Bezeichnen wir den Abstand der beiden Kraftrichtungen mit a, die Koordinaten des Angriffspunktes der einen von beiden Gegenkräften $(+P)$ mit X, Y, Z, so sind, wie sich leicht übersehen läſst, die Koordinaten des Angriffspunkts der andern Gegenkraft $(-P)$:

$$123\text{c})\quad Z' = Z + a \,.\, \sin\varphi;\quad Y' = Y + a \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\psi;$$
$$X' = X + a \,.\, \cos\varphi \,.\, \sin\psi.$$

Für den Fall, daſs sämmtliche Kraftrichtungen parallel sind, folgt aus 123), 123a) und 123b):

$$124)\ \begin{cases} \tan\psi = \tan\alpha \\ \tan\varphi = \dfrac{\Sigma(Kz)}{\Sigma(K.R_{\prime\prime\prime})}, \end{cases}$$

und das Moment des Kräftepaars:

$$124\text{a})\quad \sqrt{\left\{[\Sigma(Kz)]^2 + [\Sigma(KR_{\prime\prime\prime})]^2\right\}},$$

in welchen Gleichungen z die Abstände der Angriffspunkte der einzelnen parallelen Kräfte von einer beliebigen mit ihrer Richtung parallelen Ebene und $R_{\prime\prime\prime}$ die Hebelsarme in Bezug auf eine beliebige, und zu dieser Ebene normale, Axe bezeichnen.

In dem Falle endlich, wo sämmtliche Kräfte in ein und derselben Ebene liegen, folgt:

$$125)\ \begin{cases} \tan\psi = \dfrac{z \,.\, \Sigma(K \,.\, \sin\alpha)}{z \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha)} = \dfrac{0}{0} \\ \tan\varphi = 0, \end{cases}$$

und das Moment des Kräftepaares:

$$125\text{a}) = \Sigma(K \,.\, R_{\prime\prime\prime}),$$

d. h. in diesem Fall bleibt die Neigung des Kräftepaares (Winkel ψ) gegen die Axe XZ unbestimmt und kann beliebig genommen werden, das Kräftepaar, welches für die Wirkung der Kräfte substituirt werden kann, liegt in derselben Ebene, in welcher die Kräfte liegen, $(\varphi = 0)$ und es ist das Moment des Kräftepaares gleich der Summe der Momente sämmtlicher auf Drehung wirkenden Kräfte in Bezug auf eine beliebige zur Ebene der Kräfte normale Axe.

Bestimmung der Resultirenden und ihres Angriffspunktes für Kräfte, welche auf ein festes System wirken, und deren Richtungslinien eine beliebige Lage haben.

§ 76. Wir wenden uns nun zu dem allgemeinsten Fall, nämlich zu dem, daſs auf ein festes System beliebige Kräfte in ganz beliebigen Richtungen wirken, und daſs es darauf ankommt, ihre Resultirende der Gröſse und Richtung nach zu bestimmen.

Wenn zunächst:

A. die Kräfte weder in Bezug auf drehende noch in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind:

so können wir, indem wir drei beliebige Koordinatenebenen annehmen, die Resultirende der fortschreitenden Bewegung Q der Gröfse und Richtung nach bestimmen nach § 71 und mittelst der Gleichungen 110) und 111).

Um nun aber den Angriffspunkt der Resultirenden zu finden, denken wir uns sämmtliche Kräfte in den einzelnen Angriffspunkten nach drei zu einander normalen Richtungen zerlegt, die Komponenten parallel mit den drei Axen sind dann:

$$K . \cos\alpha \ldots, \quad K . \cos\beta \ldots, \quad K . \cos\gamma \ldots,$$

Nun haben wir drei Gruppen paralleler Kräfte, für die wir nach § 74 und Gleichung 117a) drei Resultirende einführen können. Es seien $Q_{\prime}$ die Resultirende aller parallelen Kräfte $K . \cos\alpha \ldots$ und X, Y, Z die Koordinaten ihres Angriffspunktes; in ähnlicher Weise bezeichnen $Q_{\prime\prime}$ und $Q_{\prime\prime\prime}$ die Resultirenden der parallelen Kräfte $K . \cos\beta \ldots$ und $K . \cos\gamma \ldots$ und $X_{\prime\prime}$, $Y_{\prime\prime}$, $Z_{\prime\prime}$ beziehlich $X_{\prime\prime\prime}$, $Y_{\prime\prime\prime}$, $Z_{\prime\prime\prime}$ die Koordinaten ihrer Angriffspunkte. Wir haben dann:

$$126)\ \left\{\begin{aligned}
&Q_{\prime} = \Sigma(K.\cos\alpha), \quad Q_{\prime\prime} = \Sigma(K.\cos\beta), \quad Q_{\prime\prime\prime} = \Sigma(K.\cos\gamma)\\
&X_{\prime} = \frac{\Sigma(K.\cos\alpha.x)}{\Sigma(K.\cos\alpha)}, \quad X_{\prime\prime} = \frac{\Sigma(K.\cos\beta.x)}{\Sigma(K.\cos\beta)}, \quad X_{\prime\prime\prime} = \frac{\Sigma(K.\cos\gamma.x)}{\Sigma(K.\cos\gamma)}\\
&Y_{\prime} = \frac{\Sigma(K.\cos\alpha.y)}{\Sigma(K.\cos\alpha)}, \quad Y_{\prime\prime} = \frac{\Sigma(K.\cos\beta.y)}{\Sigma(K.\cos\beta)}, \quad Y_{\prime\prime\prime} = \frac{\Sigma(K.\cos\gamma.y)}{\Sigma(K.\cos\gamma)}\\
&Z_{\prime} = \frac{\Sigma(K.\cos\alpha.z)}{\Sigma(K.\cos\alpha)}, \quad Z_{\prime\prime} = \frac{\Sigma(K.\cos\beta.z)}{\Sigma(K.\cos\beta)}, \quad Z_{\prime\prime\prime} = \frac{\Sigma(K.\cos\gamma.z)}{\Sigma(K.\cos\gamma)}.
\end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen zeigen folgendes Gesetz:

I. Wenn auf ein festes System beliebig viele Kräfte einwirken, welche weder in Bezug auf fortschreitende noch in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind, so läfst sich ihre Wirkung immer auf drei einzelne Kräfte zurückführen, deren Richtungen einzeln parallel sind mit drei beliebig angenommenen zu einander normalen Axen, und deren Angriffspunkte vollständig durch die Gleichung 126) bestimmt sind.

