

sen, wenn parallele Kräfte, die auf ein festes System wirken, in vollkommenem Gleichgewicht sein sollen.

Das Produkt $K \cdot x$ aus dem Druck einer Kraft in den normalen Abstand ihres Angriffspunktes von einer Ebene nennt man das Moment der Kraft in Bezug auf die Ebene. Es ist dieser Ausdruck nicht zu verwechseln mit dem statischen Moment einer Kraft in Bezug auf eine Axe.

Bestimmung des Angriffspunktes der Resultanten von parallelen Kräften, die auf ein festes System wirken; Kräftepaar.

§ 74. Werden die Bedingungs-Gleichungen 116) erfüllt, aber nicht 112a), so rückt das feste System geradlinig fort, ohne daß eine Drehung erfolgt; die Resultante der fortschreitenden Bewegung läßt sich dann durch die Gleichungen 112 und 113) der Größe und Richtung nach bestimmen. Will man nun auch Gleichgewicht gegen die fortschreitende Bewegung herstellen, so muß man eine Kraft Q , die gleich dieser Resultante ist, also

$$Q = \Sigma(K)$$

in entgegengesetzter Richtung der Resultanten auf das System wirken lassen; allein sobald man diese Kraft einführt, wird zwar die fortschreitende Bewegung aufgehoben, aber es ist denkbar, daß nun die Bedingungs-Gleichungen gegen die drehende Bewegung dadurch gestört werden. Soll gleichwohl das Gleichgewicht gegen drehende Bewegung bestehen bleiben, so ist der Angriffspunkt dieser Kraft nicht mehr beliebig (vergl. S. 99), sondern, wenn X, Y, Z die Koordinaten desselben sind, so muß zufolge der Gleichung 116) die Bedingung erfüllt werden:

$$\Sigma(Kx) - QX = 0$$

$$\Sigma(Ky) - QY = 0$$

$$\Sigma(Kz) - QZ = 0,$$

daraus folgen die Koordinaten für den Angriffspunkt der Resultanten paralleler Kräfte, unter der Voraussetzung, daß in dem System keine drehende Bewegung statt finden soll:

$$117) \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{\Sigma(Kx)}{Q} = \frac{\Sigma(Kx)}{\Sigma(K)} \\ Y = \frac{\Sigma(Ky)}{Q} = \frac{\Sigma(Ky)}{\Sigma(K)} \\ Z = \frac{\Sigma(Kz)}{Q} = \frac{\Sigma(Kz)}{\Sigma(K)} \end{array} \right.$$

Da übrigens zufolge der Bedingung, daß die Kräfte gegen drehende Bewegung im Gleichgewicht sein sollen, sowohl $\Sigma(Kx)$ als $\Sigma(Ky)$ und $\Sigma(Kz)$ einzeln gleich 0 sind, so folgt auch $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, d. h. wenn parallele Kräfte in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind, aber nicht in Bezug auf fortschreitende Bewegung, so liegt der Angriffspunkt der Resultirenden der fortschreitenden Bewegung so, daß wenn man durch denselben drei zu einander normale Ebenen legt, die Summe der Momente der Kräfte in Bezug auf jede dieser Ebenen gleich Null ist; oder mit anderen Worten, es ist der Angriffspunkt der Resultirenden immer in dem Anfangspunkt des angenommenen Koordinatensystems zu denken, und er liegt daher in jeder der Drehaxen, für welche Gleichgewicht gegen drehende Bewegung nachgewiesen werden kann.

In diesem Fall läßt sich folglich durch eine einzige Gegenkraft Gleichgewicht gegen drehende und gegen fortschreitende Bewegung herstellen.

Wenn die parallelen Kräfte, welche auf ein festes System wirken, weder in Bezug auf drehende noch in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind, so werden die Bedingungs-Gleichungen nicht erfüllt; dieselben haben dann im Allgemeinen die Form:

$$\begin{aligned} \Sigma(Kx) &= A; & \Sigma(Ky) &= B; & \Sigma(Kz) &= C, \\ & & \Sigma(K) &= Q, \end{aligned}$$

soll nun die Gegenkraft $-Q$, welche die fortschreitende Bewegung aufhebt, gleichzeitig auch die drehende Bewegung aufheben, so folgt wieder als Bedingung:

$$\Sigma(Kx) - QX = 0 = \Sigma(Kx) - A = 0 \text{ etc.},$$

und daraus:

$$117a) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{A}{Q} = \frac{\Sigma(Kx)}{Q} = \frac{\Sigma(Kx)}{\Sigma(K)} \\ Y &= \frac{B}{Q} = \frac{\Sigma(Ky)}{Q} = \frac{\Sigma(Ky)}{\Sigma(K)} \\ Z &= \frac{C}{Q} = \frac{\Sigma(Kz)}{Q} = \frac{\Sigma(Kz)}{\Sigma(K)}. \end{aligned} \right.$$

