Dieses wichtige Gesetz haben wir hier als Grundsatz aufgestellt. Es bedarf auch in der That keines Beweises, da es unmittelbar aus der Betrachtung fliefst, dafs die Wirkung irgend einer Kraft nur durch eine eben so grofse und entgegengesetzte Wirkung aufgehoben werden kann, dafs ferner, wenn das System eine Bewegungsänderung erführe, dies nur durch die in den einzelnen Angriffspunkten wirksamen Kräfte geschehen könne; und dafs endlich die Wirkungsgröfsen dieser Kräfte nach den Richtungen hin, nach welchen sie ihre Angriffspunkte wirklich bewegen, sich summiren müssen.

Anwendung des Prinzips der virtuellen Wege auf Kräfte, die auf ein festes System wirken.

§ 69. Bezeichnet nun K den Druck der Resultirenden für irgend eine der Bewegungen, welche das System annehmen kann; dS das Wegelement, welches der Angriffspunkt dieses Drucks durchlaufen mufs, K', K'', K'''.... seien die resultirenden Drucke für verschiedene Angriffspunkte nach der Richtung, in welcher die Bewegung des Systems erfolgt, und ds', ds'', ds''' seien die Wegelemente, welche sie bei dieser Bewegung durchlaufen, so ist offenbar in Folge des Gesetzes No. 2 in § 68:

$$101)\quad K.dS = K'.ds' + K''.ds'' + K'''.ds''' + \ldots = \Sigma(K'.ds'),$$

folglich:

$$101\,a)\quad \Sigma(K'ds') - K.dS = 0,$$

welche Gleichung den Fall des Gleichgewichts bezeichnet, indem $-K.dS$ das Leistungselement der Gegenkraft ausdrückt. — Diese Gleichungen gelten übrigens ganz allgemein, sowohl wenn das System eine fortschreitende Bewegung erfährt, als auch für eine drehende Bewegung, wenn nämlich dS, ds'.... die unendlich kleinen Wege sind, welche durch Drehung durchlaufen werden, und welche immer für ein Zeitelement als geradlinigt betrachtet werden können.

Nun läfst sich aber für jeden Angriffspunkt das Gesetz der virtuellen und reellen Wege anwenden § 46. S. 54. Nehmen wir nämlich in der Richtung der resultirenden Drucke, welche in den verschiedenen Angriffspunkten wirksam sind, beliebige Abstände von den Angriffspunkten selbst, und es seien a', a'', a'''.... diese Abstände, denken wir nun, K' sei der resultirende Druck von einer Menge anderer Drucke $K'_{,}$, $K'_{,,}$, $K'_{,,,}$...., die in demselben Angriffspunkte wirken, und wir projiciren den Abstand a' auf die Richtungen dieser Drucke, so dafs $a'_{,}$, $a'_{,,}$, $a'_{,,,}$.... die Projektionen werden; mit den übrigen Drucken, welche in den andern Angriffspunkten wirken, machen wir es ebenso, dann folgt nach Gleichung 82):

$$K'a' = K'_{,}a'_{,} + K'_{,,}a'_{,,} + K'_{,,,}a'_{,,,} + \ldots = \Sigma(K'_{,}a'_{,}),$$

$$K' = \Sigma\left(\frac{K'_{,}a'_{,}}{a'}\right),$$

setzen wir diesen Werth in die Gleichung **101)**, so folgt:

$$102)\ K.dS = \Sigma\left(K'_{,}a'_{,}.\frac{ds'}{a'}\right).$$

Da der Abstand a' ein beliebiger ist, so können wir auch $a' = ds'$, d. h. wir können a' für jeden Angriffspunkt gleich dem Wegelement dieses Angriffspunkts nehmen, bezeichnen wir dann die Projektion des Wegelements ds' auf die Richtung der verschiedenen in demselben Angriffspunkt wirkenden Kräfte mit $ds'_{,}$, $ds'_{,,}\ldots$, so folgt:

$$103)\ K.dS = \Sigma(K'_{,}ds'_{,}).$$

Diese Gleichung lehrt das Prinzip der virtuellen Wege auf Kräfte anwenden, welche auf ein festes System wirken. Sie heifst in Worten:

> Wenn auf ein festes System beliebige Kräfte einwirken, und das System erleidet in irgend einem Augenblick eine unendlich kleine Bewegung, gleichviel wie dieselbe beschaffen ist, so ist das Produkt aus dem Druck der Resultirenden in das Wegelement ihres Angriffspunkts gleich der Summe der Produkte, welche man erhält, indem man jeden einzelnen Druck, der auf das System wirkt, multiplizirt mit der Projektion des Wegelements (welches sein Angriffspunkt bei dieser Bewegung durchläuft) auf die Richtung des Drukkes; wobei die Vorzeichen nach § 49 zu bestimmen sind.

Für den Zustand des Gleichgewichts gilt die Gleichung 101 a):

$$\Sigma(K'ds') - K.dS = 0,$$

oder da KdS hier keine andere Rolle spielt, als $K'ds'$ etc. auch:

$$104)\ \Sigma(K.dS) = 0,$$

und es folgt, wie sich für diesen Fall sehr leicht entwickeln läfst, das Gesetz in folgender Form:

> Wenn auf ein festes System beliebig viel Kräfte wirken, und dieselben sind im Gleichgewicht, so mufs, wenn man dem ganzen System eine beliebige unendlich kleine, sei es fortschreitende

oder drehende Verrückung ertheilt, die Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man jeden einzelnen Druck mit der Projektion des Wegelements (welches sein Angriffspunkt bei dieser Verrückung durchläuft) auf die Richtung der einzelnen Drucke multiplizirt, gleich Null sein.

In allen Fällen, wo die in endlichen Zeiten durchlaufenen Wege der Angriffspunkte sich verhalten, wie die unendlich kleinen Wege, gilt das Gesetz auch für endliche Verrückungen des festen Systems.

Suchen wir nunmehr die eben entwickelten allgemeinen Gesetze auf besondere Fälle anzuwenden, und daraus Folgerungen zu ziehen, welche in vielen Fällen die Betrachtung vereinfachen.

Bedingungen des Gleichgewichtes für Kräfte, die auf ein festes System wirken.

§ 70. Wirken beliebig viele Kräfte auf ein festes System, und es soll vollkommenes Gleichgewicht statt finden, so müssen nach § 67 zwei Bedingungen erfüllt werden:

1) Es mufs für jede fortschreitende Bewegung die Leistung der Resultirenden Null sein; und:
2) Es mufs für jede drehende Bewegung die Leistung der Resultirenden Null sein.

Es mufs also die Gleichung 104) sowohl für jede fortschreitende Bewegung, als auch für jede drehende Bewegung erfüllt werden. Wird nur eine von beiden Bedingungen erfüllt, so ist unvollkommenes Gleichgewicht vorhanden.

Sind beliebige Kräfte, die auf ein festes System wirken, im Gleichgewicht, so läfst sich jede als die Gegenkraft aller übrigen ansehen. (Vergl. §. 35. No. 2).

Um zu zeigen, dafs die Leistung für jede beliebige Richtung in Bezug auf fortschreitende Bewegung gleich Null ist, genügt es, zu zeigen, dafs sie für drei zu einander normale Richtungen gleich Null ist, und um zu zeigen, dafs die resultirende Leistung für jede beliebige Drehung gleich Null sei, genügt es zu zeigen, dafs sie für drei zu einander normale Axen gleich Null sei. (Vergl. § 48. S. 58).

Wenn nach irgend einer Richtung keine fortschreitende Bewegung statt finden soll, so mufs, wenn K, K', K'', K'''.... die resultirenden Drucke für diese Richtung, ds, ds', ds''... aber die