auf ein System angebrachten Kräfte, dann die in dem System thätigen Kräfte einer nähern Betrachtung unterziehen.

Von den auf ein festes System angebrachten Kräften.

Vollkommenes, unvollkommenes Gleichgewicht — Gegenkraft, Mittelkraft (Resultirende) mehrer auf ein festes System wirkenden Kräfte.

§ 67. Wirken beliebige Kräfte auf ein festes System, so ertheilen sie im Allgemeinen jedem Punkte desselben, wie wir oben gesehen haben, eine fortschreitende und eine drehende Bewegung. Wir sagen, die Kräfte, welche auf ein System wirken, seien in irgend einem Augenblick in vollkommenem Gleichgewicht, wenn sie dem System keine Bewegung, oder den einzelnen Massenelement keinen Geschwindigkeitszuwachs in diesem Augenblick ertheilen. Wenn dagegen die Kräfte dem System zwar keine fortschreitende, aber eine drehende Bewegung ertheilen, oder wenn sie zwar keine drehende, aber eine fortschreitende Bewegung bewirken, so sagen wir, es finde theilweises oder unvollkommenes Gleichgewicht statt, und bezeichnen den erstgenannten Fall als Gleichgewicht gegen fortschreitende, den andern Fall als Gleichgewicht gegen drehende Bewegung.

Sind mehre Kräfte, welche auf ein System wirken, nicht im Gleichgewicht, und es kann eine neue Kraft auf das System wirkend gedacht werden, durch deren Einwirkung Gleichgewicht statt finden würde, so nennen wir diese Kraft die Gegenkraft des Systems von Kräften. Denken wir in dem Angriffspunkt der Gegenkraft eine Kraft wirkend, welche derselben der Richtung nach gleich aber entgegengesetzt ist, so nennen wir diese die Mittelkraft, oder die Resultirende des ganzen Systems; denn offenbar würde die Wirkung der einzelnen in den verschiedenen Angriffspunkten wirkenden Kräfte durch die Wirkung dieser Mittelkraft substituirt werden können, das heifst, es würde die Wirkung auf das feste System dieselbe bleiben, wenn wir anstatt der einzelnen Kräfte die Mittelkraft in dem bestimmten Angriffspunkt allein wirksam denken.

Es folgt aus dieser Darstellung jedoch durchaus nicht, dafs für jedes feste System, auf welches beliebige Kräfte einwirken, jedesmal nur **eine** Mittelkraft wirklich denkbar sei; es kann vielmehr die fortschreitende Bewegung des Systems eine andere und in einem andern Angriffspunkt wirksame Gegenkraft bedingen, als die drehende Bewegung, ja es läfst sich oft die drehende Bewegung, welche die Kräfte dem System ertheilen, gar nicht durch eine einzige Gegenkraft im Gleichgewicht erhalten. Wir können demgemäfs unterscheiden eine Resultirende der fortschreitenden Bewegung, und eine Resultirende der drehenden Bewegung des Systems, indem wir unter jener eine solche Kraft verstehen, die, wenn sie in entgegengesetzter Richtung in ihrem Angriffspunkte wirkte, Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung, und unter der letztgenannten eine solche Kraft verstehen, welche, wenn sie an ihrem Angriffspunkt in entgegengesetzter Richtung wirkte, Gleichgewicht gegen drehende Bewegung herstellen würde.

Grundsätze für die Wirkung mehrer auf ein festes System angebrachten Kräfte.

§ 68. Bevor wir auf die Bestimmung der Resultirenden der Gröfse und Richtung nach eingehen, stellen wir zunächst folgende Grundsätze auf:

1) Wenn die sämmtlichen auf ein festes System wirkenden Kräfte in ihren Angriffspunkten einzeln im Gleichgewicht sind, so ist das ganze System im vollkommenen Gleichgewicht.

In diesem Falle ist nämlich überhaupt keine mechanische Wirkung auf irgend einen Punkt des Systems vorhanden.

2) Wenn die auf ein festes System wirkenden Kräfte in ihren Angriffspunkten nicht im Gleichgewicht sind, so erfolgt Bewegung des ganzen Systems; die Angriffspunkte der Kräfte legen dabei in irgend einem Augenblicke gewisse Wegelemente zurück; soll nun die Gegenkraft im Stande sein, in dem System Gleichgewicht herzustellen, so mufs nach den ersten Prinzipien von der Wirkung der Kräfte, die Wirkungsgröfse der Gegenkraft gleich und entgegengesetzt sein der Summe sämmtlicher Wirkungsgröfsen, welche sich bilden, indem man in jedem Angriffspunkt den resultirenden Druck (§ 46. S. 54) der in demselben wirkenden Kräfte für die Richtung, nach welcher die Bewegung des Angriffspunktes erfolgt, bestimmt, und diesen Druck mit dem Wegelemente, welches der Angriffspunkt bei der Bewegung durchläuft, multiplicirt (§ 22. S. 27). Dabei ist wohl zu beachten, dafs jedes Produkt negativ zu nehmen ist, für welches der Weg, den der Angriffspunkt durchläuft, der Richtung, in welcher der resultirende Druck für diesen Angriffspunkt wirkt, entgegengesetzt ist, vorausgesetzt nämlich, dafs man diejenigen Produkte positiv nimmt, für welche die Richtung des resultirenden Drucks mit der Richtung, in welcher die Bewegung erfolgt, zusammenfällt.

Dieses wichtige Gesetz haben wir hier als Grundsatz aufgestellt. Es bedarf auch in der That keines Beweises, da es unmittelbar aus der Betrachtung fliefst, dafs die Wirkung irgend einer Kraft nur durch eine eben so grofse und entgegengesetzte Wirkung aufgehoben werden kann, dafs ferner, wenn das System eine Bewegungsänderung erführe, dies nur durch die in den einzelnen Angriffspunkten wirksamen Kräfte geschehen könne; und dafs endlich die Wirkungsgröfsen dieser Kräfte nach den Richtungen hin, nach welchen sie ihre Angriffspunkte wirklich bewegen, sich summiren müssen.

Anwendung des Prinzips der virtuellen Wege auf Kräfte, die auf ein festes System wirken.

§ 69. Bezeichnet nun K den Druck der Resultirenden für irgend eine der Bewegungen, welche das System annehmen kann; dS das Wegelement, welches der Angriffspunkt dieses Drucks durchlaufen mufs, K', K'', K'''.... seien die resultirenden Drucke für verschiedene Angriffspunkte nach der Richtung, in welcher die Bewegung des Systems erfolgt, und ds', ds'', ds''' seien die Wegelemente, welche sie bei dieser Bewegung durchlaufen, so ist offenbar in Folge des Gesetzes No. 2 in § 68:

$$101)\quad K.dS = K'.ds' + K''.ds'' + K'''.ds''' + \ldots = \Sigma(K'.ds'),$$

folglich:

$$101\text{a})\quad \Sigma(K'ds') - K.dS = 0,$$

welche Gleichung den Fall des Gleichgewichts bezeichnet, indem $-K.dS$ das Leistungselement der Gegenkraft ausdrückt. — Diese Gleichungen gelten übrigens ganz allgemein, sowohl wenn das System eine fortschreitende Bewegung erfährt, als auch für eine drehende Bewegung, wenn nämlich dS, ds'.... die unendlich kleinen Wege sind, welche durch Drehung durchlaufen werden, und welche immer für ein Zeitelement als geradlinigt betrachtet werden können.

Nun läfst sich aber für jeden Angriffspunkt das Gesetz der virtuellen und reellen Wege anwenden § 46. S. 54. Nehmen wir nämlich in der Richtung der resultirenden Drucke, welche in den verschiedenen Angriffspunkten wirksam sind, beliebige Abstände von den Angriffspunkten selbst, und es seien a', a'', a'''.... diese Abstände, denken wir nun, K' sei der resultirende Druck von einer Menge anderer Drucke $K'_{\prime}$, $K'_{\prime\prime}$, $K'_{\prime\prime\prime}$...., die in demselben Angriffspunkte wirken, und wir projiciren den Abstand a' auf die Richtungen dieser Drucke, so dafs $a'_{\prime}$, $a'_{\prime\prime}$, $a'_{\prime\prime\prime}$.... die Projektionen werden; mit den übrigen Drucken, welche in den andern Angriffspunkten wirken, machen wir es ebenso, dann folgt nach Gleichung 82):

$$K'a' = K'_{\prime}a'_{\prime} + K'_{\prime\prime}a'_{\prime\prime} + K'_{\prime\prime\prime}a'_{\prime\prime\prime} + \ldots = \Sigma(K'_{\prime}a'_{\prime}),$$

$$K' = \Sigma\left(\frac{K'_{\prime}a'_{\prime}}{a'}\right),$$

setzen wir diesen Werth in die Gleichung **101)**, so folgt:

$$102)\ K.dS = \Sigma\left(K'_{\prime}a'_{\prime}.\frac{ds'}{a'}\right).$$

Da der Abstand a' ein beliebiger ist, so können wir auch $a' = ds'$, d. h. wir können a' für jeden Angriffspunkt gleich dem Wegelement dieses Angriffspunkts nehmen, bezeichnen wir dann die Projektion des Wegelements ds' auf die Richtung der verschiedenen in demselben Angriffspunkt wirkenden Kräfte mit $ds'_{\prime}$, $ds'_{\prime\prime}\ldots$, so folgt:

$$103)\ K.dS = \Sigma(K'_{\prime}ds'_{\prime}).$$

Diese Gleichung lehrt das Prinzip der virtuellen Wege auf Kräfte anwenden, welche auf ein festes System wirken. Sie heifst in Worten:

> Wenn auf ein festes System beliebige Kräfte einwirken, und das System erleidet in irgend einem Augenblick eine unendlich kleine Bewegung, gleichviel wie dieselbe beschaffen ist, so ist das Produkt aus dem Druck der Resultirenden in das Wegelement ihres Angriffspunkts gleich der Summe der Produkte, welche man erhält, indem man jeden einzelnen Druck, der auf das System wirkt, multiplizirt mit der Projektion des Wegelements (welches sein Angriffspunkt bei dieser Bewegung durchläuft) auf die Richtung des Druckes; wobei die Vorzeichen nach § 49 zu bestimmen sind.