Da nun die Richtung der Resultirenden der fortschreitenden Bewegung Q durch die Gleichungen 110) und 111) vollkommen bestimmt ist, so können wir jede dieser drei Kräfte, auf welche wir so eben das System zurückgeführt haben, zerlegen nach zwei Richtungen, von welchen eine parallel mit der Richtung von Q, die andere aber normal dazu ist, wir erhalten dann zwei Gruppen von Kräften, nämlich eine Gruppe, bestehend aus drei Kräften, die unter sich und mit der Richtung von Q parallel sind, und eine andere Gruppe von drei Kräften, welche in Ebenen liegen, die normal zu der Richtung von Q sind, welche folglich in parallelen Ebenen liegen. Da die Resultirende mit den Axen die Winkel A, B, Γ bildet, so bildet sie dieselben Winkel der Reihe nach auch mit den drei Kräften $Q_{,}, Q_{,,}, Q_{,,,}$, welche der Reihe nach mit diesen Axen parallel sind. Hiernach haben wir die beiden Gruppen:

parallel mit Q:	normal zu Q:
$Q_{,} \,.\cos A = Q \,.\cos A^2$,	$Q_{,} \,.\sin A = Q \,.\cos A \,.\sin A$,
$Q_{,,} \,.\cos B = Q \,.\cos B^2$,	$Q_{,,} \,.\sin B = Q \,.\cos B \,.\sin B$,
$Q_{,,,} \,.\cos \Gamma = Q \,.\cos \Gamma^2$,	$Q_{,,,} \,.\sin \Gamma = Q \,.\cos \Gamma \,.\sin \Gamma$.

Die Kräfte der ersten Gruppe lassen sich durch die Gleichungen 110) und 111) vereinigen. Es ist ihre Resultante (Gleichung 110), 111) und 112):

$$Q_{,} \,.\cos A + Q_{,,} \,.\cos B + Q_{,,,} \,.\cos \Gamma =$$
$$\frac{[\Sigma(K \,.\cos\alpha)]^2}{Q} + \frac{[\Sigma(K \,.\cos\beta)]^2}{Q} + \frac{[\Sigma(K \,.\cos\gamma)]^2}{Q} =$$

$$127) \quad Q = \sqrt{\left\{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K.\cos\beta)]^2 + [\Sigma(K.\cos\gamma)]^2\right\}}.$$

Der Angriffspunkt dieser Resultante ergiebt sich nach 117a), wenn wir die Koordinaten mit X, Y, Z bezeichnen:

$$128) \left\{\begin{aligned} X &= \frac{Q_{,} \,.\cos A \,.X_{,} + Q_{,,} \,.\cos B \,.X_{,,} + Q_{,,,} \,.\cos \Gamma \,.X_{,,,}}{Q_{,} \,.\cos A + Q_{,,} \,.\cos B + Q_{,,,} \,.\cos \Gamma} \\ Y &= \frac{Q_{,} \,.\cos A \,.Y_{,} + Q_{,,} \,.\cos B \,.Y_{,,} + Q_{,,,} \,.\cos \Gamma \,.Y_{,,,}}{Q_{,} \,.\cos A + Q_{,,} \,.\cos B + Q_{,,,} \,.\cos \Gamma} \\ Z &= \frac{Q_{,} \,.\cos A \,.Z_{,} + Q_{,,} \cos B \,.Z_{,,} + Q_{,,,} \,.\cos \Gamma \,.Z_{,,,}}{Q_{,} \,.\cos A + Q_{,,} \,.\cos B + Q_{,,,} \,.\cos \Gamma} \end{aligned}\right.$$

Setzen wir in diese Gleichungen die Werthe der Gleichungen 126) für $Q_{,}, Q_{,,}, Q_{,,,}$; $X_{,}, X_{,,}, X_{,,,}$ etc., so ergiebt sich mit Berücksichtigung, dafs nach Gleichung 111)

$$\cos A = \frac{\Sigma(K \,.\cos\alpha)}{Q}, \quad \cos B = \frac{\Sigma(K.\cos\beta)}{Q}, \quad \cos \Gamma = \frac{\Sigma(K \,.\cos\gamma)}{Q}$$

ist:

128a)

$$X = \frac{\Sigma(K.\cos\alpha.x).\Sigma(K.\cos\alpha)+\Sigma(K.\cos\beta.x).\Sigma(K.\cos\beta)+\Sigma(K.\cos\gamma.x).\Sigma(K.\cos\gamma)}{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2+[\Sigma(K.\cos\beta)]^2+[\Sigma(K.\cos\gamma)]^2}$$

$$Y = \frac{\Sigma(K.\cos\alpha.y).\Sigma(K.\cos\alpha)+\Sigma(K.\cos\beta.y).\Sigma(K.\cos\beta)+\Sigma(K.\cos\gamma.y).\Sigma(K.\cos\gamma)}{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2+[\Sigma(K.\cos\beta)]^2+[\Sigma(K.\cos\gamma)]^2}$$

$$Z = \frac{\Sigma(K.\cos\alpha.z).\Sigma(K.\cos\alpha)+\Sigma(K.\cos\beta.z).\Sigma(K.\cos\beta)+\Sigma(K.\cos\gamma.z).\Sigma(K.\cos\gamma)}{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2+[\Sigma(K.\cos\beta)]^2+[\Sigma(K.\cos\gamma)]^2}$$

Es ist übrigens leicht zu übersehen, dafs der hier bestimmte Angriffspunkt der Resultirenden dieser drei parallelen Kräfte in der Ebene liegen mufs, welche durch die Angriffspunkte der drei Kräfte gelegt werden kann, denn läge er aufserhalb dieser Ebene und zerlegte man die sämmtlichen Kräfte in zwei andere, parallel und normal zu der Ebene, so würde diejenige Komponente der Mittelkraft, welche parallel mit der Ebene ist, und deren Angriffspunkt aufserhalb der Ebene läge, einen Hebelsarm in Bezug auf eine in der Ebene liegende, und die Richtungen der Komponenten der drei Kräfte, deren Angriffspunkte in der Ebene liegen, schneidende Axe haben, während diese Komponenten einen Hebelsarm in Bezug auf diese Axe nicht hätten; es würde also durch die Mittelkraft Gleichgewicht gegen drehende Bewegung nicht hergestellt werden.

