welches in einer mit den Kraftrichtungen parallelen Ebene liegt, dessen Kräfte beliebig grofs angenommen werden können, und dessen Angriffspunkte eine bestimmte relative Lage gegen einander haben, die man konstruiren kann, sobald man die Gröfse der Kräfte des Kräftepaars gegeben hat.

Die Entfernung der Angriffspunkte des Kräftepaars drückt sich wie leicht zu übersehen ist, aus durch:

$$\sqrt{\left\{(X-X')^2+(Y-Y')^2+(Z-Z')^2\right\}},$$

und wenn ψ der Winkel ist, welchen die Verbindungslinie der Angriffspunkte mit der Richtung der Kräfte macht, so ist die kürzeste Entfernung der Richtungslinien der Kräfte, wie ebenfalls durch eine einfache Betrachtung zu übersehen ist:

$$\sin\psi \,.\, \sqrt{\left\{(X-X')^2+(Y-Y')^2+(Z-Z')^2\right\}}$$

und folglich das Moment des Kräftepaares:

$$118\text{a})\quad P\,.\sin\psi\sqrt{\left\{(X-X')^2+(Y-Y')^2+(Z-Z')^2\right\}}=$$
$$=\sin\psi\,.\sqrt{\left\{[\Sigma(Kx)]^2+[\Sigma(Ky)]^2+[\Sigma(Kz)]^2\right\}}\quad(\text{Gl. }118)$$

in welchem Ausdruck ψ den Winkel bezeichnet, welchen die Richtungen der parallelen Kräfte mit der Verbindungslinie der Angriffspunkte des Kräftepaares bilden.

Bestimmung der Resultanten und ihrer Angriffspunkte für Kräfte, die auf ein festes System wirken, und welche zwar in parallelen Ebenen liegen, aber nicht unter einander parallel sind.

§ 75. Untersuchen wir nun den Fall, dafs Kräfte, die zwar nicht parallel sind, deren Richtungslinien aber in parallelen Ebenen liegen, auf ein festes System wirken.

Wir setzen zuerst den allgemeinsten Fall voraus, nämlich:

A. dafs die Kräfte weder in Bezug auf fortschreitende noch in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht seien.

Denken wir drei Koordinaten-Ebenen, von denen eine (die dritte) parallel ist mit den Ebenen der Kräfte, die beiden andern also (die erste und zweite) normal zu den Ebenen der Kräfte sind; es liegt dann die erste und zweite Axe in einer Ebene parallel mit den Ebenen der Kräfte, und die dritte Axe ist normal zu den Ebenen der Kräfte.

Da die Komponenten sämmtlicher Kräfte, welche parallel mit der dritten Axe sind, unter der gemachten Annahme nothwendiger Weise gleich Null sein müssen, in sofern der Neigungswinkel γ gegen diese Axe für alle Kräfte gleich einem Rechten, also $\cos\gamma$ gleich Null ist, so folgt, daſs die Resultirende der fortschreitenden Bewegung für diese Richtung ebenfalls Null ist, und daſs also die Resultirende der fortschreitenden Bewegung überhaupt in einer Ebene liegen muſs, welche mit den Ebenen der Kräfte parallel ist. Die allgemeinen Gleichungen 110 und 111) für die Resultirende der fortschreitenden Bewegung gehen dann über in die Form:

$$119)\quad \begin{cases} Q = \sqrt{\left\{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K.\sin\alpha)]^2\right\}} \\ \cos A = \dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha)}{Q} = \sin B \\ \sin A = \dfrac{\Sigma(K.\sin\alpha)}{Q} = \cos B, \end{cases}$$

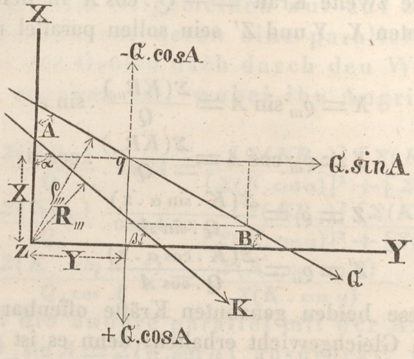
insofern nämlich in diesem Falle die Neigungswinkel α und β, welche die einzelnen Kräfte mit der ersten und zweiten Axe machen, immer zusammen einen Rechten betragen.