Für den Zustand des Gleichgewichts gilt die Gleichung 101 a):

$$\Sigma(K'ds') - K.dS = 0,$$

oder da KdS hier keine andere Rolle spielt, als $K'ds'$ etc. auch:

$$104)\ \Sigma(K.dS) = 0,$$

und es folgt, wie sich für diesen Fall sehr leicht entwickeln läfst, das Gesetz in folgender Form:

> Wenn auf ein festes System beliebig viel Kräfte wirken, und dieselben sind im Gleichgewicht, so mufs, wenn man dem ganzen System eine beliebige unendlich kleine, sei es fortschreitende

oder drehende Verrückung ertheilt, die Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man jeden einzelnen Druck mit der Projektion des Wegelements (welches sein Angriffspunkt bei dieser Verrückung durchläuft) auf die Richtung der einzelnen Drucke multiplizirt, gleich Null sein.

In allen Fällen, wo die in endlichen Zeiten durchlaufenen Wege der Angriffspunkte sich verhalten, wie die unendlich kleinen Wege, gilt das Gesetz auch für endliche Verrückungen des festen Systems.

Suchen wir nunmehr die eben entwickelten allgemeinen Gesetze auf besondere Fälle anzuwenden, und daraus Folgerungen zu ziehen, welche in vielen Fällen die Betrachtung vereinfachen.

Bedingungen des Gleichgewichtes für Kräfte, die auf ein festes System wirken.

§ 70. Wirken beliebig viele Kräfte auf ein festes System, und es soll vollkommenes Gleichgewicht statt finden, so müssen nach § 67 zwei Bedingungen erfüllt werden:

1) Es mufs für jede fortschreitende Bewegung die Leistung der Resultirenden Null sein; und:
2) Es mufs für jede drehende Bewegung die Leistung der Resultirenden Null sein.

Es mufs also die Gleichung 104) sowohl für jede fortschreitende Bewegung, als auch für jede drehende Bewegung erfüllt werden. Wird nur eine von beiden Bedingungen erfüllt, so ist unvollkommenes Gleichgewicht vorhanden.

Sind beliebige Kräfte, die auf ein festes System wirken, im Gleichgewicht, so läfst sich jede als die Gegenkraft aller übrigen ansehen. (Vergl. §. 35. No. 2).

Um zu zeigen, dafs die Leistung für jede beliebige Richtung in Bezug auf fortschreitende Bewegung gleich Null ist, genügt es, zu zeigen, dafs sie für drei zu einander normale Richtungen gleich Null ist, und um zu zeigen, dafs die resultirende Leistung für jede beliebige Drehung gleich Null sei, genügt es zu zeigen, dafs sie für drei zu einander normale Axen gleich Null sei. (Vergl. § 48. S. 58).

Wenn nach irgend einer Richtung keine fortschreitende Bewegung statt finden soll, so mufs, wenn K, K', K'', K''' .... die resultirenden Drucke für diese Richtung, ds, ds', ds'' .. aber die

Wegelemente sind, welche von den Angriffspunkten gleichzeitig durchlaufen werden, zufolge Gleichung 104) sein für diese Richtung:

$$\Sigma(K.ds) = 0,$$

nun sind bei der fortschreitenden Bewegung die Wegelemente der einzelnen Angriffspunkte alle gleich grofs (§ 65. S. 88), es folgt also als Bedingung für das Gleichgewicht in Bezug auf fortschreitende Bewegung nach irgend einer Richtung:

$$105)\ \Sigma(K) = 0,$$

d. h. es mufs die Summe sämmtlicher resultirenden Drucke für diese Richtung gleich Null sein.

Wenn in Bezug auf drehende Bewegung um irgend eine Axe Gleichgewicht vorhanden sein soll, so mufs auch die Gleichung 104) erfüllt werden. Nennen wir $R_{\prime}$, $R_{\prime\prime}$, $R_{\prime\prime\prime}$ . . . die Halbmesser der Krümmungskreise der Wegelemente, welche die einzelnen Angriffspunkte bei der Drehung um jene Axe beschreiben würden, oder, was dasselbe sagt, die normalen Abstände der Angriffspunkte von der Drehungsaxe, $K_{\prime}$, $K_{\prime\prime}$, $K_{\prime\prime\prime}$ . . . . die resultirenden Drucke nach der Richtung der Wegelemente, welche die Angriffspunkte durchlaufen würden, und bemerken wir, dafs die einzelnen Wegelemente sich ausdrücken durch $ds_{\prime} = C'.dt$, wenn C'. . . die Geschwindigkeiten bedeuten (Gleichung 24. S. 17) oder, da $C' = wR_{\prime}$ (Gleichung 80. S. 51) wenn w . . . die Winkel-Geschwindigkeiten bezeichnen, durch $ds_{\prime} = wR_{\prime}dt$, so folgt für die Gleichung 104) in Bezug auf Drehung folgende Gestalt:

$$\Sigma(K_{\prime}ds_{\prime}) = \Sigma(K_{\prime}wR_{\prime}dt) = 0,$$

und da dt ein gemeinschaftlicher Faktor, w aber ebenfalls allen Summanden gemeinschaftlich ist, insofern alle Angriffspunkte sich nur mit derselben Winkel-Geschwindigkeit bewegen können (§. 65. S. 86), so folgt als Bedingung des Gleichgewichts in Bezug auf Drehung um irgend eine Axe:

$$106)\ \Sigma(K_{\prime}R_{\prime}) = 0,$$

worin $K_{\prime}$ den resultirenden Druck in jedem Angriffspunkt bezeichnet, in einer Richtung, welche in einer durch den Angriffspunkt gehenden, zur Drehaxe normalen Ebene liegt, und zu dem Halbmesser $R_{\prime}$ normal ist.

Zerlegt man die sämmtlichen in ein und demselben Angriffspunkt wirkenden Drucke nach zwei Richtungen, von denen eine parallel mit der angenommenen Drehaxe ist, die andere aber in jene normale Ebene fällt, so erscheint offenbar der Druck $K_{\prime}$ auch als der resultirende Druck aus allen diesen in der genannten Ebene liegenden Drucken, und das Produkt $K_{\prime}R_{\prime}$ erscheint als das statische

Moment dieses resultirenden Druckes (§ 50. S. 60). Es gilt dann das Gesetz des § 51, d. h. man kann setzen:

$$K_, R_, = \Sigma (K_,' R_,'),$$

wenn man unter $K_,'$, $K_,''$, $K_,'''$ .... die Komponenten sämmtlicher in demselben Angriffspunkt wirkender Kräfte in Bezug auf eine, zur Drehaxe normale Ebene versteht, und wenn $R_,'$, $R_,''$, $R_,'''$ etc. die Hebelsarme dieser Komponenten, oder die Normalen bezeichnen, welche man von dem Durchschnittspunkt der Drehaxe mit der Ebene auf die Richtung der Drucke $K_,'$, $K_,''$, $K_,'''$ .... ziehen kann. Demnächst geht die Gleichung 106) über in:

$$106\text{a}) \quad \Sigma (K_,' R_,') = 0,$$

d. h. wenn in Bezug auf Drehung um eine gewisse Axe Gleichgewicht bestehen soll, und man zerlegt die sämmtlichen in den einzelnen Angriffspunkten wirkenden Kräfte nach je zwei Richtungen, von denen die einen parallel mit der Drehaxe sind, die andern aber in Ebenen liegen, welche normal zu der Drehaxe sind und durch den Angriffspunkt der einzelnen Kräfte gehen, so mufs die Summe der statischen Momente dieser letztgenannten Komponenten in Bezug auf die Durchschnittspunkte ihrer Ebenen mit der Drehaxe gleich Null sein.

Nun ist aber zu bemerken, dafs der Hebelsarm $R'_,$ die Normale ist, welche man von der Drehaxe auf die in der zur Drehaxe normalen Ebene liegende Komponente ziehen kann, diese Normale giebt aber zugleich den Abstand einer Ebene, welche mit der Drehaxe parallel ist, und durch die Komponente geht; in dieser hier erwähnten Ebene liegt aber auch die ursprüngliche Kraftrichtung, da ja diese Kraftrichtung mit ihren Komponenten in einer und derselben Ebene liegen mufs, die eine Komponente aber die eben erwähnte, die andere dagegen mit der Drehaxe parallel ist; es stellt also die Normale $R'_,$ den Abstand der Drehaxe von einer Ebene dar, welche mit derselben parallel durch die ursprüngliche Kraftrichtung gelegt ist, oder mit andern Worten, es ist der Hebelsarm $R'_,$ der Komponente, welche auf Drehung um irgend eine Axe wirkt, nichts anders, als die kürzeste Entfernung der ursprünglichen Kraftrichtung von dieser Drehaxe.

Nach diesen Darstellungen ist es nun nicht schwer die Bedingungen für das vollkommene Gleichgewicht mehrer auf ein festes System wirkender Kräfte aufzustellen.

Zunächst denken wir ein festes Axensystem, es seien α, β, γ; α', β', γ' etc. die Winkel, welche die in den verschiedenen Angriffspunkten wirksamen Kräfte mit den Axen bilden. Die resultirenden Drucke in dem ersten Angriffspunkt nach der Richtung der ersten Axe sind dann $\Sigma(K.\cos\alpha)$, im zweiten Angriffspunkt $\Sigma(K'.\cos\alpha')$, im dritten $\Sigma(K''.\cos\alpha'')$ etc., ebenso lassen sich die in den einzelnen Angriffspunkten wirkenden resultirenden Drucke für die beiden andern Axen bestimmen, und es folgt aus der Gleichung 105) als Bedingung des Gleichgewichts gegen fortschreitende Bewegung:

$$107) \begin{cases} \Sigma(K.\cos\alpha) = 0 \\ \Sigma(K.\cos\beta) = 0 \\ \Sigma(K.\cos\gamma) = 0. \end{cases}$$

Die Komponenten der Kräfte in Ebenen, welche zu den angenommenen Axen normal sind, drücken sich aus durch $K.\sin\alpha$, $K'.\sin\alpha'$, $K''.\sin\alpha''$.... für die Ebenen normal zur ersten Axe; durch $K.\sin\beta$... und durch $K.\sin\gamma$.... für die Ebenen normal zur zweiten und dritten Axe, und es folgt für die Bedingung des Gleichgewichts gegen drehende Bewegung aus Gleichung 106a) für alle drei Axen:

$$108) \begin{cases} \Sigma(K.\sin\alpha.R_{,}) = 0 \\ \Sigma(K.\sin\beta.R_{,,}) = 0 \\ \Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,}) = 0, \end{cases}$$

worin $R_{,}$, $R_{,,}$, $R_{,,,}$ die kürzesten Entfernungen der Richtungslinien der einzelnen Kräfte von der ersten, zweiten und dritten Axe bezeichnen.