Betrachten wir jetzt die zweite Gruppe der Komponenten, deren Richtungen in Ebenen liegen, welche zur Richtung der Resultirenden der fortschreitenden Bewegung normal sind, so können diese Kräfte keine fortschreitende Bewegung bedingen, wohl aber ist eine drehende Bewegung denkbar. Wir haben es also mit Kräften zu thun, die dem im vorigen Paragraphen unter C. behandelten Fall entsprechen, und für welche ein Kräftepaar substituirt werden kann. Um die Verhältnisse dieses Kräftepaares zu bestimmen, denken wir uns irgend eine Ebene, welche normal zu der Richtung von Q ist, nennen den normalen Abstand des Angriffspunktes $Q_{\prime}$ von dieser Ebene $Z_{\prime}^{0}$, den normalen Abstand der Angriffspunkte $Q_{\prime\prime}$ und $Q_{\prime\prime\prime}$ von derselben Ebene $Z_{\prime\prime}^{0}$, $Z_{\prime\prime\prime}^{0}$, denken ferner in der Ebene eine beliebige Axe, und bezeichnen die Winkel, welchen die Richtungslinien von $Q_{\prime}.\sin A$ mit dieser Axe bildet mit $\alpha_{\prime}^{0}$, ebenso die Winkel, welche die Richtungslinien der Kräfte $Q_{\prime\prime}.\sin B$ und $Q_{\prime\prime\prime}.\sin\Gamma$ mit derselben Axe bilden mit $\alpha_{\prime\prime}^{0}$, $\alpha_{\prime\prime\prime}^{0}$, so ergiebt sich der Neigungswinkel der Durchschnittslinie der Ebene des Kräftepaars mit jener Axe ψ nach 123:

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{Z_{,}{}^{0} Q_{,} . \sin A . \sin \alpha_{,}{}^{0} + Z_{,,}{}^{0} Q_{,,} . \sin B . \sin \alpha_{,,}{}^{0} + Z_{,,,}{}^{0} Q_{,,,} . \sin \Gamma . \sin \alpha_{,,,}{}^{0}}{Z_{,}{}^{0} Q_{,} . \sin A . \cos \alpha_{,}{}^{0} + Z_{,,}{}^{0} Q_{,,} . \sin B . \cos \alpha_{,,}{}^{0} + Z_{,,,}{}^{0} Q_{,,,} . \sin \Gamma . \cos \alpha_{,,,}{}^{0}}$$

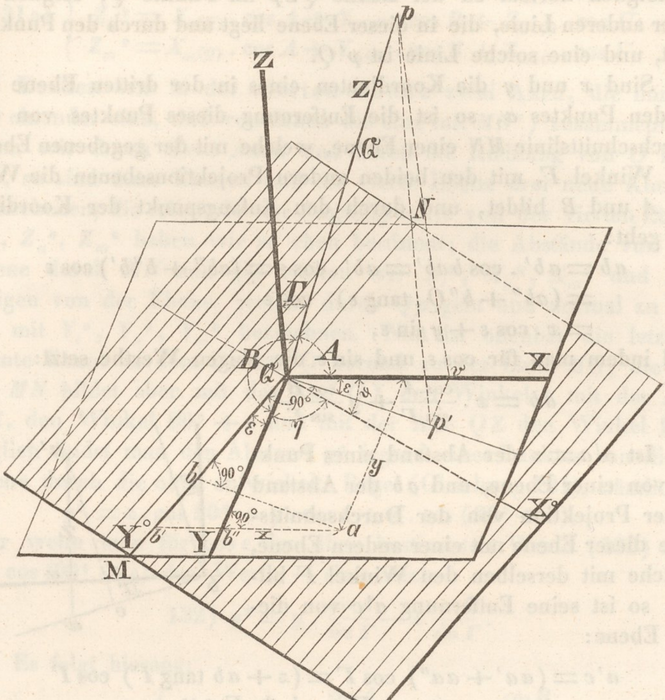
und in ähnlicher Weise läſst sich der Neigungswinkel φ der Ebene des Kräftepaares gegen die Richtung von Q nach 123 a), sowie das Moment des Kräftepaares nach 123 b) finden. Wollte man die in diesen Gleichungen vorkommenden Werthe analytisch ausdrücken, so kompliciren sich die Ausdrücke so sehr, daſs sie ihren Werth als Formeln für den Gebrauch verlieren, und es besser ist in jedem einzelnen Falle die Rechnung besonders durchzuführen. Um diese Rechnung zu erleichtern, dürfte folgender Weg zu empfehlen sein.

Wir verlegen den Anfangspunkt des ursprünglichen Koordinatensystems in den Angriffspunkt von Q. Es sind sodann die Koordinaten der drei Angriffspunkte $Q_{,}$, $Q_{,,}$, $Q_{,,,}$ durch die Gleichungen zu finden:

$$129)\quad \begin{cases} X_{,(Q)} = X_{,} - X, & Y_{,(Q)} = Y_{,} - Y, & Z_{,(Q)} = Z_{,} - Z, \\ X_{,,(Q)} = X_{,,} - X, & Y_{,,(Q)} = Y_{,,} - Y, & Z_{,,(Q)} = Z_{,,} - Z, \\ X_{,,,(Q)} = X_{,,,} - X, & Y_{,,,(Q)} = Y_{,,,} - Y, & Z_{,,,(Q)} = Z_{,,,} - Z. \end{cases}$$

Legen wir nun durch den Angriffspunkt von Q, also durch den Anfangspunkt des neuen Koordinatensystems eine Ebene normal zur Richtung von Q (vierte Ebene), so bildet diese Ebene mit den Ebenen, in welcheu die Axen X und Y liegen (dritte Ebene), den Winkel Γ mit der Ebene, in welcher die Axen X und Z (zweite Ebene) liegen, den Winkel B, und mit der Ebene, in welcher die Axen Y und Z (erste Ebene) liegen, den Winkel A; denn der Winkel, welchen zwei Ebenen bilden, wird gemessen durch den Winkel, welchen zwei Linien einschlieſsen, die in einem Punkte der Durchschnittslinie einzeln normal auf den Ebenen sind. Der Angriffspunkt von Q ist aber ein Punkt der Durchschnittslinien der vier Ebenen, die Richtung Q ist normal auf der vierten Ebene, die Axe der Z ist normal auf der Ebene, in welcher die Axen der X und der Y liegen, folglich macht diese Ebene mit der vierten Ebene den Winkel, welcher die Richtung von Q mit der Axe der Z bildet, d. i. den Winkel Γ etc.