Durch diese Gleichungen ist die Resultante der fortschreitenden Bewegung der Kräfte in parallelen Ebenen der Gröſse und Richtung nach gegeben. Führt man eine Gegenkraft gleich $-Q$ ein, so erlangt das System Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung, gleichviel in welchem Angriffspunkt diese Gegenkraft angebracht wird. Soll aber die Gegenkraft auch Gleichgewicht gegen drehende Bewegung herstellen, so muſs sie die allgemeinen Bedingungs-Gleichungen 108) erfüllen, nämlich es muſs sein:

$$119a)\quad \begin{cases} \Sigma(K.\sin\alpha.R_{\prime}) - Q.\sin A.\varrho_{\prime} = 0 \\ \Sigma(K.\sin\beta.R_{\prime\prime}) - Q.\sin B.\varrho_{\prime\prime} = 0 \\ \Sigma(K.\sin\gamma.R_{\prime\prime\prime}) - Q.\sin \Gamma.\varrho_{\prime\prime\prime} = 0, \end{cases}$$

worin $\varrho_{\prime}$, $\varrho_{\prime\prime}$, $\varrho_{\prime\prime\prime}$ die kürzesten Abstände der Kraftrichtung Q von den drei Axen, oder die Abstände der Projektionen ihrer Richtung auf die zu den betreffenden Axen normalen Projektionsebenen von dem Durchschnittspunkt der Axen (§ 73. S. 100) bezeichnet. Beachtet man, daſs $\sin\gamma \ldots \sin\Gamma = 1$ ist, daſs $\sin\beta = \cos\alpha$; $\sin B = \cos A$ etc. ist, so folgt:

$$119b)\quad \begin{cases} \Sigma(K.\sin\alpha.R_{\prime}) - Q.\sin A.\varrho_{\prime} = 0 \\ \Sigma(K.\cos\alpha.R_{\prime\prime}) - Q.\cos A.\varrho_{\prime\prime} = 0 \\ \Sigma(KR_{\prime\prime\prime}) - Q.\varrho_{\prime\prime\prime} = 0. \end{cases}$$



Es sei die Ebene des Papiers die dritte Projektionsebene, also parallel mit den Ebenen, in welchen die Kräfte liegen, die Axe Z normal zur Ebene des Papiers, dann liegen die Axen X und Y in der Ebene des Papiers, nun ist $\varrho_{'''}$ der Abstand der Projektion der Resultirenden auf die Ebene XY und durch die dritte Gleichung zu bestimmen, nämlich:

$$\varrho_{'''} = \frac{\Sigma(KR_{'''})}{Q}.$$

Zugleich bemerkt man, dafs die Abstände $R_{'}\ldots$ und $R_{''}\ldots$. nämlich die kürzesten Entfernungen der Kräfte $K, K'\ldots$ von den Axen X und Y, nichts anderes darstellen, als die Entfernungen der Parallelebenen, in welchen die Kraftrichtungen liegen, von der Projektionsebene XY, oder mit andern Worten die Abstände $z, z_{'}, z_{''}\ldots$ der Angriffspunkte der Kräfte von der dritten Projektionsebene. Es ist also $R_{'} = R_{''} = z$ etc. und die beiden ersten Gleichungen liefern daher für den Abstand des Angriffspunktes der Resultirenden von der Ebene XY die beiden Werthe:

$$\varrho_{'} = \frac{\Sigma(K \,.\, \sin\alpha \,.\, z)}{Q \,.\, \sin A}$$

$$\text{und } \varrho_{''} = \frac{\Sigma(K \,.\, \cos\alpha \,.\, z)}{Q \,.\, \cos A}.$$

Diese beiden Werthe sind nicht nothwendiger Weise einander gleich, und man sieht daher, dafs es in diesem Falle nicht immer möglich ist nur eine Resultirende für das System zu finden. Um nun aber das System im **vollkommenen Gleichgewicht** zu halten, stellen wir uns vor, es wirke eine Kraft $= -Q.\sin A$ in dem Punkte q, dessen Koordinaten X, Y und Z seien, parallel mit der

