oder drehende Verrückung ertheilt, die Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man jeden einzelnen Druck mit der Projektion des Wegelements (welches sein Angriffspunkt bei dieser Verrückung durchläuft) auf die Richtung der einzelnen Drucke multiplizirt, gleich Null sein.

In allen Fällen, wo die in endlichen Zeiten durchlaufenen Wege der Angriffspunkte sich verhalten, wie die unendlich kleinen Wege, gilt das Gesetz auch für endliche Verrückungen des festen Systems.

Suchen wir nunmehr die eben entwickelten allgemeinen Gesetze auf besondere Fälle anzuwenden, und daraus Folgerungen zu ziehen, welche in vielen Fällen die Betrachtung vereinfachen.

Bedingungen des Gleichgewichtes für Kräfte, die auf ein festes System wirken.

§ 70. Wirken beliebig viele Kräfte auf ein festes System, und es soll vollkommenes Gleichgewicht statt finden, so müssen nach § 67 zwei Bedingungen erfüllt werden:

1) Es mufs für jede fortschreitende Bewegung die Leistung der Resultirenden Null sein; und:

2) Es mufs für jede drehende Bewegung die Leistung der Resultirenden Null sein.

Es mufs also die Gleichung 104) sowohl für jede fortschreitende Bewegung, als auch für jede drehende Bewegung erfüllt werden. Wird nur eine von beiden Bedingungen erfüllt, so ist unvollkommenes Gleichgewicht vorhanden.

Sind beliebige Kräfte, die auf ein festes System wirken, im Gleichgewicht, so läfst sich jede als die Gegenkraft aller übrigen ansehen. (Vergl. §. 35. No. 2).

Um zu zeigen, dafs die Leistung für jede beliebige Richtung in Bezug auf fortschreitende Bewegung gleich Null ist, genügt es, zu zeigen, dafs sie für drei zu einander normale Richtungen gleich Null ist, und um zu zeigen, dafs die resultirende Leistung für jede beliebige Drehung gleich Null sei, genügt es zu zeigen, dafs sie für drei zu einander normale Axen gleich Null sei. (Vergl. § 48. S. 58).

Wenn nach irgend einer Richtung keine fortschreitende Bewegung statt finden soll, so mufs, wenn K, K', K'', K''' .... die resultirenden Drucke für diese Richtung, ds, ds', ds'' ... aber die

Wegelemente sind, welche von den Angriffspunkten gleichzeitig durchlaufen werden, zufolge Gleichung 104) sein für diese Richtung:

$$\Sigma(K \,.\, ds) = 0,$$

nun sind bei der fortschreitenden Bewegung die Wegelemente der einzelnen Angriffspunkte alle gleich grofs (§ 65. S. 88), es folgt also als Bedingung für das Gleichgewicht in Bezug auf fortschreitende Bewegung nach irgend einer Richtung:

$$105)\ \Sigma(K) = 0,$$

d. h. es mufs die Summe sämmtlicher resultirenden Drucke für diese Richtung gleich Null sein.

Wenn in Bezug auf drehende Bewegung um irgend eine Axe Gleichgewicht vorhanden sein soll, so mufs auch die Gleichung 104) erfüllt werden. Nennen wir $R_{\prime}$, $R_{\prime\prime}$, $R_{\prime\prime\prime}$ . . . die Halbmesser der Krümmungskreise der Wegelemente, welche die einzelnen Angriffspunkte bei der Drehung um jene Axe beschreiben würden, oder, was dasselbe sagt, die normalen Abstände der Angriffspunkte von der Drehungsaxe, $K_{\prime}$, $K_{\prime\prime}$, $K_{\prime\prime\prime}$ . . . . die resultirenden Drucke nach der Richtung der Wegelemente, welche die Angriffspunkte durchlaufen würden, und bemerken wir, dafs die einzelnen Wegelemente sich ausdrücken durch $ds_{\prime} = C' \,.\, dt$, wenn C' . . . die Geschwindigkeiten bedeuten (Gleichung 24. S. 17) oder, da $C' = wR_{\prime}$ (Gleichung 80. S. 51) wenn w . . . die Winkel-Geschwindigkeiten bezeichnen, durch $ds_{\prime} = wR_{\prime}dt$, so folgt für die Gleichung 104) in Bezug auf Drehung folgende Gestalt:

$$\Sigma(K_{\prime}ds_{\prime}) = \Sigma(K_{\prime}wR_{\prime}dt) = 0,$$

und da dt ein gemeinschaftlicher Faktor, w aber ebenfalls allen Summanden gemeinschaftlich ist, insofern alle Angriffspunkte sich nur mit derselben Winkel-Geschwindigkeit bewegen können (§. 65. S. 86), so folgt als Bedingung des Gleichgewichts in Bezug auf Drehung um irgend eine Axe:

$$106)\ \Sigma(K_{\prime}R_{\prime}) = 0,$$

worin $K_{\prime}$ den resultirenden Druck in jedem Angriffspunkt bezeichnet, in einer Richtung, welche in einer durch den Angriffspunkt gehenden, zur Drehaxe normalen Ebene liegt, und zu dem Halbmesser $R_{\prime}$ normal ist.

Zerlegt man die sämmtlichen in ein und demselben Angriffspunkt wirkenden Drucke nach zwei Richtungen, von denen eine parallel mit der angenommenen Drehaxe ist, die andere aber in jene normale Ebene fällt, so erscheint offenbar der Druck $K_{\prime}$ auch als der resultirende Druck aus allen diesen in der genannten Ebene liegenden Drucken, und das Produkt $K_{\prime}R_{\prime}$ erscheint als das statische

Moment dieses resultirenden Druckes (§ 50. S. 60). Es gilt dann das Gesetz des § 51, d. h. man kann setzen:

$$K_{\prime}R_{\prime} = \Sigma(K_{\prime}'R_{\prime}'),$$

wenn man unter $K_{\prime}'$, $K_{\prime}''$, $K_{\prime}'''$.... die Komponenten sämmtlicher in demselben Angriffspunkt wirkender Kräfte in Bezug auf eine, zur Drehaxe normale Ebene versteht, und wenn $R_{\prime}'$, $R_{\prime}''$, $R_{\prime}'''$ etc. die Hebelsarme dieser Komponenten, oder die Normalen bezeichnen, welche man von dem Durchschnittspunkt der Drehaxe mit der Ebene auf die Richtung der Drucke $K_{\prime}'$, $K_{\prime}''$, $K_{\prime}'''$.... ziehen kann. Demnächst geht die Gleichung 106) über in:

$$106\text{a)}\quad \Sigma(K_{\prime}'R_{\prime}') = 0,$$

d. h. wenn in Bezug auf Drehung um eine gewisse Axe Gleichgewicht bestehen soll, und man zerlegt die sämmtlichen in den einzelnen Angriffspunkten wirkenden Kräfte nach je zwei Richtungen, von denen die einen parallel mit der Drehaxe sind, die andern aber in Ebenen liegen, welche normal zu der Drehaxe sind und durch den Angriffspunkt der einzelnen Kräfte gehen, so mufs die Summe der statischen Momente dieser letztgenannten Komponenten in Bezug auf die Durchschnittspunkte ihrer Ebenen mit der Drehaxe gleich Null sein.

Nun ist aber zu bemerken, dafs der Hebelsarm $R'_{\prime}$ die Normale ist, welche man von der Drehaxe auf die in der zur Drehaxe normalen Ebene liegende Komponente ziehen kann, diese Normale giebt aber zugleich den Abstand einer Ebene, welche mit der Drehaxe parallel ist, und durch die Komponente geht; in dieser hier erwähnten Ebene liegt aber auch die ursprüngliche Kraftrichtung, da ja diese Kraftrichtung mit ihren Komponenten in einer und derselben Ebene liegen mufs, die eine Komponente aber die eben erwähnte, die andere dagegen mit der Drehaxe parallel ist; es stellt also die Normale $R'_{\prime}$ den Abstand der Drehaxe von einer Ebene dar, welche mit derselben parallel durch die ursprüngliche Kraftrichtung gelegt ist, oder mit andern Worten, es ist der Hebelsarm $R'_{\prime}$ der Komponente, welche auf Drehung um irgend eine Axe wirkt, nichts anders, als die kürzeste Entfernung der ursprünglichen Kraftrichtung von dieser Drehaxe.