Die Gleichungen 107 und 108):

$$\Sigma(K.\cos\alpha) = 0; \quad \Sigma(K.\cos\beta) = 0; \quad \Sigma(K.\cos\gamma) = 0,$$

und

$$\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,}) = 0; \quad \Sigma(K.\sin\beta.R_{,,}) = 0; \quad \Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,}) = 0$$

stellen sechs Bedingungs-Gleichungen dar, welche erfüllt werden müssen, wenn vollständiges Gleichgewicht der verschiedenen auf ein festes System wirkenden Kräfte vorhanden sein soll.

Bestimmung der Resultanten der fortschreitenden Bewegung für Kräfte, die unter beliebigen Winkeln auf ein festes System wirken.

§ 71. Da nun jede Kraft in einem festen System, an welchem Gleichgewicht statt findet, als die Gegenkraft aller übrigen sich ansehen läfst, so können wir nach den oben gefundenen Gesetzen leicht die Gröfse, die Richtung und den Angriffspunkt der Resultanten von Kräften bestimmen, die nicht im Gleichgewicht sind. Wir wollen zuerst die Untersuchung führen in Bezug auf die Resultante der fortschreitenden Bewegung, dann in Bezug auf die Resultante der drehenden Bewegung, und endlich zu bestimmen suchen, in welchen Fällen das System nur eine Resultante hat, oder mit andern Worten, in welchen Fällen die Resultanten gegen die fortschreitende und gegen die drehende Bewegung der Richtung und Gröfse nach zusammenfallen können.

Bezeichnen wir mit Q die Resultante gegen die fortschreitende Bewegung, mit A, B, Γ die Winkel, welche ihre Richtung mit den drei Axen macht, so wird, wenn vorhin nicht Gleichgewicht vorhanden war, dieses eintreten, sobald eine der Resultante gleiche, aber der Richtung nach entgegengesetzte Kraft auf das System einwirkt; es werden dann die Bedingungs-Gleichungen 107) erfüllt werden, und zwar werden sie die Form annehmen:

$$109)\quad \begin{cases} \Sigma(K.\cos\alpha) - Q.\cos A = 0 \\ \Sigma(K.\cos\beta) - Q.\cos B = 0 \\ \Sigma(K.\cos\gamma) - Q.\cos\Gamma = 0. \end{cases}$$

Zur Bestimmung der vier unbekannten Werthe Q, A, B, Γ haben wir noch die vierte Gleichung, die durch die Bedingung gegeben ist, dafs die drei Winkel A, B, Γ von einer Linie mit drei andern gebildet werden, welche letztere unter einander rechte Winkel machen. Für diesen Fall ist nämlich nach einem bekannten Satze:

$$(\cos A)^2 + (\cos B)^2 + (\cos\Gamma)^2 = 1.$$

Aus diesen vier Gleichungen folgt zunächst durch eine leichte arithmetische Operation:

$$Q^2 = [\Sigma(K.\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K.\cos\beta)]^2 + [\Sigma(K.\cos\gamma)]^2,$$

folglich die Resultante sämmtlicher Kräfte der Gröfse nach:

$$110)\quad Q = \sqrt{\left\{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K.\cos\beta)]^2 + [\Sigma(K.\cos\gamma)]^2\right\}},$$

ferner:

$$111)\quad \begin{cases} \cos A = \dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha)}{Q} \\ \cos B = \dfrac{\Sigma(K.\cos\beta)}{Q} \\ \cos\Gamma = \dfrac{\Sigma(K.\cos\gamma)}{Q}. \end{cases}$$

Vergleichen wir diese beiden Gleichungen mit den Gleichungen 66 und 67) § 33. S. 37, so ergiebt sich durch eine sehr einfache Betrachtung, dafs die Resultirende der fortschreitenden Bewegung der Gröfse und Richtung nach ganz in derselben Weise gefunden wird, als ob die in den verschiedenen Angriffspunkten wirkenden Drucke parallel mit ihren ursprünglichen Richtungen an einen einzigen Punkt getragen würden, und man nun den resultirenden Druck aus allen diesen Drucken zusammensetzte.

Für die fortschreitende Bewegung läfst sich hiernach immer eine Resultante finden, da es aber nur darauf ankommt, die Bedingungen der Gleichungen 109) zu erfüllen, so ist der Angriffspunkt der Resultanten in Bezug auf fortschreitende Bewegung ganz gleichgültig, ja wir können die Resultante gegen fortschreitende Bewegung in jedem beliebigen Punkte des Systems angreifend denken, oder aber wir können anstatt der einen Resultanten uns auch mehre resultirende Kräfte denken, welche zusammen wirkend die Bedingungs-Gleichungen erfüllen. Sobald wir also an einem festen System beliebig viele Kräfte wirkend haben, welche nicht im Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung sind, so wird ein solches Gleichgewicht eintreten, sobald wir eine oder mehre Gegenkräfte anbringen, welche die Bedingungen der Gleichungen 109) erfüllen; in welchen Punkten wir diese Kräfte angreifen lassen, ist in Bezug auf fortschreitende Bewegung ganz gleichgiltig; nicht so in Betreff der drehenden Bewegung.

Bestimmung der Resultanten der fortschreitenden Bewegung für Kräfte, deren Richtungslinien parallel sind.

§ 72. Wenn die Richtungen sämmtlicher Kräfte parallel sind, so bilden sie sämmtlich dieselben Winkel mit den drei Axen; es werden also die Faktoren $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ in den Gleichungen 110 und 111) gemeinschaftliche, und es geht für diesen Fall die Gleichung 110) über in:

$$Q = \sqrt{\left\{[\Sigma(K)]^2\,[\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2]\right\}}$$

und zufolge des bekannten Gesetzes $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$ hat man:

$$112)\quad Q = \Sigma(K),$$

folglich auch, wenn man diese Werthe in die Gleichungen 111) einsetzt:

$$113)\quad \begin{cases} \cos A = \cos\alpha \\ \cos B = \cos\beta \\ \cos \Gamma = \cos\gamma, \end{cases}$$

für parallele Kräfte ist also die Resultante gegen fortschreitende Bewegung gleich der Summe der sämmtlichen Kräfte, und die Richtung der Resultante ist parallel mit der Richtung der einzelnen Kräfte.

Sollen die Kräfte, deren Richtungen parallel sind, gegen fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sein, so folgt aus Gleichung 112):

$$112a)\quad \Sigma(K) = 0.$$

Gesetze für das Gleichgewicht gegen drehende Bewegung, wenn die Kraftrichtungen parallel sind.

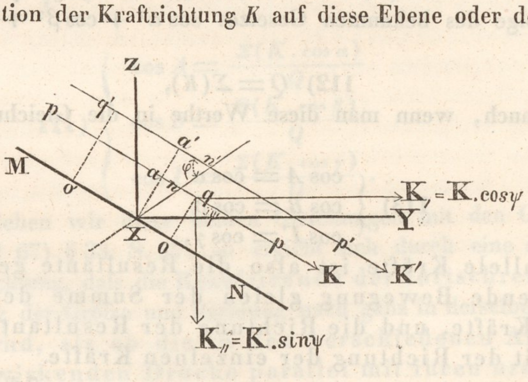
§ 73. Untersuchen wir nun die Verhältnisse der drehenden Bewegung.

Zu dem Ende wollen wir zunächst die Gesetze des Gleichgewichts gegen drehende Bewegung näher betrachten.

In den Gleichungen 108):

$$\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,}) = 0;\quad \Sigma(K.\sin\beta.R_{,,}) = 0;\quad \Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,}) = 0$$

bezeichnen $R_{,}$, $R_{,,}$, $R_{,,,}$ die kürzesten Abstände der einzelnen Kräfte von den drei angenommenen Axen; diese kürzesten Abstände werden erhalten, wenn man durch die Richtungen der Kräfte Ebenen legt, die parallel mit den Axen sind, und die Abstände dieser Ebenen, oder die Normalen von den betreffenden Axen auf die Ebenen konstruirt. Jede Ebene, parallel mit einer der drei Axen, ist normal auf der Ebene, in welcher die beiden andern Axen liegen, die so gedachte Ebene durch irgend eine Kraftrichtung ist also die projicirende Ebene für diese Kraftrichtung auf die Ebene der beiden andern Axen, und ihre Durchschnittslinie mit dieser letztgenannten Ebene ist die Projektion der Kraftrichtung auf diese; die Normale von der Axe auf die projicirende Ebene, oder der gesuchte kürzeste Abstand ist also gleich der Normalen von dem Durchschnittspunkt der drei Axen auf die Projektion der Kraftrichtung. Es sei z. B. die Ebene des Papiers diejenige der Axen YZ; pq sei die Projektion der Kraftrichtung K auf diese Ebene oder der Durch-



schnitt dieser Ebene mit einer Ebene, welche durch die Richtung von K parallel zur ersten Axe gelegt werden kann, dann ist Xa, oder die Normale von der Axe X auf diese Ebene, welche gleich ist der Normalen vom Durchschnittspunkt der Axen auf die Projektion pq, die gesuchte kürzeste Entfernung $R_{,}$.

Betrachten wir nun zunächst den Fall, dafs die Richtungen sämmtlicher Kräfte parallel mit einander sind. Es werden dann auch die projicirenden Ebenen, und folglich auch die Projektionen parallel mit einander sein; ist z. B. $p'q'$ die Projektion der Kraftrichtung K', so ist offenbar $a'X = R_{,}'$, gleich dem kürzesten Abstande der Kraft K', und es fallen daher die Hebelsarme sämmtlicher parallelen Kräfte in Bezug auf eine bestimmte Axe in ein und dieselbe Ebene, welche durch diese Axe geht, und normal zu den Kraftrichtungen ist. Nun gehen auch, unter der Bedingung, dafs die Kraftrichtungen parallel sind, dafs folglich die Neigungswinkel, welche sie mit den drei angenommenen Axen bilden, für alle Kräfte dieselben sind, die Gleichungen 108), nach Ausscheidung der gemeinschaftlichen Faktoren $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, über in:

$$114)\quad \Sigma(KR_{,}) = 0;\quad \Sigma(KR_{,,}) = 0;\quad \Sigma(KR_{,,,}) = 0.$$

Denken wir durch die Axe X eine Ebene nX gelegt, welche die projicirenden Ebenen der Kraftrichtungen unter einem beliebigen Winkel φ schneidet, so sieht man leicht, dafs die Hebelsarme

$$R_{,} = Xa = Xn\,.\sin\varphi;\quad R_{,}' = Xa' = Xn'\,.\sin\varphi$$

etc. sind. Setzen wir diese Werthe in die Gleichung 114), so folgt, indem man mit dem gemeinschaftlichen Faktor $\sin\varphi$ dividirt,

$$\Sigma(K\,.\,Xn) = 0 \text{ etc.},$$

d. h. man kann, wenn die Kraftrichtungen parallel sind, anstatt der kürzesten Entfernungen von den Drehaxen, auch beliebig andere Abstände der projicirenden Ebene von den Drehaxen einführen, wenn dieselben nur sämmtlich zur Drehaxe normal und unter sich parallel sind.