Axe Y und eine zweite Kraft $= -Q \cdot \cos A$ in dem Punkte q'*), dessen Koordinaten X, Y und Z' sein sollen parallel mit der Axe X. Nimmt man:

$$X = \varrho_{\prime\prime\prime} \sin A = \frac{\Sigma(KR_{\prime\prime\prime})}{Q} \cdot \sin A$$

$$Y = \varrho_{\prime\prime\prime} \cos A = \frac{\Sigma(KR_{\prime\prime\prime})}{Q} \cdot \cos A$$

$$Z = \varrho_{\prime} = \frac{\Sigma(K \cdot \sin\alpha \cdot z)}{Q \cdot \sin A}$$

$$Z' = \varrho_{\prime\prime} = \frac{\Sigma(K \cdot \cos\alpha \cdot z)}{Q \cdot \cos A},$$

so werden diese beiden genannten Kräfte offenbar das System in vollkommenem Gleichgewicht erhalten; denn es ist nach 119):

$$120)\quad Q \cdot \sin A = \Sigma(K \cdot \sin\alpha); \quad Q \cdot \cos A = \Sigma(K \cdot \cos\alpha),$$

folglich in Bezug auf fortschreitende Bewegung:

$$\Sigma(K \cdot \sin\alpha) - (Q \cdot \sin A) = 0$$
$$\Sigma(K \cdot \cos\alpha) - (Q \cdot \cos A) = 0,$$

welche Gleichungen zeigen, dafs durch die beiden Kräfte Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung hergestellt ist, und da in Bezug auf drehende Bewegung um die Axe Z die Hebelsarme der Kräfte $-Q \cdot \sin A$ und $-Q \cdot \cos A$ beziehlich X und Y sind, so hat man:

$$\Sigma(KR_{\prime\prime\prime}) - Q \cdot \sin A \cdot X - Q \cdot \cos A \cdot Y =$$
$$\Sigma(KR_{\prime\prime\prime}) - (\sin A^2 + \cos A^2) \cdot \Sigma(KR_{\prime\prime\prime}) = 0,$$

(indem man nämlich für X und Y die oben bestimmten Werthe setzt) welche Gleichung zeigt, dafs keine Drehung um die Axe Z statt findet. Man hat aber in Bezug auf Drehung um die Axe Y, da die Kraft $-Q \cdot \sin A$ keine Drehung um diese Axe bewirkt, insofern sie mit derselben parallel ist:

$$\Sigma(K \cos\alpha \cdot z) - Q \cdot \cos A \cdot Z' = 0$$

(wenn man für Z' den oben angenommenen Werth setzt), und ebenso findet man in Bezug auf Drehung um die Axe X:

$$\Sigma(K \cdot \sin\alpha \cdot z) - Q \cdot \sin A \cdot Z = 0.$$

Man sieht also:

I. wenn Kräfte in parallelen Ebenen wirken, ohne selbst parallel zu sein, und wenn die Kräfte weder in Bezug auf fortschreitende Bewegung noch in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind: so ist die Wir-

*) Der Punkt q' ist in der Figur normal über oder unter dem Punkt q liegend zu denken; er deckt sich also mit dem Punkte q und konnte daher nicht besonders bezeichnet werden.

kung der Kräfte im Allgemeinen nur auf zwei Resultirende zurückzuführen, deren eine parallel mit der Axe der X ist, und der Gröfse nach durch den Werth $Q \,.\, \cos A = \Sigma(K \,.\, \cos\alpha)$ gegeben ist, wobei ihr Angriffspunkt die Koordinaten

$$120\text{a)} \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{\Sigma(KR_{,,,})}{Q} \,.\, \sin A = \frac{[\Sigma(KR_{,,,})]\,[\Sigma(K \,.\, \sin\alpha)]}{[\Sigma(K \,.\, \cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K \,.\, \sin\alpha)]^2} \\ Y &= \frac{\Sigma(KR_{,,,})}{Q} \,.\, \cos A = \frac{[\Sigma(KR_{,,,})]\,[\Sigma(K \,.\, \cos\alpha)]}{[\Sigma(K \,.\, \cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K \,.\, \sin\alpha)]^2} \\ Z' &= \frac{\Sigma(K \,.\, \cos\alpha \,.\, z)}{Q \,.\, \cos A} = \frac{\Sigma(K \,.\, \cos\alpha \,.\, z)}{\Sigma(K \,.\, \cos\alpha)} \end{aligned} \right.$$

hat, während die andere parallel mit der Axe der Y ist, sich durch $Q \,.\, \sin A = \Sigma(K \,.\, \sin\alpha)$ ausdrückt, und ihr Angriffspunkt durch die Koordinaten X und Y, welche dieselben wie die der ersten Kraft sind, und durch die Ordinate

$$120\text{b)} \left\{ \; Z = \frac{\Sigma(K \,.\, \sin\alpha \,.\, z)}{Q \,.\, \sin A} = \frac{\Sigma(K \,.\, \sin\alpha \,.\, z)}{\Sigma(K \,.\, \sin\alpha)} \right.$$

gegeben ist.