Projiciren wir die Richtung von Q auf die Ebene, in welcher die Axen der X und der Y liegen, und bezeichnen wir den Winkel, welcher die Projektion Qp' mit der Axe X bildet, mit ε, ziehen von $p_{,}$ die Normale $p'v$ auf die Axe X und verbinden pv, so ist auch pv normal zu QX, und daher:



130) $\cos\varepsilon = \dfrac{Qv}{Qp'} = \dfrac{Qp\,.\cos A}{Qp\,.\sin(Qpp')} = \dfrac{\cos A}{\sin(pQZ)} = \dfrac{\cos A}{\sin\Gamma}$.

Ebenso findet man:

$$\cos(p'QY) = \frac{\cos B}{\sin\Gamma} = \sin\varepsilon,$$

d. h. der **Kosinus** des Winkels, welchen die **Projektion einer Linie** auf eine Ebene mit einer in dieser Ebene liegenden Axe macht, ist gleich dem Quotienten aus dem Kosinus des Winkels, welchen die Linie selbst mit derselben Axe macht, durch den Sinus des Winkels, welchen die Linie mit einer zu der Ebene normalen Axe macht; ähnlich läſst sich eine Regel für den **Sinus** ableiten.

Die **Durchschnittslinie** MN, zwischen der vierten Ebene und der dritten Ebene, ist normal zu der Projektion Qp', denn, da sie in der vierten Ebene liegt, so ist sie normal auf pQ, und da sie auch in der dritten Ebene liegt, so ist sie normal zu QZ, sie ist folglich normal zu der Ebene QZp im Punkte Q, folglich zu jeder anderen Linie, die in dieser Ebene liegt und durch den Punkt Q geht, und eine solche Linie ist $p'Q$.

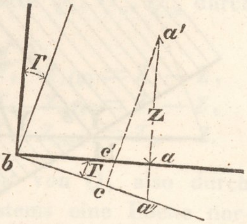
Sind x und y die Koordinaten eines in der dritten Ebene liegenden Punktes a, so ist die Entfernung dieses Punktes von der Durchschnittslinie MN einer Ebene, welche mit der gegebenen Ebene den Winkel Γ, mit den beiden andern Projektionsebenen die Winkel A und B bildet, und durch den Anfangspunkt der Koordinaten geht:

$$\begin{aligned} ab &= ab' \,.\, \cos bab' = ab' \,.\, \cos \varepsilon = (ab'' + b''b') \cos \varepsilon \\ &= (ab'' + b''Q \,.\, \operatorname{tang} \varepsilon) \,.\, \cos \varepsilon \\ &= x \,.\, \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon, \end{aligned}$$

und indem man für $\cos \varepsilon$ und $\sin \varepsilon$ die obigen Werthe setzt:

$$ab = x \,.\, \frac{\cos A}{\sin \Gamma} + y \frac{\cos B}{\sin \Gamma}.$$

Ist $a'a = z$ der Abstand eines Punktes von einer Ebene, und ab der Abstand seiner Projektion von der Durchschnittslinie dieser Ebene mit einer andern Ebene, welche mit derselben den Winkel Γ bildet, so ist seine Entfernung $a'c$ von dieser Ebene:



$$\begin{aligned} a'c &= (aa' + aa'') \cos \Gamma = (z + ab \operatorname{tang} \Gamma) \cos \Gamma \\ &= z \,.\, \cos \Gamma + ab \sin \Gamma. \end{aligned}$$

Setzen wir für ab den vorhin bestimmten Werth, und bezeichnen wir den Abstand $a'c$ mit z^0, so ist:

$$131)\quad z^0 = z \,.\, \cos \Gamma + x \cos A + y \cos B,$$

d. h. der Abstand eines Punktes, dessen Koordinaten x, y und z sind von einer Ebene, die im Anfangspunkt des Koordinatensystems normal steht auf einer durch den Anfangspunkt des Koordinaten gehenden, und mit den drei Koordinatenaxen die Winkel A, B, Γ bildenden Linie, ist gleich der Summe der Produkte, welche gebildet werden, wenn man jede der drei Koordinaten einzeln mit dem Kosinus des Winkels multiplizirt, welcher die Richtung jener Linie mit derjenigen Axe bildet, mit welcher die betreffende Koordinate parallel ist.

Hiernach hat man die Abstände der Angriffspunkte der Kräfte $Q_{\prime}$, $Q_{\prime\prime}$ und $Q_{\prime\prime\prime}$ von der Ebene, welche im Angriffspunkt von Q normal zu der Richtung der Mittelkraft Q gedacht ist:

$$131\text{a})\begin{cases} Z_{\prime}{}^{0} = X_{\prime(Q)} \cdot \cos A + Y_{\prime(Q)} \cdot \cos B + Z_{\prime(Q)} \cdot \cos \Gamma \\ Z_{\prime\prime}{}^{0} = X_{\prime\prime(Q)} \cdot \cos A + Y_{\prime\prime(Q)} \cdot \cos B + Z_{\prime\prime(Q)} \cdot \cos \Gamma \\ Z_{\prime\prime\prime}{}^{0} = X_{\prime\prime\prime(Q)} \cdot \cos A + Y_{\prime\prime\prime(Q)} \cdot \cos B + Z_{\prime\prime\prime(Q)} \cdot \cos \Gamma. \end{cases}$$

Denken wir in der vierten Ebene zwei Axen, die normal auf einander sind, und von denen die eine mit MN*) zusammenfällt; legen wir durch diese Axen und durch die Richtung von Q Ebenen, so sind diese Ebenen und die vierte Ebene drei neue Koordinatenebenen, die Abstände der Angriffspunkte von der vierten Ebene $Z_{\prime}{}^{0}$, $Z_{\prime\prime}{}^{0}$, $Z_{\prime\prime\prime}{}^{0}$ haben wir so eben bestimmt; die Abstände von der Ebene durch MN und Qp wollen wir $X_{\prime}{}^{0}$, $X_{\prime\prime}{}^{0}$, $X_{\prime\prime\prime}{}^{0}$ und diejenigen von der Ebene, welche durch Qp geht und normal zu MN ist, mit $Y_{\prime}{}^{0}$, $Y_{\prime\prime}{}^{0}$, $Y_{\prime\prime\prime}{}^{0}$ bezeichnen. Nun ist offenbar die letztgenannte Ebene in dem Punkte Q normal zu der Linie MN; die Linie MN bildet aber mit der Axe QY den Winkel ε mit der Axe QX, den Winkel $90^{0} + \varepsilon$ und mit der Axe QZ den Winkel 90^{0}, folglich findet man den Abstand y^{0} irgend eines Punktes von dieser Ebene dnrch die oben entwickelte Regel (Gleichung 131), nämlich:

$$y^{0} = z \cdot \cos 90^{0} + y \cdot \cos \varepsilon + x \cdot \cos (90^{0} + \varepsilon),$$

oder wenn man für $\cos \varepsilon$ den oben bestimmten Werth (130) und für $\cos (90^{0} + \varepsilon)$ den Werth $- \sin \varepsilon$ setzt:

$$132)\quad y^{0} = y \cdot \frac{\cos A}{\sin \Gamma} - x \frac{\cos B}{\sin \Gamma}.$$