Legt man durch die Axe X eine Ebene MN, welche parallel mit den projicirenden Ebenen ist, so folgt leicht, dafs wenn q, q'... die Angriffspunkte der parallelen Kräfte sind, die Abstände $qo = aX = R_{,}$ $q'o' = a'X = R_{,}'$ .... zu setzen sind. Bezeichnet man mit x, x', x'' etc. die Abstände der Angriffspunkte der parallelen Kräfte von einer Ebene, die mit ihrer Richtung parallel ist, so folgt aus Gleichung 114) auch:

$$\Sigma(Kx) = 0 \text{ etc.}$$

Sind die Kraftrichtungen zwar unter sich parallel, aber nicht parallel mit der Ebene in Bezug auf welche die Abstände ihrer Angriffspunkte x, x', x''... gegeben sind, sondern bilden sie mit derselben einen beliebigen Winkel ψ, so kann man offenbar für jede der einzelnen Kräfte K, K', K'' etc. immer zwei andere substituiren, welche wir mit $K_{,}$ und $K_{,,}$, $K'_{,}$ und $K'_{,,}$ etc. bezeichnen wollen; und von denen die Kräfte $K_{,}$, $K'_{,}$ parallel, die Kräfte $K_{,,}$, $K'_{,,}$... normal zu der Ebene sind. Durch diese Substitution wird offenbar das Gleichgewicht nicht geändert; und es gilt dann in Bezug auf die mit der Ebene parallelen Kräfte die Gleichung:

$$\Sigma(K_{,}x) = 0.$$

Es ist aber offenbar $K_{,} = K \cdot \cos\psi$, $K'_{,} = K' \cdot \cos\psi$ etc. Setzen wir diese Werthe für $K_{,}$, $K'_{,}$ etc. ein, so geht die Gleichung über in:

$$\Sigma(K \cdot \cos\psi \cdot x) = 0,$$

und da $\cos\psi$ allen Summanden gemeinschaftlich ist, so folgt auch:

$$115)\ \Sigma(K \cdot x) = 0.$$

Diese wichtige Gleichung drückt folgendes Gesetz aus:

> Wenn auf ein festes System beliebig viele Kräfte wirken, deren Richtungslinien parallel sind und die Kräfte sind in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht, so ist die Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man jede Kraft mit dem normalen Abstand ihres Angriffspunktes von einer beliebig gegebenen Ebene multiplicirt, gleich Null.

Sind die Kräfte unter sich parallel, und denken wir drei beliebige Ebenen, welche unter einander normal sind (Koordinaten-Ebenen), so gilt das Gesetz für alle drei Koordinaten-Ebenen, und wenn x, x', x'' .. die Koordinaten der Angriffspunkte in Bezug auf die erste Ebene, y, y', y'' und z, z', z''.... die Koordinaten in Bezug auf die zweite und dritte Ebene bezeichnen, so hat man für parallele Kräfte, die an einem festen System im Gleichgewicht gegen drehende Bewegung sein sollen, die drei Bedingungs-Gleichungen:

$$116)\ \Sigma(Kx) = 0;\quad \Sigma(Ky) = 0;\quad \Sigma(Kz) = 0.$$

Fügen wir noch die Bedingung der Gleichung 112a) hinzu, welche das Gleichgewicht in Bezug auf fortschreitende Bewegung enthält, so sind die vier Gleichungen:

$$\Sigma(Kx) = 0;\quad \Sigma(Ky) = 0;\quad \Sigma(Kz) = 0$$

und

$$\Sigma(K) = 0.$$

vier Bedingungs-Gleichungen, welche sämmtlich erfüllt werden müssen, wenn parallele Kräfte, die auf ein festes System wirken, in vollkommenem Gleichgewicht sein sollen.

Das Produkt $K.x$ aus dem Druck einer Kraft in den normalen Abstand ihres Angriffspunkts von einer Ebene nennt man das Moment der Kraft in Bezug auf die Ebene. Es ist dieser Ausdruck nicht zu verwechseln mit dem statischen Moment einer Kraft in Bezug auf eine Axe.

Bestimmung des Angriffspunktes der Resultanten von parallelen Kräften, die auf ein festes System wirken; Kräftepaar.

§ 74. Werden die Bedingungs-Gleichungen 116) erfüllt, aber nicht 112a), so rückt das feste System geradlinig fort, ohne dafs eine Drehung erfolgt; die Resultante der fortschreitenden Bewegung läfst sich dann durch die Gleichungen 112 und 113) der Gröfse und Richtung nach bestimmen. Will man nun auch Gleichgewicht gegen die fortschreitende Bewegung herstellen, so mufs man eine Kraft Q, die gleich dieser Resultante ist, also

$$Q = \Sigma(K)$$

in entgegengesetzter Richtung der Resultanten auf das System wirken lassen; allein sobald man diese Kraft einführt, wird zwar die fortschreitende Bewegung aufgehoben, aber es ist denkbar, dafs nun die Bedingungs-Gleichungen gegen die drehende Bewegung dadurch gestört werden. Soll gleichwohl das Gleichgewicht gegen drehende Bewegung bestehen bleiben, so ist der Angriffspunkt dieser Kraft nicht mehr beliebig (vergl. S. 99), sondern, wenn X, Y, Z die Koordinaten desselben sind, so mufs zufolge der Gleichung 116) die Bedingung erfüllt werden:

$$\begin{aligned} \Sigma(Kx) - QX &= 0 \\ \Sigma(Ky) - QY &= 0 \\ \Sigma(Kz) - QZ &= 0, \end{aligned}$$

daraus folgen die Koordinaten für den Angriffspunkt der Resultanten paralleler Kräfte, unter der Voraussetzung, dafs in dem System keine drehende Bewegung statt finden soll:

$$117) \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{\Sigma(Kx)}{Q} = \frac{\Sigma(Kx)}{\Sigma(K)} \\ Y &= \frac{\Sigma(Ky)}{Q} = \frac{\Sigma(Ky)}{\Sigma(K)} \\ Z &= \frac{\Sigma(Kz)}{Q} = \frac{\Sigma(Kz)}{\Sigma(K)}. \end{aligned} \right.$$

Da übrigens zufolge der Bedingung, dafs die Kräfte gegen drehende Bewegung im Gleichgewicht sein sollen, sowohl $\Sigma(Kx)$ als $\Sigma(Ky)$ und $\Sigma(Kz)$ einzeln gleich 0 sind, so folgt auch $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, d. h. wenn parallele Kräfte in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind, aber nicht in Bezug auf fortschreitende Bewegung, so liegt der Angriffspunkt der Resultirenden der fortschreitenden Bewegung so, dafs wenn man durch denselben drei zu einander normale Ebenen legt, die Summe der Momente der Kräfte in Bezug auf jede dieser Ebenen gleich Null ist; oder mit anderen Worten, es ist der Angriffspunkt der Resultirenden immer in dem Anfangspunkt des angenommenen Koordinatensystems zu denken, und er liegt daher in jeder der Drehaxen, für welche Gleichgewicht gegen drehende Bewegung nachgewiesen werden kann.

In diesem Fall läfst sich folglich durch eine einzige Gegenkraft Gleichgewicht gegen drehende und gegen fortschreitende Bewegung herstellen.

Wenn die parallelen Kräfte, welche auf ein festes System wirken, weder in Bezug auf drehende noch in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind, so werden die Bedingungs-Gleichungen nicht erfüllt; dieselben haben dann im Allgemeinen die Form:

$$\Sigma(Kx)=A;\quad \Sigma(Ky)=B;\quad \Sigma(Kz)=C,$$
$$\Sigma(K)=Q,$$

soll nun die Gegenkraft $-Q$, welche die fortschreitende Bewegung aufhebt, gleichzeitig auch die drehende Bewegung aufheben, so folgt wieder als Bedingung:

$$\Sigma(Kx)-QX=0=\Sigma(Kx)-A=0 \text{ etc.},$$

und daraus:

$$117\text{a})\quad \left\{\begin{aligned} X&=\frac{A}{Q}=\frac{\Sigma(Kx)}{Q}=\frac{\Sigma(Kx)}{\Sigma(K)}\\ Y&=\frac{B}{Q}=\frac{\Sigma(Ky)}{Q}=\frac{\Sigma(Ky)}{\Sigma(K)}\\ Z&=\frac{C}{Q}=\frac{\Sigma(Kz)}{Q}=\frac{\Sigma(Kz)}{\Sigma(K)}.\end{aligned}\right.$$

Durch diese Gleichungen sind die Koordinaten des Angriffspunktes der Resultirenden gegen fortschreitende Bewegung unter der Bedingung vollständig bestimmt, dafs dieselbe Gegenkraft, welche die fortschreitende Bewegung aufhebt, gleichzeitig auch die drehende Bewegung aufheben soll; vorausgesetzt nämlich, dafs A, B, C und Q reelle Werthe sind.

Die beiden Gleichungen 117 und 117a) zeigen, dafs wenn auf ein festes System parallele Kräfte einwirken, in folgenden beiden Fällen sich immer eine einzige Gegenkraft und deren Angriffspunkt bestimmen läſst, nämlich:

1) wenn die parallelen Kräfte von Hause aus schon gegen drehende Bewegung im Gleichgewicht sind, aber in Bezug auf fortschreitende Bewegung kein Gleichgewicht statt findet;

2) wenn die parallelen Kräfte weder in Bezug auf fortschreitende Bewegung noch in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind.

Es bleibt noch ein dritter Fall zu erörtern, nämlich der, wenn

3) die parallelen Kräfte von Hause aus gegen fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind, aber nicht gegen drehende Bewegung.

Wir werden sogleich zeigen, daſs dann das vollkommene Gleichgewicht nicht durch eine einzige Gegenkraft hergestellt werden kann.