Nach diesen Darstellungen ist es nun nicht schwer die Bedingungen für das vollkommene Gleichgewicht mehrer auf ein festes System wirkender Kräfte aufzustellen.

Zunächst denken wir ein festes Axensystem, es seien α, β, γ; α', β', γ' etc. die Winkel, welche die in den verschiedenen Angriffspunkten wirksamen Kräfte mit den Axen bilden. Die resultirenden Drucke in dem ersten Angriffspunkt nach der Richtung der ersten Axe sind dann $\Sigma(K\,.\cos\alpha)$, im zweiten Angriffspunkt $\Sigma(K'\,.\cos\alpha')$, im dritten $\Sigma(K''\,.\cos\alpha'')$ etc., ebenso lassen sich die in den einzelnen Angriffspunkten wirkenden resultirenden Drucke für die beiden andern Axen bestimmen, und es folgt aus der Gleichung 105) als Bedingung des Gleichgewichts gegen fortschreitende Bewegung:

$$107)\quad\begin{cases}\Sigma(K\,.\cos\alpha)=0\\ \Sigma(K\,.\cos\beta)=0\\ \Sigma(K\,.\cos\gamma)=0.\end{cases}$$

Die Komponenten der Kräfte in Ebenen, welche zu den angenommenen Axen normal sind, drücken sich aus durch $K\,.\sin\alpha$, $K'\,.\sin\alpha'$, $K''\,.\sin\alpha''\ldots$ für die Ebenen normal zur ersten Axe; durch $K\,.\sin\beta\ldots$ und durch $K\,.\sin\gamma\ldots$ für die Ebenen normal zur zweiten und dritten Axe, und es folgt für die Bedingung des Gleichgewichts gegen drehende Bewegung aus Gleichung 106a) für alle drei Axen:

$$108)\quad\begin{cases}\Sigma(K\,.\sin\alpha\,.R_{\prime})=0\\ \Sigma(K\,.\sin\beta\,.R_{\prime\prime})=0\\ \Sigma(K\,.\sin\gamma\,.R_{\prime\prime\prime})=0,\end{cases}$$

worin $R_{\prime}$, $R_{\prime\prime}$, $R_{\prime\prime\prime}$ die kürzesten Entfernungen der Richtungslinien der einzelnen Kräfte von der ersten, zweiten und dritten Axe bezeichnen.

Die Gleichungen 107 und 108):

$$\Sigma(K\,.\cos\alpha)=0;\quad \Sigma(K\,.\cos\beta)=0;\quad \Sigma(K\,.\cos\gamma)=0,$$

und

$$\Sigma(K.\sin\alpha.R_{\prime})=0;\quad \Sigma(K.\sin\beta.R_{\prime\prime})=0;\quad \Sigma(K.\sin\gamma.R_{\prime\prime\prime})=0$$

stellen sechs Bedingungs-Gleichungen dar, welche erfüllt werden müssen, wenn vollständiges Gleichgewicht der verschiedenen auf ein festes System wirkenden Kräfte vorhanden sein soll.

Bestimmung der Resultanten der fortschreitenden Bewegung für Kräfte, die unter beliebigen Winkeln auf ein festes System wirken.

§ 71. Da nun jede Kraft in einem festen System, an welchem Gleichgewicht statt findet, als die Gegenkraft aller übrigen sich ansehen läfst, so können wir nach den oben gefundenen Gesetzen leicht die Gröfse, die Richtung und den Angriffspunkt der Resultanten von Kräften bestimmen, die nicht im Gleichgewicht sind. Wir wollen zuerst die Untersuchung führen in Bezug auf die Resultante der fortschreitenden Bewegung, dann in Bezug auf die Resultante