Es folgt hieraus:

$$132\text{a})\begin{cases} Y_{\prime}{}^{0} = Y_{\prime(Q)} \cdot \dfrac{\cos A}{\sin \Gamma} - X_{\prime(Q)} \cdot \dfrac{\cos B}{\sin \Gamma} \\ Y_{\prime\prime}{}^{0} = Y_{\prime\prime(Q)} \cdot \dfrac{\cos A}{\sin \Gamma} - X_{\prime\prime(Q)} \cdot \dfrac{\cos B}{\sin \Gamma} \\ Y_{\prime\prime\prime}{}^{0} = Y_{\prime\prime\prime(Q)} \cdot \dfrac{\cos A}{\sin \Gamma} - X_{\prime\prime\prime(Q)} \cdot \dfrac{\cos B}{\sin \Gamma}. \end{cases}$$

Die Linie Qp' erscheint offenbar als die Projektion derjenigen Axe, welche in der vierten Ebene liegt und in Q zu MN normal ist, auf die dritte Ebene. Bezeichnen wir den Winkel, welchen die genannte Axe mit der Axe QZ macht mit σ, den Winkel mit QY mit η und den Winkel mit QX mit ϑ, so ist nach der früher entwickelten Regel (130):

$$\cos \varepsilon = \frac{\cos \vartheta}{\sin \sigma}, \qquad \sin \varepsilon = \frac{\cos \eta}{\sin \sigma},$$

daraus folgt:

$$\cos \vartheta = \cos \varepsilon \cdot \sin \sigma, \qquad \cos \eta = \sin \varepsilon \cdot \sin \sigma.$$

---

*) Siehe die Figur auf S. 123.

Nun ist aber der Winkel σ offenbar gleich $90^0 + \Gamma$ und daher $\sin\sigma = \cos\Gamma$, und indem wir für $\cos\varepsilon$ und $\sin\varepsilon$ die oben gefundenen Werthe setzen, ergiebt sich:

$$\cos\vartheta = \frac{\cos A \cdot \cos\Gamma}{\sin\Gamma}, \qquad \cos\eta = \frac{\cos B \cdot \cos\Gamma}{\sin\Gamma}.$$

Die Ebene, welche durch MN*) und Qp gelegt wird, ist aber normal auf der ebenerwähnten Axe, und da diese Axe mit den drei ersten Axen die Winkel σ, η und ϑ macht, so folgt der Abstand eines beliebigen Punktes von dieser Ebene (131):

$$x_0 = z \cdot \cos\sigma + y \cdot \cos\eta + z \cdot \cos\vartheta,$$

und wenn man für $\cos\sigma$ setzt $\cos(90^0 + \Gamma) = -\sin\Gamma$ und für $\cos\vartheta$ und $\cos\eta$ die eben bestimmten Werthe, so folgt:

$$x_0 = -z\sin\Gamma + y \cdot \frac{\cos B \cdot \cos\Gamma}{\sin\Gamma} + x \cdot \frac{\cos A \cdot \cos\Gamma}{\sin\Gamma},$$

oder durch eine leichte Umformung:

$$x_0 = \frac{z \cdot \cos\Gamma^2 + y \cdot \cos B \cdot \cos\Gamma + x \cdot \cos A \cdot \cos\Gamma - z}{\sin\Gamma} = \frac{z_0 \cos\Gamma - z}{\sin\Gamma}.$$

Hiernach ist also:

133)

$$X_{\prime}{}^0 = \frac{X_{\prime}(\varrho) \cdot \cos A \cdot \cos\Gamma + Y_{\prime}(\varrho) \cdot \cos B \cdot \cos\Gamma + Z_{\prime}(\varrho) \cdot \cos\Gamma^2 - Z_{\prime}(\varrho)}{\sin\Gamma}$$

$$X_{\prime\prime}{}^0 = \frac{X_{\prime\prime}(\varrho) \cdot \cos A \cdot \cos\Gamma + Y_{\prime\prime}(\varrho) \cdot \cos B \cdot \cos\Gamma + Z_{\prime\prime}(\varrho) \cdot \cos\Gamma^2 - Z_{\prime\prime}(\varrho)}{\sin\Gamma}$$

$$X_{\prime\prime\prime}{}^0 = \frac{X_{\prime\prime\prime}(\varrho) \cdot \cos A \cdot \cos\Gamma + Y_{\prime\prime\prime}(\varrho) \cdot \cos B \cdot \cos\Gamma + Z_{\prime\prime\prime}(\varrho) \cdot \cos\Gamma^2 - Z_{\prime\prime\prime}(\varrho)}{\sin\Gamma},$$

oder:

$$133\text{a}) \quad X_{\prime}{}^0 = \frac{Z_{\prime}{}^0 \cdot \cos\Gamma - Z_{\prime}(\varrho)}{\sin\Gamma}, \qquad X_{\prime\prime}{}^0 = \frac{Z_{\prime\prime}{}^0 \cdot \cos\Gamma - Z_{\prime\prime}(\varrho)}{\sin\Gamma},$$

$$X_{\prime\prime\prime}{}^0 = \frac{Z_{\prime\prime\prime}{}^0 \cdot \cos\Gamma - Z_{\prime\prime\prime}(\varrho)}{\sin\Gamma}.$$