Durch diese Gleichungen sind die Koordinaten des Angriffspunktes der Resultirenden gegen fortschreitende Bewegung unter der Bedingung vollständig bestimmt, daß dieselbe Gegenkraft, welche die fortschreitende Bewegung aufhebt, gleichzeitig auch die drehende Bewegung aufheben soll; vorausgesetzt nämlich, daß A, B, C und Q reelle Werthe sind.

Die beiden Gleichungen 117 und 117a) zeigen, daß wenn auf

ein festes System parallele Kräfte einwirken, in folgenden beiden Fällen sich immer eine einzige Gegenkraft und deren Angriffspunkt bestimmen läßt, nämlich:

- 1) wenn die parallelen Kräfte von Hause aus schon gegen drehende Bewegung im Gleichgewicht sind, aber in Bezug auf fortschreitende Bewegung kein Gleichgewicht statt findet;
- 2) wenn die parallelen Kräfte weder in Bezug auf fortschreitende Bewegung noch in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind.

Es bleibt noch ein dritter Fall zu erörtern, nämlich der, wenn

- 3) die parallelen Kräfte von Hause aus gegen fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind, aber nicht gegen drehende Bewegung.

Wir werden sogleich zeigen, daß dann das vollkommene Gleichgewicht nicht durch eine einzige Gegenkraft hergestellt werden kann.

Dieser Fall entspricht nämlich den Gleichungen:

$$\Sigma(Kx) = A; \quad \Sigma(Ky) = B; \quad \Sigma(Kz) = C; \quad \Sigma(K) = 0.$$

Denken wir nun, es würde eine einzige Kraft angebracht, welche im Stande wäre das Gleichgewicht gegen drehende Bewegung herzustellen, so würde durch dieselbe offenbar die Gleichung $\Sigma(K) = 0$ gestört werden, und es würde nun eine fortschreitende Bewegung eintreten. Um aber die Gleichung $\Sigma(K) = 0$ aufrecht zu erhalten, ist es nöthig wenigstens zwei Kräfte auf das System wirken zu lassen, die der Größe nach gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt, und deren Richtungslinien parallel mit den Richtungslinien der gegebenen Kräfte sind. Nennen wir diese beiden Kräfte P und $-P$. Durch Einführung dieser beiden Kräfte wird das Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung nicht gestört, denn es ist offenbar, wenn $\Sigma(K) = 0$ ist, auch $\Sigma(K) + P - P = 0$.

Nennen wir die Koordinaten des Angriffspunktes der beiden Kräfte P und $-P$ beziehlich X, Y, Z und X', Y', Z' , so folgt, wenn diese Kräfte das Gleichgewicht gegen drehende Bewegung herstellen sollen:

$$118) \quad \begin{cases} \Sigma(Kx) + P(X - X') = 0 \\ \Sigma(Ky) + P(Y - Y') = 0 \\ \Sigma(Kz) + P(Z - Z') = 0. \end{cases}$$

Diese drei Bedingungs-Gleichungen sind die einzigen, welche sich für die Bestimmung der Drucke P und $-P$, sowie der Koordinaten ihrer Angriffspunkte aufstellen lassen, sie enthalten sieben

Unbekannte, nämlich P, X, Y, Z, X', Y', Z' , und es sind daher immer vier davon beliebig zu geben.

Giebt man den Druck $+P$ der Gröfse nach, und auch seinen Angriffspunkt durch die Koordinaten X, Y, Z , so sind die Koordinaten des Angriffspunktes für den Druck $-P$ durch die Gleichungen 118) zu finden.