Dieser Fall entspricht nämlich den Gleichungen:

$$\Sigma(Kx) = A;\quad \Sigma(Ky) = B;\quad \Sigma(Kz) = C;\quad \Sigma(K) = 0.$$

Denken wir nun, es würde eine einzige Kraft angebracht, welche im Stande wäre das Gleichgewicht gegen drehende Bewegung herzustellen, so würde durch dieselbe offenbar die Gleichung $\Sigma(K)=0$ gestört werden, und es würde nun eine fortschreitende Bewegung eintreten. Um aber die Gleichung $\Sigma(K)=0$ aufrecht zu erhalten, ist es nöthig wenigstens zwei Kräfte auf das System wirken zu lassen, die der Gröſse nach gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt, und deren Richtungslinien parallel mit den Richtungslinien der gegebenen Kräfte sind. Nennen wir diese beiden Kräfte P und $-P$. Durch Einführung dieser beiden Kräfte wird das Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung nicht gestört, denn es ist offenbar, wenn $\Sigma(K)=0$ ist, auch $\Sigma(K)+P-P=0$.

Nennen wir die Koordinaten des Angriffspunktes der beiden Kräfte P und $-P$ beziehlich X, Y, Z und X', Y', Z', so folgt, wenn diese Kräfte das Gleichgewicht gegen drehende Bewegung herstellen sollen:

$$118)\quad \begin{cases} \Sigma(Kx) + P(X-X') = 0 \\ \Sigma(Ky) + P(Y-Y') = 0 \\ \Sigma(Kz) + P(Z-Z') = 0. \end{cases}$$

Diese drei Bedingungs-Gleichungen sind die einzigen, welche sich für die Bestimmung der Drucke P und $-P$, sowie der Koordinaten ihrer Angriffspunkte aufstellen lassen, sie enthalten sieben

Unbekannte, nämlich P, X, Y, Z, X', Y', Z', und es sind daher immer vier davon beliebig zu geben.

Giebt man den Druck $+P$ der Gröfse nach, und auch seinen Angriffspunkt durch die Koordinaten X, Y, Z, so sind die Koordinaten des Angriffspunktes für den Druck $-P$ durch die Gleichungen 118) zu finden.

Durch die Werthe $(X-X')$, $(Y-Y')$, $(Z-Z')$ ist übrigens die gegenseitige Lage der Angriffspunkte der beiden Kräfte vollkommen bestimmt, so dafs wenn man die Gröfse der Kräfte P annimmt, es nur auf diese gegenseitige Lage ankommt, nicht aber auf die absolute Lage der Angriffspunkte.

Man sieht überhaupt, dafs die Gleichungen 118) folgendes Gesetz ausdrücken:

> Wenn auf ein festes System beliebig viele parallele Kräfte wirken, welche im Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung sich befinden, aber nicht im Gleichgewicht gegen drehende Bewegung, so ist in Bezug auf drehende Bewegung niemals eine einzige Resultante denkbar, sondern es müssen deren wenigstens zwei angenommen werden, deren Richtungen parallel sind mit denjenigen der parallelen Kräfte, und die einander der Gröfse nach gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt sind. Man kann die Gröfse dieser beiden Resultanten beliebig annehmen, dann aber ist die gegenseitige Lage der Angriffspunkte vollkommen bestimmt.

Da diese beiden Resultanten parallel mit einander und mit den Richtungen der ursprünglich gegebenen Kräfte sind, so läfst sich durch beide immer eine Ebene legen, welche parallel ist mit den Richtungen der gegebenen Kräfte.

Zwei gleich grofse Kräfte, deren Richtungen parallel aber entgegengesetzt sind, und welche sich nicht im Gleichgewicht gegen Drehung befinden, nennt man ein **Kräftepaar.**

Das Produkt aus dem Druck einer der beiden Kräfte in den kürzesten Abstand ihrer Richtungslinien nennt man das **Moment des Kräftepaars.**

Die Wirkung paralleler Kräfte, die in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind, nicht aber in Bezug auf drehende Bewegung, läfst sich daher immer durch ein Kräftepaar ersetzen, welches in einer mit den Kraftrichtungen parallelen Ebene liegt, dessen Kräfte beliebig grofs angenommen werden können, und dessen Angriffspunkte eine bestimmte relative Lage gegen einander haben, die man konstruiren kann, sobald man die Gröfse der Kräfte des Kräftepaars gegeben hat.

Die Entfernung der Angriffspunkte des Kräftepaars drückt sich wie leicht zu übersehen ist, aus durch:

$$\sqrt{\left\{(X-X')^2+(Y-Y')^2+(Z-Z')^2\right\}},$$

und wenn ψ der Winkel ist, welchen die Verbindungslinie der Angriffspunkte mit der Richtung der Kräfte macht, so ist die kürzeste Entfernung der Richtungslinien der Kräfte, wie ebenfalls durch eine einfache Betrachtung zu übersehen ist:

$$\sin\psi\,.\sqrt{\left\{(X-X')^2+(Y-Y')^2+(Z-Z')^2\right\}}$$

und folglich das Moment des Kräftepaares:

$$118\text{a)}\quad P.\sin\psi\sqrt{\left\{(X-X')^2+(Y-Y')^2+(Z-Z')^2\right\}}=$$
$$=\sin\psi\,.\sqrt{\left\{[\Sigma(Kx)]^2+[\Sigma(Ky)]^2+[\Sigma(Kz)]^2\right\}}\ \text{(Gl. 118)}$$

in welchem Ausdruck ψ den Winkel bezeichnet, welchen die Richtungen der parallelen Kräfte mit der Verbindungslinie der Angriffspunkte des Kräftepaares bilden.

Bestimmung der Resultanten und ihrer Angriffspunkte für Kräfte, die auf ein festes System wirken, und welche zwar in parallelen Ebenen liegen, aber nicht unter einander parallel sind.

§ 75. Untersuchen wir nun den Fall, dafs Kräfte, die zwar nicht parallel sind, deren Richtungslinien aber in parallelen Ebenen liegen, auf ein festes System wirken.

Wir setzen zuerst den allgemeinsten Fall voraus, nämlich:

A. dafs die Kräfte weder in Bezug auf fortschreitende noch in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht seien.

Denken wir drei Koordinaten-Ebenen, von denen eine (die dritte) parallel ist mit den Ebenen der Kräfte, die beiden andern also (die erste und zweite) normal zu den Ebenen der Kräfte sind; es liegt dann die erste und zweite Axe in einer Ebene parallel mit den Ebenen der Kräfte, und die dritte Axe ist normal zu den Ebenen der Kräfte.

Da die Komponenten sämmtlicher Kräfte, welche parallel mit der dritten Axe sind, unter der gemachten Annahme nothwendiger Weise gleich Null sein müssen, in sofern der Neigungswinkel γ gegen diese Axe für alle Kräfte gleich einem Rechten, also $\cos\gamma$ gleich Null ist, so folgt, dafs die Resultirende der fortschreitenden Bewegung für diese Richtung ebenfalls Null ist, und dafs also die Resultirende der fortschreitenden Bewegung überhaupt in einer Ebene liegen mufs, welche mit den Ebenen der Kräfte parallel ist. Die allgemeinen Gleichungen 110 und 111) für die Resultirende der fortschreitenden Bewegung gehen dann über in die Form:

$$119)\quad \left\{\begin{aligned} Q &= \sqrt{\left\{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K.\sin\alpha)]^2\right\}} \\ \cos A &= \frac{\Sigma(K.\cos\alpha)}{Q} = \sin B \\ \sin A &= \frac{\Sigma(K.\sin\alpha)}{Q} = \cos B, \end{aligned}\right.$$

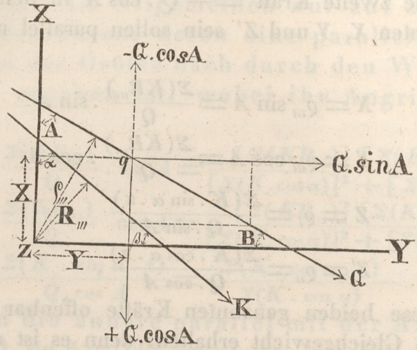
insofern nämlich in diesem Falle die Neigungswinkel α und β, welche die einzelnen Kräfte mit der ersten und zweiten Axe machen, immer zusammen einen Rechten betragen.

Durch diese Gleichungen ist die Resultante der fortschreitenden Bewegung der Kräfte in parallelen Ebenen der Gröfse und Richtung nach gegeben. Führt man eine Gegenkraft gleich $-Q$ ein, so erlangt das System Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung, gleichviel in welchem Angriffspunkt diese Gegenkraft angebracht wird. Soll aber die Gegenkraft auch Gleichgewicht gegen drehende Bewegung herstellen, so mufs sie die allgemeinen Bedingungs-Gleichungen 108) erfüllen, nämlich es mufs sein:

$$119a)\quad \left\{\begin{aligned} \Sigma(K.\sin\alpha.R_{,}) - Q.\sin A.\varrho_{,} &= 0 \\ \Sigma(K.\sin\beta.R_{,,}) - Q.\sin B.\varrho_{,,} &= 0 \\ \Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,}) - Q.\sin\Gamma.\varrho_{,,,} &= 0, \end{aligned}\right.$$

worin $\varrho_{,}$, $\varrho_{,,}$, $\varrho_{,,,}$ die kürzesten Abstände der Kraftrichtung Q von den drei Axen, oder die Abstände der Projektionen ihrer Richtung auf die zu den betreffenden Axen normalen Projektionsebenen von dem Durchschnittspunkt der Axen (§ 73. S. 100) bezeichnet. Beachtet man, dafs $\sin\gamma \ldots \sin\Gamma = 1$ ist, dafs $\sin\beta = \cos\alpha$; $\sin B = \cos A$ etc. ist, so folgt:

$$119b)\quad \left\{\begin{aligned} \Sigma(K.\sin\alpha.R_{,}) - Q.\sin A.\varrho_{,} &= 0 \\ \Sigma(K.\cos\alpha.R_{,,}) - Q.\cos A.\varrho_{,,} &= 0 \\ \Sigma(KR_{,,,}) - Q.\varrho_{,,,} &= 0. \end{aligned}\right.$$