Beachtet man, dafs die Axen X und Y ganz beliebig angenommen sind, nur durch die Bedingung bestimmt, dafs sie zu einander normal, und dafs sie in einer mit den Ebenen der Kräfte parallelen Ebene liegen sollen, so ergiebt sich, dafs die Wirkung sämmtlicher Kräfte in dem behandelten Falle sich immer auf zwei Resultirende zurückführen läfst, die in zwei mit den Kräften parallelen Ebenen liegen, zu einander normal sind, in den Ebenen aber gegen die Richtungen der gegebenen Kräfte eine ganz beliebige Lage haben können. Nimmt man diese Lage an, so sind die Axen beziehlich parallel mit den angenommenen Richtungen der beiden Resultirenden zu legen, und nun sind die Resultirenden und ihre Angriffspunkte durch die Gleichungen 120, 120a und 120b) zu bestimmen.

Wenn sich der Fall auf eine einzige Resultirende zurückführen lassen soll, so mufs sein:

$$Z = Z',$$

oder nach 120a) und 120b):

$$\frac{\Sigma(K \,.\, \cos\alpha \,.\, z)}{\Sigma(K \,.\, \sin\alpha \,.\, z)} = \frac{\Sigma(K \,.\, \cos\alpha)}{\Sigma(K \,.\, \sin\alpha)};$$

dies ist im Allgemeinen nur möglich, wenn entweder:

1) der Werth z sämmtlichen Summanden ein gemeinschaftlicher Faktor ist, der sich dann links fortheben läfst, d. h. wenn die Kräfte sämmt-

lich in ein und derselben Ebene liegen, und weder in Bezug auf fortschreitende noch in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind, oder:

2) wenn die Kräfte sämmtlich parallel sind, wobei sie in verschiedenen Ebenen liegen können, aber dabei nicht von Hause aus in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sein dürfen (vergl. § 74. S. 105), denn in diesem Falle ist $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$ rechts und links in der Gleichung ein gemeinschaftlicher Faktor für alle Summanden, und die Gleichung wird vollkommen erfüllt. Wären aber die Kräfte in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht, so ginge die rechte Seite der Gleichung in die Form $\frac{0}{0}$ über, woraus sich nicht der Schlufs ziehen läfst, dafs nun auch $Z = Z'$ sein müsse.

Uebrigens läfst sich der in diesem Paragraphen behandelte allgemeine Fall auch zurückführen auf eine Resultirende und auf ein Kräftepaar. Denn (vgl. die Figur auf S. 109) bringen wir z. B. in dem Punkte q', der durch die Koordinaten X, Y, Z' (Gleichung 120a) gegeben ist, und in welchem die Resultirende $Q . \cos A = \Sigma(K . \cos \alpha)$ wirksam ist, zwei gleich grofse, der Richtung nach aber entgegengesetzte Kräfte an, welche parallel mit der Richtnng der Kraft $Q . \sin A$, folglich normal zu der Richtung der in dem Punkte q' wirkenden Kraft $Q . \cos A$ sind, und deren eine gleich $+ Q . \sin A$, die andere gleich $- Q . \sin A$ ist, so wird in dem System in Bezug auf Gleichgewicht nichts geändert; nun aber läfst sich die Kraft $+ Q . \sin A$ und $+ Q . \cos A$ vereinigen zu der Resultirenden Q und es bleibt in dem Punkt q' somit wirksam die Kraft Q und die Kraft $- Q . \sin A$, welche mit der Kraft $Q . \sin A$ in dem Punkt q, der durch die Koordinaten X, Y, Z (Gleichung 120b) gegeben ist, parallel ist, folglich in einer Ebene liegt, und auch der Gröfse nach gleich, aber entgegengesetzt ist. Diese beiden Kräfte bilden also ein Kräftepaar. In ganz gleicher Weise kann man das System zurückführen auf die Kraft Q, welche in dem Punkte q angreift, und auf ein Kräftepaar $+ Q . \cos A$ und $- Q . \cos A$, von dem die Kraft $- Q . \cos A$ in dem Punkte q wirksam zu denken ist. Da nun die Richtung der Axen X und Y in der dritten Projektionsebene beliebig zu nehmen ist (vergl. oben), so ist auch die Lage der Ebene, in welcher das Kräftepaar wirksam zu denken ist, gegen die Richtung von Q beliebig zu nehmen, nur mufs sie normal sein zu den Parallelebenen, in welchen die Kräfte liegen. Es ist also der behandelte Fall immer zurückzuführen:

II. auf eine der Gröfse und Richtung nach (Gleichung 119) bestimmte Kraft Q, deren Angriffspunkt durch die Koordinaten-Gleichung 120a) zu bestimmen ist, und auf ein Kräftepaar, welches in einer zu den Ebenen der Kräfte normalen Ebene liegt, die mit der Richtung von Q einen beliebig angenommenen Winkel A bildet. Die Kräfte dieses Kräftepaares sind $+Q\,.\cos A$ und $-Q\,.\cos A$, und es ist die Kraft $-Q\,.\cos A$ in demselben Angriffspunkt wirksam zu denken, in welchem die Kraft Q wirkt, während die Kraft $+Q\,.\cos A$ in einem normalen Abstande von diesem Angriffspunkt wirksam zu denken ist, der gleich:

$$121)\ Z'-Z=\frac{\Sigma(K\,.\cos\alpha\,.z)}{\Sigma(K\,.\cos\alpha)}-\frac{\Sigma(K\,.\sin\alpha\,.z)}{\Sigma(K\,.\sin\alpha)}$$

ist; wobei unter $\alpha\ldots.$ die Winkel zu verstehen sind, welche die Richtungen der Kräfte $K\ldots$ mit der Ebene machen, in welcher das Kräftepaar liegt; da nämlich diese Ebene parallel mit derselben Axe angenommen worden, mit welcher die Kräfte die Winkel $\alpha\ldots.$ bilden. Das Moment dieses Kräftepaares ist offenbar:

$$121a)\ Q\,.\cos A\,.(Z'-Z)=\Sigma(K\,.\cos\alpha\,.z)-\Sigma(K\,.\sin\alpha\,.z)\,.\operatorname{cotg} A$$

$$=\Sigma(K\,.\cos\alpha\,.z)-\Sigma(K\,.\sin\alpha\,.z)\frac{\Sigma(K\,.\cos\alpha)}{\Sigma(K\,.\sin\alpha)},$$

welches mit Benutzung der Gleichungen 121) und 119) folgt, und worin $\alpha\ldots.$ die Winkel bezeichnen, welche die einzelnen Kräfte mit der Ebene machen, in welche das Kräftepaar liegt.

Sind die Kräfte parallel, so folgt, wie leicht ersichtlich, das Moment des Kräftepaars gleich Null, und man kann das System auf eine Resultirende zurückführen.

Da nun der Winkel, welchen das Kräftepaar mit der Richtung von Q macht, ein beliebiger sein kann, so kann man ihn auch gleich einem Rechten nehmen, d. h. man kann auch die eine der beiden Axen mit der Resultirenden Q parallel, die andere normal zu derselben nehmen. Allein für diesen Fall reichen die Gleichungen 120), 120a) und 120b) nicht aus, um die Lage der Angriffspunkte zu bestimmen, da dieselben für $A=90$ Grad $\cos A=0$, folglich die Ordinate $Z'=\infty$ liefern würden. Man sieht leicht, wie in diesem Fall zu verfahren ist. Nehmen wir die erste Axe normal zur Resultirenden der fortschreitenden Bewegung und folglich die zweite Axe parallel mit dieser Richtung, so folgt (Gleichung 119):

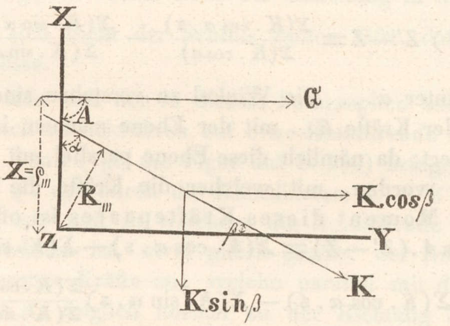
$$Q=\Sigma(K\,.\sin\alpha)$$
$$\Sigma(K\,.\cos\alpha)=0,$$

worin $\alpha \ldots$ die Winkel bezeichnen, welche die Kräfte mit der ersten Axe machen. Führt man lieber die Winkel $\beta \ldots$ ein, welche die Kräfte mit der zweiten Axe, oder was dasselbe ist, mit der Richtung von Q machen, so hat man:

$$122) \begin{array}{l} Q = \Sigma(K.\cos\beta) \\ \Sigma(K.\sin\beta) = 0. \end{array}$$

