersichtlich, welche Bedeutung es haben müsse, wenn die Kräfte selbst mit positivem oder negativem Vorzeichen ($+P$ und $-P$) erscheinen, oder in die Rechnung eingeführt werden. Es kann dies nämlich in zwiefachem Sinne geschehen, entweder deuten die Vorzeichen $+P$ und $-P$ überhaupt nur an, dafs zwei Kräfte in parallelen Richtungen, aber entgegengesetzt wirkend, gedacht werden sollen, und es ist dann gleichgiltig, welche von beiden man als positiv, und welche man als negativ betrachten will, oder sie deuten an, dafs die betrachtete Kraft, welche mit negativem Vorzeichen erscheint, in ihrem Angriffspunkt in einem Sinne wirkt, welcher demjenigen der übrigen Kräfte entgegengesetzt ist; dafs sie also, wenn wir allgemein die Kräfte ziehend wirkend denken, in ihrem Angriffspunkte schiebend wirke; sie wird sofort in eine Kraft verwandelt werden können, welche ziehend wirkt, und dann absolut zu nehmen sein.

Gesetze über die Wirkung, Zusammensetzung und Zerlegung der Kräftepaare. Parallelogramm und Parallelepipedum der Kräftepaare und der Paar-Axen.

§ 78. Aus den Betrachtungen der §§ 74, 75 und 76 ergiebt sich, dafs, wenn auf ein festes System Kräfte wirken, welche in Bezug auf drehende Bewegung nicht im Gleichgewicht