Es sei die Ebene des Papiers die dritte Projektionsebene, also parallel mit den Ebenen, in welchen die Kräfte liegen, die Axe Z normal zur Ebene des Papiers, dann liegen die Axen X und Y in der Ebene des Papiers, nun ist $\varrho_{\prime\prime\prime}$ der Abstand der Projektion der Resultirenden auf die Ebene XY und durch die dritte Gleichung zu bestimmen, nämlich:

$$\varrho_{\prime\prime\prime} = \frac{\Sigma(KR_{\prime\prime\prime})}{Q}.$$

Zugleich bemerkt man, dafs die Abstände $R_{\prime}\dots$ und $R_{\prime\prime}\dots$ nämlich die kürzesten Entfernungen der Kräfte K, $K'\dots$ von den Axen X und Y, nichts anderes darstellen, als die Entfernungen der Parallelebenen, in welchen die Kraftrichtungen liegen, von der Projektionsebene XY, oder mit andern Worten die Abstände z, $z_{\prime}$, $z_{\prime\prime}\dots$ der Angriffspunkte der Kräfte von der dritten Projektionsebene. Es ist also $R_{\prime} = R_{\prime\prime} = z$ etc. und die beiden ersten Gleichungen liefern daher für den Abstand des Angriffspunktes der Resultirenden von der Ebene XY die beiden Werthe:

$$\varrho_{\prime} = \frac{\Sigma(K\,.\sin\alpha\,.\,z)}{Q\,.\sin A}$$

$$\text{und } \varrho_{\prime\prime} = \frac{\Sigma(K\,.\cos\alpha\,.\,z)}{Q\,.\cos A}.$$

Diese beiden Werthe sind nicht nothwendiger Weise einander gleich, und man sieht daher, dafs es in diesem Falle nicht immer möglich ist nur eine Resultirende für das System zu finden. Um nun aber das System im vollkommenen Gleichgewicht zu halten, stellen wir uns vor, es wirke eine Kraft $= - Q.\sin A$ in dem Punkte q, dessen Koordinaten X, Y und Z seien, parallel mit der

Axe Y und eine zweite Kraft $= - Q \cdot \cos A$ in dem Punkte q' *), dessen Koordinaten X, Y und Z' sein sollen parallel mit der Axe X. Nimmt man:

$$X = \varrho_{\prime\prime\prime} \sin A = \frac{\Sigma(KR_{\prime\prime\prime})}{Q} \cdot \sin A$$

$$Y = \varrho_{\prime\prime\prime} \cos A = \frac{\Sigma(KR_{\prime\prime\prime})}{Q} \cdot \cos A$$

$$Z = \varrho_{\prime} = \frac{\Sigma(K \cdot \sin\alpha \cdot z)}{Q \cdot \sin A}$$

$$Z' = \varrho_{\prime\prime} = \frac{\Sigma(K \cdot \cos\alpha \cdot z)}{Q \cdot \cos A},$$

so werden diese beiden genannten Kräfte offenbar das System in vollkommenem Gleichgewicht erhalten; denn es ist nach 119):

120) $Q \cdot \sin A = \Sigma(K \cdot \sin\alpha)$; $Q \cdot \cos A = \Sigma(K \cdot \cos\alpha)$,

folglich in Bezug auf fortschreitende Bewegung:

$$\Sigma(K \cdot \sin\alpha) - (Q \cdot \sin A) = 0$$

$$\Sigma(K \cdot \cos\alpha) - (Q \cdot \cos A) = 0,$$

welche Gleichungen zeigen, daſs durch die beiden Kräfte Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung hergestellt ist, und da in Bezug auf drehende Bewegung um die Axe Z die Hebelsarme der Kräfte $- Q \cdot \sin A$ und $- Q \cdot \cos A$ beziehlich X und Y sind, so hat man:

$$\Sigma(KR_{\prime\prime\prime}) - Q \cdot \sin A \cdot X - Q \cdot \cos A \cdot Y =$$

$$\Sigma(KR_{\prime\prime\prime}) - (\sin A^2 + \cos A^2) \cdot \Sigma(KR_{\prime\prime\prime}) = 0,$$

(indem man nämlich für X und Y die oben bestimmten Werthe setzt) welche Gleichung zeigt, daſs keine Drehung um die Axe Z statt findet. Man hat aber in Bezug auf Drehung um die Axe Y, da die Kraft $- Q \cdot \sin A$ keine Drehung um diese Axe bewirkt, insofern sie mit derselben parallel ist:

$$\Sigma(K \cos\alpha \cdot z) - Q \cdot \cos A \cdot Z' = 0$$

(wenn man für Z' den oben angenommenen Werth setzt), und ebenso findet man in Bezug auf Drehung um die Axe X:

$$\Sigma(K \cdot \sin\alpha \cdot z) - Q \cdot \sin A \cdot Z = 0.$$

Man sieht also:

I. w e n n K r ä f t e i n p a r a l l e l e n E b e n e n w i r k e n, o h n e s e l b s t p a r a l l e l z u s e i n, u n d w e n n d i e K r ä f t e w e d e r i n B e z u g a u f f o r t s c h r e i t e n d e B e w e g u n g n o c h i n B e z u g a u f d r e h e n d e B e w e g u n g i m G l e i c h g e w i c h t s i n d: s o i s t d i e W i r-

*) Der Punkt q' ist in der Figur normal über oder unter dem Punkt q liegend zu denken; er deckt sich also mit dem Punkte q und konnte daher nicht besonders bezeichnet werden.

kung der Kräfte im Allgemeinen nur auf zwei Resultirende zurückzuführen, deren eine parallel mit der Axe der X ist, und der Gröfse nach durch den Werth $Q.\cos A = \Sigma(K.\cos\alpha)$ gegeben ist, wobei ihr Angriffspunkt die Koordinaten

$$120\text{a})\ \begin{cases} X = \dfrac{\Sigma(KR_{\prime\prime\prime})}{Q}.\sin A = \dfrac{[\Sigma(KR_{\prime\prime\prime})]\,[\Sigma(K.\sin\alpha)]}{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K.\sin\alpha)]^2} \\ Y = \dfrac{\Sigma(KR_{\prime\prime\prime})}{Q}.\cos A = \dfrac{[\Sigma(KR_{\prime\prime\prime})]\,[\Sigma(K.\cos\alpha)]}{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K.\sin\alpha)]^2} \\ Z' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha.z)}{Q.\cos A} = \dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha.z)}{\Sigma(K.\cos\alpha)} \end{cases}$$

hat, während die andere parallel mit der Axe der Y ist, sich durch $Q.\sin A = \Sigma(K.\sin\alpha)$ ausdrückt, und ihr Angriffspunkt durch die Koordinaten X und Y, welche dieselben wie die der ersten Kraft sind, und durch die Ordinate

$$120\text{b})\ \Big\{\ Z = \frac{\Sigma(K.\sin\alpha.z)}{Q.\sin A} = \frac{\Sigma(K.\sin\alpha.z)}{\Sigma(K.\sin\alpha)}$$

gegeben ist.

Beachtet man, dafs die Axen X und Y ganz beliebig angenommen sind, nur durch die Bedingung bestimmt, dafs sie zu einander normal, und dafs sie in einer mit den Ebenen der Kräfte parallelen Ebene liegen sollen, so ergiebt sich, dafs die Wirkung sämmtlicher Kräfte in dem behandelten Falle sich immer auf zwei Resultirende zurückführen läfst, die in zwei mit den Kräften parallelen Ebenen liegen, zu einander normal sind, in den Ebenen aber gegen die Richtungen der gegebenen Kräfte eine ganz beliebige Lage haben können. Nimmt man diese Lage an, so sind die Axen beziehlich parallel mit den angenommenen Richtungen der beiden Resultirenden zu legen, und nun sind die Resultirenden und ihre Angriffspunkte durch die Gleichungen 120, 120a und 120b) zu bestimmen.

Wenn sich der Fall auf eine einzige Resultirende zurückführen lassen soll, so mufs sein:

$$Z = Z',$$

oder nach 120a) und 120b):

$$\frac{\Sigma(K.\cos\alpha.z)}{\Sigma(K.\sin\alpha.z)} = \frac{\Sigma(K.\cos\alpha)}{\Sigma(K.\sin\alpha)};$$

dies ist im Allgemeinen nur möglich, wenn entweder:

1) der Werth z sämmtlichen Summanden ein gemeinschaftlicher Faktor ist, der sich dann links fortheben läfst, d. h. wenn die Kräfte sämmt-

lich in ein und derselben Ebene liegen, und weder in Bezug auf fortschreitende noch in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind, oder:

2) wenn die Kräfte sämmtlich parallel sind, wobei sie in verschiedenen Ebenen liegen können, aber dabei nicht von Hause aus in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sein dürfen (vergl. § 74. S. 105), denn in diesem Falle ist $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ rechts und links in der Gleichung ein gemeinschaftlicher Faktor für alle Summanden, und die Gleichung wird vollkommen erfüllt. Wären aber die Kräfte in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht, so ginge die rechte Seite der Gleichung in die Form $\frac{0}{0}$ über, woraus sich nicht der Schlufs ziehen läfst, dafs nun auch $Z = Z'$ sein müsse.

Uebrigens läfst sich der in diesem Paragraphen behandelte allgemeine Fall auch zurückführen auf eine Resultirende und auf ein Kräftepaar. Denn (vgl. die Figur auf S. 109) bringen wir z. B. in dem Punkte q', der durch die Koordinaten X, Y, Z' (Gleichung 120a) gegeben ist, und in welchem die Resultirende $Q \cdot \cos A = \Sigma(K \cdot \cos\alpha)$ wirksam ist, zwei gleich grofse, der Richtung nach aber entgegengesetzte Kräfte an, welche parallel mit der Richtnng der Kraft $Q \cdot \sin A$, folglich normal zu der Richtung der in dem Punkte q' wirkenden Kraft $Q \cdot \cos A$ sind, und deren eine gleich $+ Q \cdot \sin A$, die andere gleich $- Q \cdot \sin A$ ist, so wird in dem System in Bezug auf Gleichgewicht nichts geändert; nun aber läfst sich die Kraft $+ Q \cdot \sin A$ und $+ Q \cdot \cos A$ vereinigen zu der Resultirenden Q und es bleibt in dem Punkt q' somit wirksam die Kraft Q und die Kraft $- Q \cdot \sin A$, welche mit der Kraft $Q \cdot \sin A$ in dem Punkt q, der durch die Koordinaten X, Y, Z (Gleichung 120b) gegeben ist, parallel ist, folglich in einer Ebene liegt, und auch der Gröfse nach gleich, aber entgegengesetzt ist. Diese beiden Kräfte bilden also ein Kräftepaar. In ganz gleicher Weise kann man das System zurückführen auf die Kraft Q, welche in dem Punkte q angreift, und auf ein Kräftepaar $+ Q \cdot \cos A$ und $- Q \cdot \cos A$, von dem die Kraft $- Q \cdot \cos A$ in dem Punkte q wirksam zu denken ist. Da nun die Richtung der Axen X und Y in der dritten Projektionsebene beliebig zu nehmen ist (vergl. oben), so ist auch die Lage der Ebene, in welcher das Kräftepaar wirksam zu denken ist, gegen die Richtung von Q beliebig zu nehmen, nur mufs sie normal sein zu den Parallelebenen, in welchen die Kräfte liegen. Es ist also der behandelte Fall immer zurückzuführen:

II. auf eine der Gröfse und Richtung nach (Gleichung 119) bestimmte Kraft Q, deren Angriffspunkt durch die Koordinaten-Gleichung 120a) zu bestimmen ist, und auf ein Kräftepaar, welches in einer zu den Ebenen der Kräfte normalen Ebene liegt, die mit der Richtung von Q einen beliebig angenommenen Winkel A bildet. Die Kräfte dieses Kräftepaares sind $+Q \,.\, \cos A$ und $-Q \,.\, \cos A$, und es ist die Kraft $-Q \,.\, \cos A$ in demselben Angriffspunkt wirksam zu denken, in welchem die Kraft Q wirkt, während die Kraft $+Q \,.\, \cos A$ in einem normalen Abstande von diesem Angriffspunkt wirksam zu denken ist, der gleich:

$$121)\ Z' - Z = \frac{\Sigma(K \,.\, \cos\alpha \,.\, z)}{\Sigma(K \,.\, \cos\alpha)} - \frac{\Sigma(K \,.\, \sin\alpha \,.\, z)}{\Sigma(K \,.\, \sin\alpha)}$$

ist; wobei unter $\alpha \ldots.$ die Winkel zu verstehen sind, welche die Richtungen der Kräfte $K\ldots$ mit der Ebene machen, in welcher das Kräftepaar liegt; da nämlich diese Ebene parallel mit derselben Axe angenommen worden, mit welcher die Kräfte die Winkel $\alpha \ldots.$ bilden. Das Moment dieses Kräftepaares ist offenbar:

$$121a)\ Q \,.\, \cos A \,.\, (Z' - Z) = \Sigma(K \,.\, \cos\alpha \,.\, z) - \Sigma(K \,.\, \sin\alpha \,.\, z) \,.\, \operatorname{cotg} A$$

$$= \Sigma(K \,.\, \cos\alpha \,.\, z) - \Sigma(K \,.\, \sin\alpha \,.\, z) \frac{\Sigma(K \,.\, \cos\alpha)}{\Sigma(K \,.\, \sin\alpha)},$$

welches mit Benutzung der Gleichungen 121) und 119) folgt, und worin $\alpha \ldots.$ die Winkel bezeichnen, welche die einzelnen Kräfte mit der Ebene machen, in welche das Kräftepaar liegt.

Sind die Kräfte parallel, so folgt, wie leicht ersichtlich, das Moment des Kräftepaars gleich Null, und man kann das System auf eine Resultirende zurückführen.

Da nun der Winkel, welchen das Kräftepaar mit der Richtung von Q macht, ein beliebiger sein kann, so kann man ihn auch gleich einem Rechten nehmen, d. h. man kann auch die eine der beiden Axen mit der Resultirenden Q parallel, die andere normal zu derselben nehmen. Allein für diesen Fall reichen die Gleichungen 120), 120a) und 120b) nicht aus, um die Lage der Angriffspunkte zu bestimmen, da dieselben für $A = 90$ Grad $\cos A = 0$, folglich die Ordinate $Z' = \infty$ liefern würden. Man sieht leicht, wie in diesem Fall zu verfahren ist. Nehmen wir die erste Axe normal zur Resultirenden der fortschreitenden Bewegung und folglich die zweite Axe parallel mit dieser Richtung, so folgt (Gleichung 119):

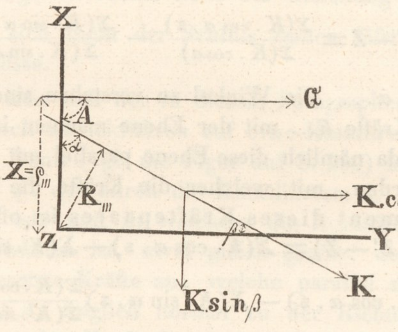
$$Q = \Sigma(K \,.\, \sin\alpha)$$
$$\Sigma(K \,.\, \cos\alpha) = 0,$$

worin $\alpha\ldots.$ die Winkel bezeichnen, welche die Kräfte mit der ersten Axe machen. Führt man lieber die Winkel $\beta\ldots.$ ein, welche die Kräfte mit der zweiten Axe, oder was dasselbe ist, mit der Richtung von Q machen, so hat man:

$$122)\ \begin{aligned} Q &= \Sigma(K.\cos\beta) \\ \Sigma(K.\sin\beta) &= 0. \end{aligned}$$

Soll nun die Kraft Q so liegen, dafs sie auch Gleichgewicht gegen drehende Bewegung herstellt*), so hat man in Bezug auf Drehung um die Axe Z:

$$122\text{a})\ \Sigma(KR_{\prime\prime\prime}) - Q.X = 0,$$



in Bezug auf Drehung um die Axe XZ:

$$122\text{b})\ \Sigma(K.\cos\beta.z) - Q.Z = 0.$$

Allein in Bezug auf Drehung um die Axe ZY kann die Kraft Q unter keinen Umständen das Gleichgewicht herstellen, da sie parallel mit dieser Axe ist; man mufs also, um dieses Gleichgewicht herzustellen, und dabei andrerseits nicht das Gleichgewicht in Bezug auf fortschreitende Bewegung zu stören, zwei neue Kräfte $+P$ und $-P$ einführen, welche in einer Ebene liegen, die normal zu der Axe ZY ist, und welche die Bedingungs-Gleichung erfüllen:

$$122\text{c})\ \begin{aligned} \Sigma(K.\sin\beta.z) + P.Z' - P.Z'' &= 0. \\ \Sigma(K.\sin\beta.z) - P(Z'' - Z') &= 0. \end{aligned}$$

III. Man kann also den Fall, dafs die Kräfte, welche auf ein festes System wirken, zwar in parallelen Ebenen liegen, aber nicht selbst parallel sind, während unter ihnen weder in Bezug auf fortschreitende noch in Bezug auf drehende Bewegung Gleichgewicht statt fin-

*) Vergl. S. 90.

det, immer auf eine Kraft Q, welche der Richtung und Gröſse nach durch die Gleichungen 119) gegeben ist, und auf ein Kräftepaar, welches in einer zu der Richtung Q normalen Ebene liegt, zurückführen.

Hat man Q der Richtung und Gröſse nach bestimmt, so findet man die Koordinaten des Angriffspunktes, nämlich

1) den Abstand X von einer mit der Richtung von Q parallelen und zu den Parallelebenen der Kräfte normalen Ebene (ZY) aus 122a):

$$X = \frac{\Sigma(KR_{\prime\prime\prime})}{Q} = \frac{\Sigma(KR_{\prime\prime\prime})}{\Sigma(K.\cos\beta)},$$

worin $R_{\prime\prime\prime}$ die kürzesten Abstände der Kraftrichtungen K... von einer in dieser Ebene liegenden, zu den Parallelebenen der Kräfte normalen Axe bezeichnet,

2) den Abstand der Ebene, in welcher Q liegt, und welche mit den Ebenen der Kraftrichtungen parallel ist, von irgend einer mit dieser Ebene parallelen Ebene (Grundebene): 122b):

$$Z = \frac{\Sigma(K.\cos\beta.z)}{Q} = \frac{\Sigma(K.\cos\beta.z)}{\Sigma(K.\cos\beta)},$$

worin β.... den Winkel bezeichnet, welchen die Kraftrichtungen mit der Richtung von Q machen, z.... aber die Abstände der Angriffspunkte der Kräfte von der Grundebene sind.

3) Die Koordinate Y, welche die Lage des Angriffspunktes von Q in der Richtung der Kraft Q angeben würde, bleibt unbestimmt, und man kann folglich jeden Punkt der Kraftrichtung Q, als Angriffspunkt betrachten.

4) Für die Bestimmung des Kräftepaars hat man die Bedingung, daſs dasselbe in einer Ebene liegen müsse, welche zu der Richtung der Kraft Q normal ist, und die Gleichung 122c), aus welcher folgt für das Moment des Kräftepaars:

$$P(Z'' - Z') = \Sigma(K.\sin\beta.z),$$

so daſs man von den beiden Werthen P und $(Z'' - Z')$ einen beliebig annehmen kann. Dieser Ausdruck folgt auch aus der allgemeinen Gleichung 121a), indem man beachtet, daſs $\Sigma(K.\cos\alpha) = 0$ ist.

Betrachten wir nun den Fall:

B. daſs die Kräfte zwar in Bezug auf drehende Bewegung, nicht aber in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind.

Die Resultirende gegen fortschreitende Bewegung ist der Lage und Richtung nach auch in diesem Falle durch die Gleichungen 119) zu bestimmen, da aber zufolge der Bedingung, dafs die Kräfte gegen drehende Bewegung im Gleichgewicht sein sollen, ihre Momente für drei Axen gleich Null sind, so folgt nach Gleichung 119a) auch $\varrho_{,} = 0$, $\varrho_{,,} = 0$, $\varrho_{,,,} = 0$, d. h. der Angriffspunkt der Resultirenden mufs im Anfangspunkte des Koordinatensystems liegen, oder so dafs er den Bedingungen entspricht, welche in Folge der Gleichungen 117) für den analogen Fall paralleler Kräfte aufgestellt worden sind (S. 104). In diesem Fall ist also eine Resultirende denkbar.

C. Wenn endlich auf ein festes System Kräfte wirken, deren Richtungslinien zwar in parallelen Ebenen liegen, aber nicht unter einander parallel sind, und wenn die Kräfte zwar in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind, aber nicht in Bezug auf drehende Bewegung, so läfst sich die Wirkung der Kräfte immer nur auf ein Kräftepaar zurückführen.