Soll nun die Kraft Q so liegen, daſs sie auch Gleichgewicht gegen drehende Bewegung herstellt*), so hat man in Bezug auf Drehung um die Axe Z:

$$122\text{a}) \quad \Sigma(KR_{\prime\prime\prime}) - Q.X = 0,$$



in Bezug auf Drehung um die Axe XZ:

$$122\text{b}) \quad \Sigma(K.\cos\beta.z) - Q.Z = 0.$$

Allein in Bezug auf Drehung um die Axe ZY kann die Kraft Q unter keinen Umständen das Gleichgewicht herstellen, da sie parallel mit dieser Axe ist; man muſs also, um dieses Gleichgewicht herzustellen, und dabei andrerseits nicht das Gleichgewicht in Bezug auf fortschreitende Bewegung zu stören, zwei neue Kräfte $+P$ und $-P$ einführen, welche in einer Ebene liegen, die normal zu der Axe ZY ist, und welche die Bedingungs-Gleichung erfüllen:

$$122\text{c}) \begin{array}{l} \Sigma(K.\sin\beta.z) + P.Z' - P.Z'' = 0. \\ \Sigma(K.\sin\beta.z) - P(Z'' - Z') = 0. \end{array}$$

III. Man kann also den Fall, daſs die Kräfte, welche auf ein festes System wirken, zwar in parallelen Ebenen liegen, aber nicht selbst parallel sind, während unter ihnen weder in Bezug auf fortschreitende noch in Bezug auf drehende Bewegung Gleichgewicht statt fin-

*) Vergl. S. 90.

det, immer auf eine Kraft Q, welche der Richtung und Gröfse nach durch die Gleichungen 119) gegeben ist, und auf ein Kräftepaar, welches in einer zu der Richtung Q normalen Ebene liegt, zurückführen.

Hat man Q der Richtung und Gröfse nach bestimmt, so findet man die Koordinaten des Angriffspunktes, nämlich

1) den Abstand X von einer mit der Richtung von Q parallelen und zu den Parallelebenen der Kräfte normalen Ebene (ZY) aus 122a):

$$X = \frac{\Sigma(KR_{,,,})}{Q} = \frac{\Sigma(KR_{,,,})}{\Sigma(K\,.\cos\beta)},$$

worin $R_{,,,}$ die kürzesten Abstände der Kraftrichtungen K... von einer in dieser Ebene liegenden, zu den Parallelebenen der Kräfte normalen Axe bezeichnet,

2) den Abstand der Ebene, in welcher Q liegt, und welche mit den Ebenen der Kraftrichtungen parallel ist, von irgend einer mit dieser Ebene parallelen Ebene (Grundebene): 122b):

$$Z = \frac{\Sigma(K\,.\cos\beta\,.\,z)}{Q} = \frac{\Sigma(K\,.\cos\beta\,.\,z)}{\Sigma(K\,.\cos\beta)},$$

worin β.... den Winkel bezeichnet, welchen die Kraftrichtungen mit der Richtung von Q machen, z.... aber die Abstände der Angriffspunkte der Kräfte von der Grundebene sind.

3) Die Koordinate Y, welche die Lage des Angriffspunktes von Q in der Richtung der Kraft Q angeben würde, bleibt unbestimmt, und man kann folglich jeden Punkt der Kraftrichtung Q, als Angriffspunkt betrachten.

4) Für die Bestimmung des Kräftepaars hat man die Bedingung, dafs dasselbe in einer Ebene liegen müsse, welche zu der Richtung der Kraft Q normal ist, und die Gleichung 122c), aus welcher folgt für das Moment des Kräftepaars:

$$P(Z''-Z') = \Sigma(K\,.\sin\beta\,.\,z),$$

so dafs man von den beiden Werthen P und $(Z''-Z')$ einen beliebig annehmen kann. Dieser Ausdruck folgt auch aus der allgemeinen Gleichung 121a), indem man beachtet, dafs $\Sigma(K\,.\cos\alpha) = 0$ ist.

Betrachten wir nun den Fall:

B. dafs die Kräfte zwar in Bezug auf drehende Bewegung, nicht aber in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind.

Die Resultirende gegen fortschreitende Bewegung ist der Lage und Richtung nach auch in diesem Falle durch die Gleichungen 119) zu bestimmen, da aber zufolge der Bedingung, dafs die Kräfte gegen drehende Bewegung im Gleichgewicht sein sollen, ihre Momente für drei Axen gleich Null sind, so folgt nach Gleichung 119a) auch $\varrho_{\prime} = 0$, $\varrho_{\prime\prime} = 0$, $\varrho_{\prime\prime\prime} = 0$, d. h. der Angriffspunkt der Resultirenden mufs im Anfangspunkte des Koordinatensystems liegen, oder so dafs er den Bedingungen entspricht, welche in Folge der Gleichungen 117) für den analogen Fall paralleler Kräfte aufgestellt worden sind (S. 104). In diesem Fall ist also eine Resultirende denkbar.

