Sollen die Kräfte, deren Richtungen parallel sind, gegen fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sein, so folgt aus Gleichung 112):

$$112\text{a)}\ \Sigma(K) = 0.$$

Gesetze für das Gleichgewicht gegen drehende Bewegung, wenn die Kraftrichtungen parallel sind.

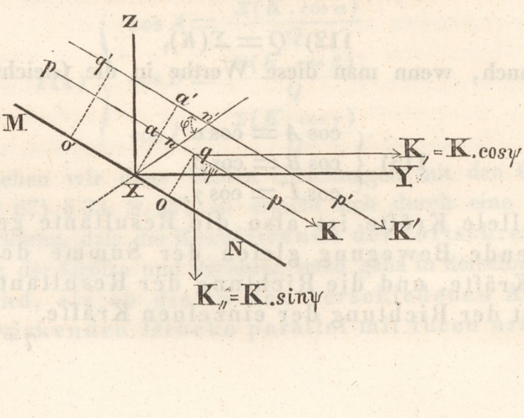
§ 73. Untersuchen wir nun die Verhältnisse der drehenden Bewegung.

Zu dem Ende wollen wir zunächst die Gesetze des Gleichgewichts gegen drehende Bewegung näher betrachten.

In den Gleichungen 108):

$$\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,}) = 0;\quad \Sigma(K.\sin\beta.R_{,,}) = 0;\quad \Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,}) = 0$$

bezeichnen $R_{,}$, $R_{,,}$, $R_{,,,}$ die kürzesten Abstände der einzelnen Kräfte von den drei angenommenen Axen; diese kürzesten Abstände werden erhalten, wenn man durch die Richtungen der Kräfte Ebenen legt, die parallel mit den Axen sind, und die Abstände dieser Ebenen, oder die Normalen von den betreffenden Axen auf die Ebenen konstruirt. Jede Ebene, parallel mit einer der drei Axen, ist normal auf der Ebene, in welcher die beiden andern Axen liegen, die so gedachte Ebene durch irgend eine Kraftrichtung ist also die projicirende Ebene für diese Kraftrichtung auf die Ebene der beiden andern Axen, und ihre Durchschnittslinie mit dieser letztgenannten Ebene ist die Projektion der Kraftrichtung auf diese; die Normale von der Axe auf die projicirende Ebene, oder der gesuchte kürzeste Abstand ist also gleich der Normalen von dem Durchschnittspunkt der drei Axen auf die Projektion der Kraftrichtung. Es sei z. B. die Ebene des Papiers diejenige der Axen YZ; pq sei die Projektion der Kraftrichtung K auf diese Ebene oder der Durch-



schnitt dieser Ebene mit einer Ebene, welche durch die Richtung von K parallel zur ersten Axe gelegt werden kann, dann ist Xa, oder die Normale von der Axe X auf diese Ebene, welche gleich ist der Normalen vom Durchschnittspunkt der Axen auf die Projektion pq, die gesuchte kürzeste Entfernung $R_{\prime}$.

Betrachten wir nun zunächst den Fall, dafs die Richtungen sämmtlicher Kräfte parallel mit einander sind. Es werden dann auch die projicirenden Ebenen, und folglich auch die Projektionen parallel mit einander sein; ist z. B. $p'q'$ die Projektion der Kraftrichtung K', so ist offenbar $a'X = R_{\prime}'$, gleich dem kürzesten Abstande der Kraft K', und es fallen daher die Hebelsarme sämmtlicher parallelen Kräfte in Bezug auf eine bestimmte Axe in ein und dieselbe Ebene, welche durch diese Axe geht, und normal zu den Kraftrichtungen ist. Nun gehen auch, unter der Bedingung, dafs die Kraftrichtungen parallel sind, dafs folglich die Neigungswinkel, welche sie mit den drei angenommenen Axen bilden, für alle Kräfte dieselben sind, die Gleichungen 108), nach Ausscheidung der gemeinschaftlichen Faktoren $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, über in:

$$114)\quad \Sigma(KR_{\prime}) = 0;\quad \Sigma(KR_{\prime\prime}) = 0;\quad \Sigma(KR_{\prime\prime\prime}) = 0.$$

Denken wir durch die Axe X eine Ebene nX gelegt, welche die projicirenden Ebenen der Kraftrichtungen unter einem beliebigen Winkel φ schneidet, so sieht man leicht, dafs die Hebelsarme

$$R_{\prime} = Xa = Xn\,.\sin\varphi;\quad R_{\prime}' = Xa' = Xn'\,.\sin\varphi$$

etc. sind. Setzen wir diese Werthe in die Gleichung 114), so folgt, indem man mit dem gemeinschaftlichen Faktor $\sin\varphi$ dividirt,

$$\Sigma(K\,.\,Xn) = 0 \text{ etc.},$$

d. h. man kann, wenn die Kraftrichtungen parallel sind, anstatt der kürzesten Entfernungen von den Drehaxen, auch beliebig andere Abstände der projicirenden Ebene von den Drehaxen einführen, wenn dieselben nur sämmtlich zur Drehaxe normal und unter sich parallel sind.

