tirenden Drucke in dem ersten Angriffspunkt nach der Richtung der ersten Axe sind dann $\Sigma(K . \cos\alpha)$, im zweiten Angriffspunkt $\Sigma(K' . \cos\alpha')$, im dritten $\Sigma(K'' . \cos\alpha'')$ etc., ebenso lassen sich die in den einzelnen Angriffspunkten wirkenden resultirenden Drucke für die beiden andern Axen bestimmen, und es folgt aus der Gleichung 105) als Bedingung des Gleichgewichts gegen fortschreitende Bewegung:

$$107)\quad \begin{cases} \Sigma(K . \cos\alpha) = 0 \\ \Sigma(K . \cos\beta) = 0 \\ \Sigma(K . \cos\gamma) = 0. \end{cases}$$

Die Komponenten der Kräfte in Ebenen, welche zu den angenommenen Axen normal sind, drücken sich aus durch $K . \sin\alpha$, $K' . \sin\alpha'$, $K'' . \sin\alpha'' \ldots$ für die Ebenen normal zur ersten Axe; durch $K . \sin\beta \ldots$ und durch $K . \sin\gamma \ldots$ für die Ebenen normal zur zweiten und dritten Axe, und es folgt für die Bedingung des Gleichgewichts gegen drehende Bewegung aus Gleichung 106a) für alle drei Axen:

$$108)\quad \begin{cases} \Sigma(K . \sin\alpha . R_{\prime}) = 0 \\ \Sigma(K . \sin\beta . R_{\prime\prime}) = 0 \\ \Sigma(K . \sin\gamma . R_{\prime\prime\prime}) = 0, \end{cases}$$

worin $R_{\prime}$, $R_{\prime\prime}$, $R_{\prime\prime\prime}$ die kürzesten Entfernungen der Richtungslinien der einzelnen Kräfte von der ersten, zweiten und dritten Axe bezeichnen.

Die Gleichungen 107 und 108):

$$\Sigma(K . \cos\alpha) = 0; \quad \Sigma(K . \cos\beta) = 0; \quad \Sigma(K . \cos\gamma) = 0,$$

und

$$\Sigma(K . \sin\alpha . R_{\prime}) = 0; \quad \Sigma(K . \sin\beta . R_{\prime\prime}) = 0; \quad \Sigma(K . \sin\gamma . R_{\prime\prime\prime}) = 0$$

stellen sechs Bedingungs-Gleichungen dar, welche erfüllt werden müssen, wenn vollständiges Gleichgewicht der verschiedenen auf ein festes System wirkenden Kräfte vorhanden sein soll.

Bestimmung der Resultanten der fortschreitenden Bewegung für Kräfte, die unter beliebigen Winkeln auf ein festes System wirken.

§ 71. Da nun jede Kraft in einem festen System, an welchem Gleichgewicht statt findet, als die Gegenkraft aller übrigen sich ansehen läfst, so können wir nach den oben gefundenen Gesetzen leicht die Gröfse, die Richtung und den Angriffspunkt der Resultanten von Kräften bestimmen, die nicht im Gleichgewicht sind. Wir wollen zuerst die Untersuchung führen in Bezug auf die Resultante der fortschreitenden Bewegung, dann in Bezug auf die Resultante der drehenden Bewegung, und endlich zu bestimmen suchen, in welchen Fällen das System nur eine Resultante hat, oder mit andern Worten, in welchen Fällen die Resultanten gegen die fortschreitende und gegen die drehende Bewegung der Richtung und Gröfse nach zusammenfallen können.

Bezeichnen wir mit Q die Resultante gegen die fortschreitende Bewegung, mit A, B, Γ die Winkel, welche ihre Richtung mit den drei Axen macht, so wird, wenn vorhin nicht Gleichgewicht vorhanden war, dieses eintreten, sobald eine der Resultante gleiche, aber der Richtung nach entgegengesetzte Kraft auf das System einwirkt; es werden dann die Bedingungs-Gleichungen 107) erfüllt werden, und zwar werden sie die Form annehmen:

$$109)\quad \begin{cases} \Sigma(K.\cos\alpha) - Q.\cos A = 0 \\ \Sigma(K.\cos\beta) - Q.\cos B = 0 \\ \Sigma(K.\cos\gamma) - Q.\cos\Gamma = 0. \end{cases}$$