C. Wenn endlich auf ein festes System Kräfte wirken, deren Richtungslinien zwar in parallelen Ebenen liegen, aber nicht unter einander parallel sind, und wenn die Kräfte zwar in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind, aber nicht in Bezug auf drehende Bewegung, so läfst sich die Wirkung der Kräfte immer nur auf ein Kräftepaar zurückführen.

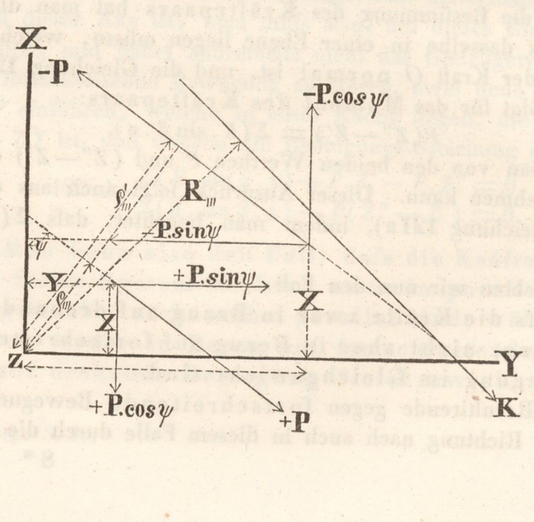
Die Gleichungen 119) nehmen für den gegebenen Fall die Form an:

$$\Sigma(K . \sin\alpha) = 0; \quad \Sigma(K . \cos\alpha) = 0,$$

und die Gleichungen in Bezug auf Drehung haben die Form:

$$\Sigma(K . \sin\alpha . z) = A, \quad \Sigma(K . \cos\alpha . z) = B, \quad \Sigma(K . R_{\prime\prime\prime}) = C,$$

wenn wir die früheren Bezeichnungen, und die zu Anfange dieses Paragraphen angenommene Lage der Koordinatenebenen gelten lassen. Man sieht leicht, dafs das Gleichgewicht gegen drehende Bewegung nur durch ein Kräftepaar $+P$ und $-P$ herzustel-



len ist, dessen Kräfte in Ebenen liegen, die mit den Parallelebenen der Kräfte parallel sind, denn wollte man nur eine einzige Kraft einführen, so würde durch dieselbe das Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung gestört werden. Bezeichnen wir den Abstand des Angriffspunkts von $+P$ von der Grundebene mit Z, denjenigen von $-P$ mit Z', den Winkel, welcher die Richtung von P mit der ersten Axe macht, mit ψ; ferner den Hebelsarm in Bezug auf die Axe Z von $+P$ mit $\varrho_{,,,}$, denjenigen von $-P$ mit $\varrho'_{,,,}$, so folgt, wenn die Kräfte $+P$ und $-P$ die Resultirenden der drehenden Bewegung sein sollen:

$$\text{a)}\ \Sigma(K.\sin\alpha.z) = P.\sin\psi(Z-Z'),$$

$$\text{b)}\ \Sigma(K.\cos\alpha.z) = P.\cos\psi(Z-Z'),$$

$$\text{c)}\ \Sigma(KR_{,,,}) = P(\varrho_{,,,}-\varrho'_{,,,}).$$

Aus den Gleichungen a) und b) folgt:

$$123)\ \operatorname{tang}\psi = \frac{\Sigma(K.\sin\alpha.z)}{\Sigma(K.\cos\alpha.z)},$$

durch welche Gleichung die Lage der **Durchschnittslinie** der Ebene, welche man durch die Kraftrichtungen des Kräftepaars legen kann, mit der **Grundebene** (ersten Projektionsebene) gegen die Axen XZ und YZ vollkommen bestimmt ist. Nennen wir nun den Neigungswinkel der Ebene, in welcher das Kräftepaar liegt, mit der Grundebene φ, so ist, wie leicht ersichtlich:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{(Z-Z')}{(\varrho_{,,,}-\varrho'_{,,,})} = \frac{(Z-Z')}{\Sigma(KR_{,,,})}.\frac{1}{P};$$