Es kommt nur noch darauf an die Winkel $\alpha_{\prime}{}^0$, $\alpha_{\prime\prime}{}^0$, $\alpha_{\prime\prime\prime}{}^0$ zu bestimmen, welche die drei Kraftrichtungen $Q_{\prime} . \sin A$, $Q_{\prime\prime} . \sin B$, $Q_{\prime\prime\prime} . \sin\Gamma$ mit einer von den neuen, in der vierten Ebene liegenden Axen bilden. Wir wählen die Axe, welche normal zu MN ist, als diejenige, mit welcher die genannten zu bestimmenden Winkel gebildet werden, und nennen diese Axe die Axe der X^0. Jene drei Kraftrichtungen sind entstanden, indem man die Drucke $Q_{\prime}$, $Q_{\prime\prime}$, $Q_{\prime\prime\prime}$ nach der Richtung Q und normal dazu zerlegte, sie erscheinen also als die Projektionen der Kraftrichtungen $Q_{\prime}$, $Q_{\prime\prime}$, $Q_{\prime\prime\prime}$ auf die zu Q normale vierte Ebene, oder da diese letztgenannten Kraftrichtungen parallel mit den drei ersten Axen sind, als die Pro-

*) Siehe die Figur auf S. 123.

jektionen dieser drei Axen auf die vierte Ebene. Nun macht die Axe QX*) mit der angenommenen neuen Axe der X^0 den Winkel ϑ; mit der zu der Ebene, in welcher diese neue Axe liegt, normalen Axe Qp (Axe der Z^0) den Winkel A und mit der Axe MN (oder der Axe der Y^0) den Winkel $90^0 + \varepsilon$.

Wir haben also nach dem Gesetz (130) auf S. 123 für den Winkel, welchen die Projektion von QX auf die vierte Ebene mit der Axe der X^0 macht, oder, was dasselbe ist, für den Winkel, welcher die Kraftrichtung $Q_{\prime} . \sin A$ mit der Axe der X^0 macht:

$$134) \left\{ \begin{aligned} \cos \alpha_{\prime}{}^0 &= \frac{\cos \vartheta}{\sin A} = \frac{\cos A . \cos \Gamma}{\sin A . \sin \Gamma} = \operatorname{cotg} A . \operatorname{cotg} \Gamma \\ \sin \alpha_{\prime}{}^0 &= \frac{\cos (90^0 + \varepsilon)}{\sin A} = \frac{-\sin \varepsilon}{\sin A} = \frac{-\cos B}{\sin A . \sin \Gamma} . \end{aligned} \right.$$

Ebenso findet man den Winkel, welchen die Projektion der Axe QY oder die Kraftrichtung $Q_{\prime\prime} . \sin B$ mit der Axe der X^0 macht, durch die Betrachtung, dafs die Axe QY mit der Axe der X^0 den Winkel η mit der Axe der Y^0 den Winkel ε und mit der Axe der Z^0 den Winkel B bildet:

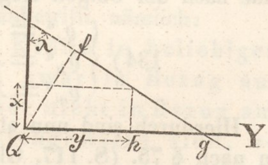
$$134\,a) \left\{ \begin{aligned} \cos \alpha_{\prime\prime}{}^0 &= \frac{\cos \eta}{\sin \varepsilon} = \frac{\cos B . \cos \Gamma}{\sin B . \sin \Gamma} = \operatorname{cotg} B . \operatorname{cotg} \Gamma \\ \sin \alpha_{\prime\prime}{}^0 &= \frac{\cos \eta}{\sin B} = \frac{\cos A}{\sin B . \sin \Gamma} , \end{aligned} \right.$$

und endlich ergiebt sich der dritte Winkel, da die Axe QZ mit der Axe der X^0, den Winkel $\sigma = 90^0 + \Gamma$; mit der Axe der Y^0 einen Rechten, und mit der Axe der Z^0 den Winkel Γ bildet:

$$134\,b) \left\{ \begin{aligned} \cos \alpha_{\prime\prime\prime}{}^0 &= \frac{\cos (90^0 + \Gamma)}{\sin \Gamma} = -1 \\ \sin \alpha_{\prime\prime\prime}{}^0 &= \frac{\cos 90^0}{\sin \gamma} = 0 , \end{aligned} \right.$$

d. h. die Richtung $Q_{\prime\prime\prime} . \sin \Gamma$ macht mit der Richtung der Axe der X^0 einen Winkel von 180 Grad, ist der Richtung der Axe X^0 also entgegengesetzt.

Endlich lassen sich auch noch die **Hebelsarme** der Kräfte $Q' . \sin A$, $Q_{\prime\prime} . \sin B$ und $Q_{\prime\prime\prime} . \sin \Gamma$ in Bezug auf die Axe pQ leicht bestimmen. Sind nämlich x und y die Koordinaten eines Punktes parallel mit der Ebene gemessen, auf welcher die dritte Axe normal steht, so ist der kürzeste Abstand der Richtungslinie der Kraft, welche durch diesen Punkt



*) Siehe die Figur auf S. 123.

geht, und deren Projektion mit der Axe der X den Winkel λ bildet, von der dritten Axe offenbar:

$$135) \left\{ \begin{array}{l} Qf = Qg \, . \cos\lambda = (y + hg) \cos\lambda = (y + x \operatorname{tang}\lambda) \cos\lambda \\ \quad = y \, . \cos\lambda + x \sin\lambda. \end{array} \right.$$

Macht die Kraftrichtung selbst mit der Axe der X den Winkel α, mit der Axe der Y den Winkel β und mit der Axe der Z den Winkel γ, so hat man nach dem Frühern (130) für den Winkel, welcher ihre Projektion mit der Axe der X bildet:

$$\cos\lambda = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}, \quad \sin\lambda = \frac{\cos\beta}{\sin\gamma},$$

folglich die kürzeste Entfernung der Kraftrichtung von der Axe der Z oder den Hebelsarm der Kraft in Bezug auf die Axe der Z:

$$135a) \quad Qf = R_{\prime\prime\prime} = \frac{x \, . \cos\beta}{\sin\gamma} + \frac{y \, . \cos\alpha}{\sin\gamma}.$$

Man findet also den Hebelsarm einer Kraft, deren Richtung durch einen gegebenen Punkt geht und mit den drei Axen gegebene Winkel bildet, in Bezug auf eine Axe, wenn man jede einzelne der beiden Koordinaten, welche nicht mit dieser Axe parallel sind, multiplizirt mit dem Kosinus des Neigungswinkels, welchen die Kraftrichtung mit derjenigen Axe macht, die der andern von beiden parallel ist, und die Summe der Produkte dividirt durch den Sinus des Neigungswinkels, welchen die Kraftrichtung mit derjenigen Axe macht, für welche man den Hebelsarm bestimmen will, oder wenn man jede der beiden Koordinaten mit dem Sinus des Neigungswinkels multiplizirt, welchen die Projektion der Kraftrichtung auf eine Ebene, die normal zu der Axe ist, für welche man den Hebelsarm bestimmen will, bildet mit derjenigen Axe, mit welcher die betreffende Koordinate parallel ist; und die Summe nimmt.