Zur Bestimmung der vier unbekannten Werthe Q, A, B, Γ haben wir noch die vierte Gleichung, die durch die Bedingung gegeben ist, dafs die drei Winkel A, B, Γ von einer Linie mit drei andern gebildet werden, welche letztere unter einander rechte Winkel machen. Für diesen Fall ist nämlich nach einem bekannten Satze:

$$(\cos A)^2 + (\cos B)^2 + (\cos\Gamma)^2 = 1.$$

Aus diesen vier Gleichungen folgt zunächst durch eine leichte arithmetische Operation:

$$Q^2 = [\Sigma(K.\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K.\cos\beta)]^2 + [\Sigma(K.\cos\gamma)]^2,$$

folglich die Resultante sämmtlicher Kräfte der Gröfse nach:

$$110)\quad Q = \sqrt{\{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K.\cos\beta)]^2 + [\Sigma(K.\cos\gamma)]^2\}},$$

ferner:

$$111)\quad \begin{cases} \cos A = \dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha)}{Q} \\ \cos B = \dfrac{\Sigma(K.\cos\beta)}{Q} \\ \cos\Gamma = \dfrac{\Sigma(K.\cos\gamma)}{Q}. \end{cases}$$

Vergleichen wir diese beiden Gleichungen mit den Gleichungen 66 und 67) § 33. S. 37, so ergiebt sich durch eine sehr einfache Betrachtung, dafs die Resultirende der fortschreitenden Bewegung der Gröfse und Richtung nach ganz in derselben Weise gefunden wird, als ob die in den verschiedenen Angriffspunkten wirkenden Drucke parallel mit ihren ursprünglichen Richtungen an einen einzigen Punkt getragen würden, und man nun den resultirenden Druck aus allen diesen Drucken zusammensetzte.

Für die fortschreitende Bewegung läfst sich hiernach immer eine Resultante finden, da es aber nur darauf ankommt, die Bedingungen der Gleichungen 109) zu erfüllen, so ist der Angriffspunkt der Resultanten in Bezug auf fortschreitende Bewegung ganz gleichgültig, ja wir können die Resultante gegen fortschreitende Bewegung in jedem beliebigen Punkte des Systems angreifend denken, oder aber wir können anstatt der einen Resultanten uns auch mehre resultirende Kräfte denken, welche zusammen wirkend die Bedingungs-Gleichungen erfüllen. Sobald wir also an einem festen System beliebig viele Kräfte wirkend haben, welche nicht im Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung sind, so wird ein solches Gleichgewicht eintreten, sobald wir eine oder mehre Gegenkräfte anbringen, welche die Bedingungen der Gleichungen 109) erfüllen; in welchen Punkten wir diese Kräfte angreifen lassen, ist in Bezug auf fortschreitende Bewegung ganz gleichgiltig; nicht so in Betreff der drehenden Bewegung.

Bestimmung der Resultanten der fortschreitenden Bewegung für Kräfte, deren Richtungslinien parallel sind.

§ 72. Wenn die Richtungen sämmtlicher Kräfte parallel sind, so bilden sie sämmtlich dieselben Winkel mit den drei Axen; es werden also die Faktoren $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ in den Gleichungen 110 und 111) gemeinschaftliche, und es geht für diesen Fall die Gleichung 110) über in:

$$Q = \sqrt{\left\{[\Sigma(K)]^2\,[\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2]\right\}}$$

und zufolge des bekannten Gesetzes $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$ hat man:

$$112)\quad Q = \Sigma(K),$$

folglich auch, wenn man diese Werthe in die Gleichungen 111) einsetzt:

$$113)\quad \begin{cases} \cos A = \cos\alpha \\ \cos B = \cos\beta \\ \cos\Gamma = \cos\gamma, \end{cases}$$

für parallele Kräfte ist also die Resultante gegen fortschreitende Bewegung gleich der Summe der sämmtlichen Kräfte, und die Richtung der Resultante ist parallel mit der Richtung der einzelnen Kräfte.