(vermöge Gleichung c). Indem wir aber die Gleichungen a) und b) quadriren, addiren, und $Z-Z'$ entwickeln, folgt:

$$(Z-Z') = \frac{1}{P}.\sqrt{\left\{[\Sigma(K.\sin\alpha.z)]^2 + [\Sigma(K.\cos\alpha.z)]^2\right\}}$$

$$123\text{a})\ \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{\left\{[\Sigma(K.\sin\alpha.z)]^2 + [\Sigma(K.\cos\alpha.z)]^2\right\}}}{\Sigma(KR_{,,,})}.$$

Durch die Gleichungen 123 und 123a) ist die Lage der Ebene, in welcher das Kräftepaar wirksam zu denken ist, der Richtung nach vollkommen bestimmt. Der kürzeste Abstand der beiden Kraftrichtungen $+P$ und $-P$ ist aber, wie die Figur leicht übersehen läfst, gleich

$$\sqrt{\left\{(Z-Z')^2 + (\varrho_{,,,}-\varrho'_{,,,})^2\right\}},$$

und indem wir die Werthe für $(Z-Z')^2$ und $(\varrho_{,,,}-\varrho'_{,,,})^2$ einsetzen und mit P multipliziren, folgt das **Moment des Kräftepaars**:

$$123\text{b})\ \sqrt{\left\{[\Sigma(K.\sin\alpha.z)]^2 + [\Sigma(K.\cos\alpha.z)]^2 + [\Sigma(KR_{,,,})]^2\right\}}.$$

Bezeichnen wir den Abstand der beiden Kraftrichtungen mit a, die Koordinaten des Angriffspunktes der einen von beiden Gegenkräften $(+P)$ mit X, Y, Z, so sind, wie sich leicht übersehen läfst, die Koordinaten des Angriffspunkts der andern Gegenkraft $(-P)$:

$$123\text{c)}\quad Z' = Z + a . \sin\varphi;\quad Y' = Y + a . \cos\varphi . \cos\psi;$$
$$X' = X + a . \cos\varphi . \sin\psi.$$

Für den Fall, dafs sämmtliche Kraftrichtungen parallel sind, folgt aus 123), 123a) und 123b):

$$124)\left\{\begin{array}{l}\operatorname{tang}\psi = \operatorname{tang}\alpha\\ \operatorname{tang}\varphi = \dfrac{\Sigma(Kz)}{\Sigma(K.R_{,,,})},\end{array}\right.$$

und das Moment des Kräftepaars:

$$124\text{a)}\quad \sqrt{\left\{[\Sigma(Kz)]^2 + [\Sigma(KR_{,,,})]^2\right\}},$$

in welchen Gleichungen z die Abstände der Angriffspunkte der einzelnen parallelen Kräfte von einer beliebigen mit ihrer Richtung parallelen Ebene und $R_{,,,}$ die Hebelsarme in Bezug auf eine beliebige, und zu dieser Ebene normale, Axe bezeichnen.

In dem Falle endlich, wo sämmtliche Kräfte in ein und derselben Ebene liegen, folgt:

$$125)\left\{\begin{array}{l}\operatorname{tang}\psi = \dfrac{z . \Sigma(K . \sin\alpha)}{z . \Sigma(K . \cos\alpha)} = \dfrac{0}{0}\\ \operatorname{tang}\varphi = 0,\end{array}\right.$$

und das Moment des Kräftepaares:

$$125\text{a)} = \Sigma(K . R_{,,,}),$$

d. h. in diesem Fall bleibt die Neigung des Kräftepaares (Winkel ψ) gegen die Axe XZ unbestimmt und kann beliebig genommen werden, das Kräftepaar, welches für die Wirkung der Kräfte substituirt werden kann, liegt in derselben Ebene, in welcher die Kräfte liegen, $(\varphi = 0)$ und es ist das Moment des Kräftepaares gleich der Summe der Momente sämmtlicher auf Drehung wirkenden Kräfte in Bezug auf eine beliebige zur Ebene der Kräfte normale Axe.

Bestimmung der Resultirenden und ihres Angriffspunktes für Kräfte, welche auf ein festes System wirken, und deren Richtungslinien eine beliebige Lage haben.

§ 76. Wir wenden uns nun zu dem allgemeinsten Fall, nämlich zu dem, dafs auf ein festes System beliebige Kräfte in ganz beliebigen Richtungen wirken, und dafs es darauf ankommt, ihre Resultirende der Gröfse und Richtung nach zu bestimmen.