Nennen wir die Hebelsarme der drei Kräfte $Q_{\prime} . \sin A$, $Q_{\prime\prime} \sin B$, $Q_{\prime\prime\prime} . \sin \Gamma$ in Bezug auf die mit der Richtung Q zusammenfallende Axe der Reihe nach $\varrho_{\prime}{}^0$, $\varrho_{\prime\prime}{}^0$, $\varrho_{\prime\prime\prime}{}^0$, so findet man diese Hebelsarme nach der obigen Regel (135):

$$134) \left\{ \begin{array}{l} \varrho_{\prime}{}^0 = X_{\prime}{}^0 \, . \sin\alpha_{\prime} + Y_{\prime}{}^0 \, . \cos\alpha_{\prime}{}^0 \\ \varrho_{\prime\prime}{}^0 = X_{\prime\prime}{}^0 \, . \sin\alpha_{\prime\prime} + Y_{\prime\prime}{}^0 \, . \cos\alpha_{\prime\prime}{}^0 \\ \varrho_{\prime\prime\prime}{}^0 = X_{\prime\prime\prime}{}^0 \, . \sin\alpha_{\prime\prime\prime} + Y_{\prime\prime\prime}{}^0 \, . \cos\alpha_{\prime\prime\prime}{}^0 = - Y_{\prime\prime\prime}{}^0. \end{array} \right.$$

Hierdurch sind nun alle Elemente bestimmt, deren man bedarf, um nach § 75. (S. 117, Gleichung 123), 123a) und 123b) die Lage und das Moment des Kräftepaares zu bestimmen.

Man hat nämlich zu setzen in jenen Gleichungen:

$$137)\left\{\begin{array}{l}\Sigma(K.\sin a.z) = Q_{\prime}.\sin A.\sin\alpha_{\prime}{}^{0}.Z_{\prime}{}^{0} + Q_{\prime\prime}.\sin B.\sin\alpha_{\prime\prime}{}^{0}.Z_{\prime\prime}{}^{0} + \\ \qquad Q_{\prime\prime\prime}.\sin\Gamma.\sin\alpha_{\prime\prime\prime}{}^{0}.Z_{\prime\prime\prime}{}^{0} \\ \Sigma(K.\cos a.z) = Q_{\prime}.\sin A.\cos\alpha_{\prime}{}^{0}.Z_{\prime}{}^{0} + Q_{\prime\prime}.\sin B.\cos\alpha_{\prime\prime}{}^{0}.Z_{\prime\prime}{}^{0} + \\ \qquad Q_{\prime\prime\prime}.\sin\Gamma.\cos\alpha_{\prime\prime\prime}{}^{0}.Z_{\prime\prime\prime}{}^{0} \\ \Sigma(K.R_{\prime\prime\prime}) = Q_{\prime}.\sin A.\varrho_{\prime}{}^{0} + Q_{\prime\prime}.\sin B.\varrho_{\prime\prime}{}^{0} + Q_{\prime\prime\prime}.\sin\Gamma.\varrho_{\prime\prime\prime}{}^{0}.\end{array}\right.$$

Es ergiebt sich sodann aus Gleichung 123) der Winkel ψ, welchen die Durchschnittslinie der Ebene des Kräftepaars und der vierten Ebene mit der Axe der X^0 macht; aus Gleichung 123 a) der Winkel, welchen die Ebene des Kräftepaars mit der vierten Ebene, oder überhaupt mit einer Ebene macht, die normal ist zur Richtung der Resultirenden der fortschreitenden Bewegung, und endlich aus Gleichung 123 b) das Moment des resultirenden Kräftepaares *).

Ueberhaupt folgt aus der eben durchgeführten Rechnung:

II. Wenn auf ein festes System beliebige Kräfte einwirken, welche weder in Bezug auf fortschreitende noch in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind, so läſst sich ihre Wirkung immer zurückführen auf eine Kraft, welche der Richtung und Gröſse nach (Gleichung 127, 128, 128 a), und auf ein Kräftepaar, dessen Moment der Gröſse nach, und dessen Ebene der Lage nach (Gleichung 123 und 136) zu bestimmen sind.

Ziehen wir nunmehr den zweiten Fall in Betracht:

B. Wenn auf ein festes System Kräfte in beliebigen Richtungen wirken, welche zwar in Bezug auf drehende Bewegung, nicht aber in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind, so läſst sich immer eine Resultante durch die Gleichungen 127), 128) und 128 a) der Gröſse und Richtung nach bestimmen.

Dieser Fall ist nämlich ohne Weiteres auf die analogen Fälle auf S. 104 und 115 zurückzuführen.

Was nun endlich den dritten Fall anbetrifft, nämlich:

C. Wenn auf ein festes System Kräfte in beliebigen Richtungen wirken, welche zwar in Bezug auf fortschreitende Bewegung, aber nicht in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind, so

---

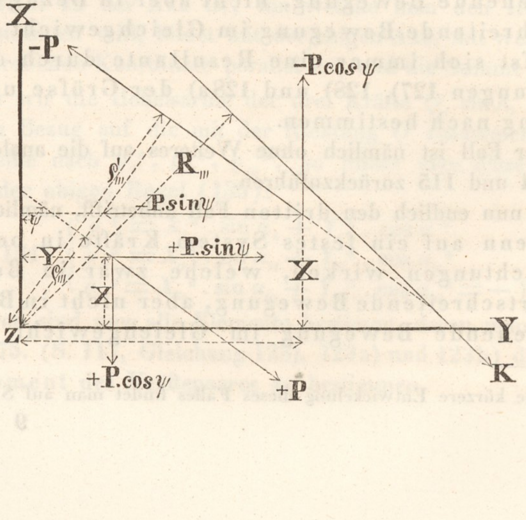
*) Eine kürzere Entwickelung dieses Falles findet man auf S. 142.

läfst sich die Wirkung derselben immer nur auf ein resultirendes Kräftepaar zurückführen.

Um dies nachzuweisen, verfahren wir ganz ähnlich wie auf S. 116 C.

Zunächst ist einleuchtend, dafs eine Gegenkraft, welche wir in das System einführen möchten, das Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung stören würde; es sind also wenigstens zwei gleich grofse, parallele, aber der Richtung nach entgegengesetzte Kräfte $+P'$ und $-P'$ einzuführen, welche mit den drei Axen die Winkel A, B und Γ bilden mögen.