Durch die Werthe $(X-X'), (Y-Y'), (Z-Z')$ ist übrigens die gegenseitige Lage der Angriffspunkte der beiden Kräfte vollkommen bestimmt, so dafs wenn man die Gröfse der Kräfte P annimmt, es nur auf diese gegenseitige Lage ankommt, nicht aber auf die absolute Lage der Angriffspunkte.

Man sieht überhaupt, dafs die Gleichungen 118) folgendes Gesetz ausdrücken:

Wenn auf ein festes System beliebig viele parallele Kräfte wirken, welche im Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung sich befinden, aber nicht im Gleichgewicht gegen drehende Bewegung, so ist in Bezug auf drehende Bewegung niemals eine einzige Resultante denkbar, sondern es müssen deren wenigstens zwei angenommen werden, deren Richtungen parallel sind mit denjenigen der parallelen Kräfte, und die einander der Gröfse nach gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt sind. Man kann die Gröfse dieser beiden Resultanten beliebig annehmen, dann aber ist die gegenseitige Lage der Angriffspunkte vollkommen bestimmt.

Da diese beiden Resultanten parallel mit einander und mit den Richtungen der ursprünglich gegebenen Kräfte sind, so läfst sich durch beide immer eine Ebene legen, welche parallel ist mit den Richtungen der gegebenen Kräfte.

Zwei gleich grofse Kräfte, deren Richtungen parallel aber entgegengesetzt sind, und welche sich nicht im Gleichgewicht gegen Drehung befinden, nennt man ein **Kräftepaar**.

Das Produkt aus dem Druck einer der beiden Kräfte in den kürzesten Abstand ihrer Richtungslinien nennt man das **Moment des Kräftepaars**.

Die Wirkung paralleler Kräfte, die in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind, nicht aber in Bezug auf drehende Bewegung, läfst sich daher immer durch ein Kräftepaar ersetzen,

welches in einer mit den Krafrichtungen parallelen Ebene liegt, dessen Kräfte beliebig groß angenommen werden können, und dessen Angriffspunkte eine bestimmte relative Lage gegen einander haben, die man konstruiren kann, sobald man die Größe der Kräfte des Kräftepaars gegeben hat.

Die Entfernung der Angriffspunkte des Kräftepaars drückt sich wie leicht zu übersehen ist, aus durch:

$$\sqrt{\{(X-X')^2 + (Y-Y')^2 + (Z-Z')^2\}},$$

und wenn ψ der Winkel ist, welchen die Verbindungslinie der Angriffspunkte mit der Richtung der Kräfte macht, so ist die kürzeste Entfernung der Richtungslinien der Kräfte, wie ebenfalls durch eine einfache Betrachtung zu übersehen ist:

$$\sin \psi \cdot \sqrt{\{(X-X')^2 + (Y-Y')^2 + (Z-Z')^2\}}$$

und folglich das Moment des Kräftepaars:

$$\begin{aligned} 118a) P \cdot \sin \psi \sqrt{\{(X-X')^2 + (Y-Y')^2 + (Z-Z')^2\}} &= \\ = \sin \psi \cdot \sqrt{\{[\Sigma(Kx)]^2 + [\Sigma(Ky)]^2 + [\Sigma(Kz)]^2\}} & \text{ (Gl. 118)} \end{aligned}$$

in welchem Ausdruck ψ den Winkel bezeichnet, welchen die Richtungen der parallelen Kräfte mit der Verbindungslinie der Angriffspunkte des Kräftepaars bilden.

Bestimmung der Resultanten und ihrer Angriffspunkte für Kräfte, die auf ein festes System wirken, und welche zwar in parallelen Ebenen liegen, aber nicht unter einander parallel sind.

§ 75. Untersuchen wir nun den Fall, daß Kräfte, die zwar nicht parallel sind, deren Richtungslinien aber in parallelen Ebenen liegen, auf ein festes System wirken.

Wir setzen zuerst den allgemeinsten Fall voraus, nämlich:

- A. daß die Kräfte weder in Bezug auf fortschreitende noch in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht seien.

Denken wir drei Koordinaten-Ebenen, von denen eine (die dritte) parallel ist mit den Ebenen der Kräfte, die beiden andern also (die erste und zweite) normal zu den Ebenen der Kräfte sind; es liegt dann die erste und zweite Axe in einer Ebene parallel mit den Ebenen der Kräfte, und die dritte Axe ist normal zu den Ebenen der Kräfte.