Legt man durch die Axe X eine Ebene MN, welche parallel mit den projicirenden Ebenen ist, so folgt leicht, dafs wenn q, q'... die Angriffspunkte der parallelen Kräfte sind, die Abstände $qo = aX = R_{\prime}$ $q'o' = a'X = R_{\prime}'$.... zu setzen sind. Bezeichnet man mit x, x', x'' etc. die Abstände der Angriffspunkte der parallelen Kräfte von einer Ebene, die mit ihrer Richtung parallel ist, so folgt aus Gleichung 114) auch:

$$\Sigma(Kx) = 0 \text{ etc.}$$

Sind die Kraftrichtungen zwar unter sich parallel, aber nicht parallel mit der Ebene in Bezug auf welche die Abstände ihrer Angriffspunkte x, x', x''... gegeben sind, sondern bilden sie mit derselben einen beliebigen Winkel ψ, so kann man offenbar für jede der einzelnen Kräfte K, K', K'' etc. immer zwei andere substituiren, welche wir mit $K_{\prime}$ und $K_{\prime\prime}$, $K'_{\prime}$ und $K'_{\prime\prime}$ etc. bezeichnen wollen; und von denen die Kräfte $K_{\prime}$, $K'_{\prime}$ parallel, die Kräfte $K_{\prime\prime}$, $K'_{\prime\prime}$... normal zu der Ebene sind. Durch diese Substitution wird offenbar das Gleichgewicht nicht geändert; und es gilt dann in Bezug auf die mit der Ebene parallelen Kräfte die Gleichung:

$$\Sigma(K_{\prime}x) = 0.$$

Es ist aber offenbar $K_{\prime} = K \cdot \cos\psi$, $K'_{\prime} = K' \cdot \cos\psi$ etc. Setzen wir diese Werthe für $K_{\prime}$, $K'_{\prime}$ etc. ein, so geht die Gleichung über in:

$$\Sigma(K \cdot \cos\psi \cdot x) = 0,$$

und da $\cos\psi$ allen Summanden gemeinschaftlich ist, so folgt auch:

$$115)\ \Sigma(K \cdot x) = 0.$$

Diese wichtige Gleichung drückt folgendes Gesetz aus:

Wenn auf ein festes System beliebig viele Kräfte wirken, deren Richtungslinien parallel sind und die Kräfte sind in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht, so ist die Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man jede Kraft mit dem normalen Abstand ihres Angriffspunktes von einer beliebig gegebenen Ebene multiplicirt, gleich Null.

Sind die Kräfte unter sich parallel, und denken wir drei beliebige Ebenen, welche unter einander normal sind (Koordinaten-Ebenen), so gilt das Gesetz für alle drei Koordinaten-Ebenen, und wenn x, x', x''.. die Koordinaten der Angriffspunkte in Bezug auf die erste Ebene, y, y', y'' und z, z', z''.... die Koordinaten in Bezug auf die zweite und dritte Ebene bezeichnen, so hat man für parallele Kräfte, die an einem festen System im Gleichgewicht gegen drehende Bewegung sein sollen, die drei Bedingungs-Gleichungen:

$$116)\ \Sigma(Kx) = 0;\quad \Sigma(Ky) = 0;\quad \Sigma(Kz) = 0.$$

Fügen wir noch die Bedingung der Gleichung 112a) hinzu, welche das Gleichgewicht in Bezug auf fortschreitende Bewegung enthält, so sind die vier Gleichungen:

$$\Sigma(Kx) = 0;\quad \Sigma(Ky) = 0;\quad \Sigma(Kz) = 0$$

und

$$\Sigma(K) = 0.$$

vier Bedingungs-Gleichungen, welche sämmtlich erfüllt werden müssen, wenn parallele Kräfte, die auf ein festes System wirken, in vollkommenem Gleichgewicht sein sollen.

Das Produkt $K.x$ aus dem Druck einer Kraft in den normalen Abstand ihres Angriffspunkts von einer Ebene nennt man das Moment der Kraft in Bezug auf die Ebene. Es ist dieser Ausdruck nicht zu verwechseln mit dem statischen Moment einer Kraft in Bezug auf eine Axe.

Bestimmung des Angriffspunktes der Resultanten von parallelen Kräften, die auf ein festes System wirken; Kräftepaar.

§ 74. Werden die Bedingungs-Gleichungen 116) erfüllt, aber nicht 112a), so rückt das feste System geradlinig fort, ohne dafs eine Drehung erfolgt; die Resultante der fortschreitenden Bewegung läfst sich dann durch die Gleichungen 112 und 113) der Gröfse und Richtung nach bestimmen. Will man nun auch Gleichgewicht gegen die fortschreitende Bewegung herstellen, so mufs man eine Kraft Q, die gleich dieser Resultante ist, also

$$Q = \Sigma(K)$$

in entgegengesetzter Richtung der Resultanten auf das System wirken lassen; allein sobald man diese Kraft einführt, wird zwar die fortschreitende Bewegung aufgehoben, aber es ist denkbar, dafs nun die Bedingungs-Gleichungen gegen die drehende Bewegung dadurch gestört werden. Soll gleichwohl das Gleichgewicht gegen drehende Bewegung bestehen bleiben, so ist der Angriffspunkt dieser Kraft nicht mehr beliebig (vergl. S. 99), sondern, wenn X, Y, Z die Koordinaten desselben sind, so mufs zufolge der Gleichung 116) die Bedingung erfüllt werden:

$$\Sigma(Kx) - QX = 0$$
$$\Sigma(Ky) - QY = 0$$
$$\Sigma(Kz) - QZ = 0,$$

daraus folgen die Koordinaten für den Angriffspunkt der Resultanten paralleler Kräfte, unter der Voraussetzung, dafs in dem System keine drehende Bewegung statt finden soll:

$$117)\quad \begin{cases} X = \dfrac{\Sigma(Kx)}{Q} = \dfrac{\Sigma(Kx)}{\Sigma(K)} \\[2ex] Y = \dfrac{\Sigma(Ky)}{Q} = \dfrac{\Sigma(Ky)}{\Sigma(K)} \\[2ex] Z = \dfrac{\Sigma(Kz)}{Q} = \dfrac{\Sigma(Kz)}{\Sigma(K)}. \end{cases}$$