Legen wir durch die parallelen Richtungen der Kräfte $+P'$ und $-P'$ eine Ebene, und verbinden nun ihre Angriffspunkte, so liegt auch diese Verbindungslinie in derselben Ebene. In jedem Falle lassen sich aber die beiden Kräfte in dieser Ebene zerlegen in je zwei andere, von denen die einen parallel sind mit einer der Koordinaten-Ebenen, z. B. mit der Ebene XY, und die andern in die Richtung der Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte fallen. Die Komponenten, parallel mit der Grundebene XY, sind unter sich parallel, gleich grofs, aber entgegengesetzt, und mögen mit $+P$ und $-P$ bezeichnet werden, die Komponenten nach der Richtung der Verbindungslinie sind ebenfalls gleich grofs, entgegengesetzt und fallen in dieselbe gerade Linie, sie mögen mit $+P''$ und $-P''$ bezeichnet werden. Diese beiden Komponenten halten einander das Gleichgewicht, sie nehmen nur die innern Kräfte des Systems in Anspruch, und können auf das System weder auf Drehung noch auf Fortschreiten wirken; sie fallen also aus der Betrachtung, und man sieht, dafs, wie man auch die Lage und Richtung der beiden



Kräfte $+P'$ und $-P'$ gewählt haben mag, sich für dieselben immer zwei andere $+P$ und $-P$ substituiren lassen, die in denselben Angriffspunkten wirken, deren Richtungen parallel mit einer der Koordinatenebenen sind, und aufserdem in derselben Ebene liegen, welche durch die Kräfte $+P'$ und $-P'$ gelegt werden konnte.

Behalten wir die Bezeichnungen auf S. 116 bei, so folgt, dafs, wenn die beiden Kräfte $+P$ und $-P$ Gleichgewicht gegen drehende Bewegung herstellen sollen, sein müsse:

a) $\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,}) = P.\sin\psi(Z-Z')$

b) $\Sigma(K.\sin\beta.R_{,,}) = P.\cos\psi(Z-Z')$

c) $\Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,}) = P.(\varrho_{,,,}-\varrho'_{,,,})$.

Durch dieselben Betrachtungen, welche bereits auf S. 117 angestellt worden, und in Erwägung, dafs wir diese Betrachtungen, welche für die Ebene XY gelten, hier auch für die Ebene XZ und ZY anstellen können, folgt allgemein:

Der Neigungswinkel der Ebene des Kräftepaars gegen die Ebene XY

$$138)\quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{\{[\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,})]^2+[\Sigma(K.\sin\beta.R_{,,})]^2\}}}{\Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,})},$$

d. h. man findet die Tangente des Neigungswinkels der Ebene, in welcher das resultirende Kräftepaar liegt, gegen eine der Koordinatenebenen gleich dem Quotienten aus der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Momentensummen der einzelnen Kräfte in Bezug auf die beiden Axen, die in dieser Ebene liegen, durch die Momentensumme der einzelnen Kräfte in Bezug auf die Axe, welche normal zu dieser Ebene ist.

Es folgt ferner:

Der Neigungswinkel der Durchschnittslinie der Ebene des Kräftepaars mit einer der Koordinatenebenen gegen eine der Axen, welche in dieser Ebene liegen:

$$138a)\quad \operatorname{tang}\psi = \frac{\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,})}{\Sigma(K.\sin\beta.R_{,,})},$$

d. h. man findet die Tangente des Neigungswinkels, welchen die Durchschnittslinie der Ebene des Kräftepaars mit einer der Koordinatenebenen gegen eine in dieser letztgenannten Ebene liegende Axe macht, gleich dem Quotienten aus der Momentensumme der einzelnen Kräfte in Bezug auf diese Axe durch die Momentensumme in Bezug auf die andere in derselben Ebene liegende Axe.

138b) Das Moment des Kräftepaars

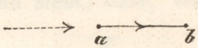
$$\sqrt{\left\{[\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,})]^2+[\Sigma(K.\sin\beta.R_{,,})]^2+[\Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,})]^2\right\}},$$

d. h. das Moment des resultirenden Kräftepaars ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Momentensummen der einzelnen Kräfte in Bezug auf die drei Axen.

Vorschlag zur Annahme eines allgemein giltigen Modus die Winkel zu zählen, welche Kraftrichtungen mit rechtwinkligen Koordinaten-Axen bilden.

§ 77. Bei den vorhergehenden statischen Untersuchungen hat man mit Kräften zu thun, deren Richtungslinien nicht in ein und derselben Ebene liegen; man bestimmt sodann die Lage dieser Richtungslinien durch die Winkel, welche sie mit drei angenommenen Koordinaten-Axen machen; es ist sehr wichtig die Vorzeichen der Winkelfunktionen richtig in die Rechnung einzuführen, und um in dieser Beziehung keinen Irrthum zu begehen, mufs man die Winkel, welche die Richtungslinien mit den einzelnen Axen machen, von jeder Axe aus stets in demselben Sinne rechnen (vergl. § 59). Es erscheint wünschenswerth, dafs man sich allgemein über einen Modus einige, nach welchem bei dergleichen Untersuchungen die Kraftrichtungen zu bestimmen sind, und zu dem Zwecke scheint folgendes Verfahren empfehlenswerth:

1) Man sehe sämmtliche Kräfte so an, als ob sie in ihrem Angriffspunkt ziehend wirken, und nehme ihre Werthe dann absolut.



Um dies zu verstehen, diene folgende Erläuterung: Strebt eine Kraft ein Massenelement von *a* nach *b* zu bewegen, so können wir entweder die Kraft in einem Punkte wirkend denken, der auf derselben Seite von *a* liegt, auf welcher auch *b* liegt, und so als ob sie das Massenelement anziehe, oder wir können die Kraft auch in einem Punkte wirksam denken, der auf der entgegengesetzten Seite von *a* liegt, und so, als ob die Kraft das Bestreben habe, das Massenelement abzustofsen (§ 55. S. 67). Im ersten Falle bezeichnen wir die Wirkung, indem wir sagen, die Kraft wirke ziehend, im andern Fall, indem wir sagen, die Kraft wirke schiebend auf das Massenelement. Es ist gleichgiltig, ob wir sämmtliche Kräfte in ihren Angriffspunkten ziehend, oder ob wir sämmtliche Kräfte schiebend wirkend denken. Um eine Uebereinstimmung herbeizuführen, mö-