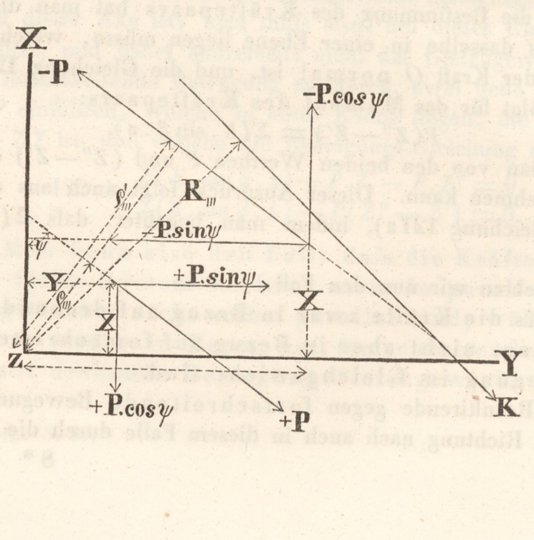
Die Gleichungen 119) nehmen für den gegebenen Fall die Form an:

$$\Sigma(K \,.\, \sin\alpha) = 0; \quad \Sigma(K \,.\, \cos\alpha) = 0,$$

und die Gleichungen in Bezug auf Drehung haben die Form:

$$\Sigma(K \,.\, \sin\alpha \,.\, z) = A, \quad \Sigma(K \,.\, \cos\alpha \,.\, z) = B, \quad \Sigma(K \,.\, R_{,,,}) = C,$$

wenn wir die früheren Bezeichnungen, und die zu Anfange dieses Paragraphen angenommene Lage der Koordinatenebenen gelten lassen. Man sieht leicht, dafs das Gleichgewicht gegen drehende Bewegung nur durch ein Kräftepaar $+P$ und $-P$ herzustel-



len ist, dessen Kräfte in Ebenen liegen, die mit den Parallelebenen der Kräfte parallel sind, denn wollte man nur eine einzige Kraft einführen, so würde durch dieselbe das Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung gestört werden. Bezeichnen wir den Abstand des Angriffspunkts von $+P$ von der Grundebene mit Z, denjenigen von $-P$ mit Z', den Winkel, welcher die Richtung von P mit der ersten Axe macht, mit ψ; ferner den Hebelsarm in Bezug auf die Axe Z von $+P$ mit ϱ_{III}, denjenigen von $-P$ mit ϱ'_{III}, so folgt, wenn die Kräfte $+P$ und $-P$ die Resultirenden der drehenden Bewegung sein sollen:

$$\text{a)}\ \Sigma(K.\sin\alpha.z) = P.\sin\psi\,(Z-Z'),$$

$$\text{b)}\ \Sigma(K.\cos\alpha.z) = P.\cos\psi\,(Z-Z'),$$

$$\text{c)}\ \Sigma(KR_{III}) = P(\varrho_{III}-\varrho'_{III}).$$

Aus den Gleichungen a) und b) folgt:

$$123)\ \operatorname{tang}\psi = \frac{\Sigma(K.\sin\alpha.z)}{\Sigma(K.\cos\alpha.z)},$$

durch welche Gleichung die Lage der **Durchschnittslinie** der Ebene, welche man durch die Kraftrichtungen des Kräftepaars legen kann, mit der **Grundebene** (ersten Projektionsebene) gegen die Axen XZ und YZ vollkommen bestimmt ist. Nennen wir nun den Neigungswinkel der Ebene, in welcher das Kräftepaar liegt, mit der Grundebene φ, so ist, wie leicht ersichtlich:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{(Z-Z')}{(\varrho_{III}-\varrho'_{III})} = \frac{(Z-Z')}{\Sigma(KR_{III})}.\frac{1}{P};$$

(vermöge Gleichung c). Indem wir aber die Gleichungen a) und b) quadriren, addiren, und $Z-Z'$ entwickeln, folgt:

$$(Z-Z') = \frac{1}{P}.\sqrt{\left\{[\Sigma(K.\sin\alpha.z)]^2 + [\Sigma(K.\cos\alpha.z)]^2\right\}}$$

$$123\text{a)}\ \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{\left\{[\Sigma(K.\sin\alpha.z)]^2 + [\Sigma(K.\cos\alpha.z)]^2\right\}}}{\Sigma(KR_{III})}.$$

Durch die Gleichungen 123 und 123a) ist die Lage der Ebene, in welcher das Kräftepaar wirksam zu denken ist, der Richtung nach vollkommen bestimmt. Der kürzeste Abstand der beiden Kraftrichtungen $+P$ und $-P$ ist aber, wie die Figur leicht übersehen läfst, gleich

$$\sqrt{\left\{(Z-Z')^2 + (\varrho_{III}-\varrho'_{III})^2\right\}},$$

und indem wir die Werthe für $(Z-Z')^2$ und $(\varrho_{III}-\varrho'_{III})^2$ einsetzen und mit P multipliziren, folgt das **Moment des Kräftepaars**:

$$123\text{b)}\ \sqrt{\left\{[\Sigma(K.\sin\alpha.z)]^2 + [\Sigma(K.\cos\alpha.z)]^2 + [\Sigma(KR_{III})]^2\right\}}.$$

Bezeichnen wir den Abstand der beiden Kraftrichtungen mit a, die Koordinaten des Angriffspunktes der einen von beiden Gegenkräften $(+P)$ mit X, Y, Z, so sind, wie sich leicht übersehen läfst, die Koordinaten des Angriffspunkts der andern Gegenkraft $(-P)$:

$$123\text{c})\quad Z' = Z + a.\sin\varphi;\quad Y' = Y + a.\cos\varphi.\cos\psi;$$
$$X' = X + a.\cos\varphi.\sin\psi.$$

Für den Fall, dafs sämmtliche Kraftrichtungen parallel sind, folgt aus 123), 123a) und 123b):

$$124)\ \begin{cases} \operatorname{tang}\psi = \operatorname{tang}\alpha \\ \operatorname{tang}\varphi = \dfrac{\Sigma(Kz)}{\Sigma(K.R_{,,,})}, \end{cases}$$

und das Moment des Kräftepaars:

$$124\text{a})\quad \sqrt{\left\{[\Sigma(Kz)]^2 + [\Sigma(KR_{,,,})]^2\right\}},$$

in welchen Gleichungen z die Abstände der Angriffspunkte der einzelnen parallelen Kräfte von einer beliebigen mit ihrer Richtung parallelen Ebene und $R_{,,,}$ die Hebelsarme in Bezug auf eine beliebige, und zu dieser Ebene normale, Axe bezeichnen.

In dem Falle endlich, wo sämmtliche Kräfte in ein und derselben Ebene liegen, folgt:

$$125)\ \begin{cases} \operatorname{tang}\psi = \dfrac{z.\Sigma(K.\sin\alpha)}{z.\Sigma(K.\cos\alpha)} = \dfrac{0}{0} \\ \operatorname{tang}\varphi = 0, \end{cases}$$

und das Moment des Kräftepaares:

$$125\text{a}) = \Sigma(K.R_{,,,}),$$

d. h. in diesem Fall bleibt die Neigung des Kräftepaares (Winkel ψ) gegen die Axe XZ unbestimmt und kann beliebig genommen werden, das Kräftepaar, welches für die Wirkung der Kräfte substituirt werden kann, liegt in derselben Ebene, in welcher die Kräfte liegen, $(\varphi = 0)$ und es ist das Moment des Kräftepaares gleich der Summe der Momente sämmtlicher auf Drehung wirkenden Kräfte in Bezug auf eine beliebige zur Ebene der Kräfte normale Axe.

Bestimmung der Resultirenden und ihres Angriffspunktes für Kräfte, welche auf ein festes System wirken, und deren Richtungslinien eine beliebige Lage haben.

§ 76. Wir wenden uns nun zu dem allgemeinsten Fall, nämlich zu dem, dafs auf ein festes System beliebige Kräfte in ganz beliebigen Richtungen wirken, und dafs es darauf ankommt, ihre Resultirende der Gröfse und Richtung nach zu bestimmen.

Wenn zunächst:

A. die Kräfte weder in Bezug auf drehende noch in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind:

so können wir, indem wir drei beliebige Koordinatenebenen annehmen, die Resultirende der fortschreitenden Bewegung Q der Gröfse und Richtung nach bestimmen nach § 71 und mittelst der Gleichungen 110) und 111).

Um nun aber den Angriffspunkt der Resultirenden zu finden, denken wir uns sämmtliche Kräfte in den einzelnen Angriffspunkten nach drei zu einander normalen Richtungen zerlegt, die Komponenten parallel mit den drei Axen sind dann:

$$K.\cos\alpha \ldots, \quad K.\cos\beta \ldots, \quad K.\cos\gamma \ldots,$$

Nun haben wir drei Gruppen paralleler Kräfte, für die wir nach § 74 und Gleichung 117a) drei Resultirende einführen können. Es seien $Q_{,}$ die Resultirende aller parallelen Kräfte $K.\cos\alpha\ldots$ und X, Y, Z die Koordinaten ihres Angriffspunktes; in ähnlicher Weise bezeichnen $Q_{,,}$ und $Q_{,,,}$ die Resultirenden der parallelen Kräfte $K.\cos\beta \ldots$ und $K.\cos\gamma \ldots$ und $X_{,,}$, $Y_{,,}$, $Z_{,,}$ beziehlich $X_{,,,}$, $Y_{,,,}$, $Z_{,,,}$ die Koordinaten ihrer Angriffspunkte. Wir haben dann:

$$126)\left\{\begin{array}{lll} Q_{,}=\Sigma(K.\cos\alpha), & Q_{,,}=\Sigma(K.\cos\beta), & Q_{,,,}=\Sigma(K.\cos\gamma) \\ X_{,}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha.x)}{\Sigma(K.\cos\alpha)}, & X_{,,}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\beta.x)}{\Sigma(K.\cos\beta)}, & X_{,,,}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\gamma.x)}{\Sigma(K.\cos\gamma)} \\ Y_{,}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha.y)}{\Sigma(K.\cos\alpha)}, & Y_{,,}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\beta.y)}{\Sigma(K.\cos\beta)}, & Y_{,,,}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\gamma.y)}{\Sigma(K.\cos\gamma)} \\ Z_{,}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha.z)}{\Sigma(K.\cos\alpha)}, & Z_{,,}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\beta.z)}{\Sigma(K.\cos\beta)}, & Z_{,,,}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\gamma.z)}{\Sigma(K.\cos\gamma)}. \end{array}\right.$$

Diese Gleichungen zeigen folgendes Gesetz:

I. Wenn auf ein festes System beliebig viele Kräfte einwirken, welche weder in Bezug auf fortschreitende noch in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind, so läfst sich ihre Wirkung immer auf drei einzelne Kräfte zurückführen, deren Richtungen einzeln parallel sind mit drei beliebig angenommenen zu einander normalen Axen, und deren Angriffspunkte vollständig durch die Gleichung 126) bestimmt sind.

Da nun die Richtung der Resultirenden der fortschreitenden Bewegung Q durch die Gleichungen 110) und 111) vollkommen bestimmt ist, so können wir jede dieser drei Kräfte, auf welche wir so eben das System zurückgeführt haben, zerlegen nach zwei Richtungen, von welchen eine parallel mit der Richtung von Q, die andere aber normal dazu ist, wir erhalten dann zwei Gruppen von Kräften, nämlich eine Gruppe, bestehend aus drei Kräften, die unter sich und mit der Richtung von Q parallel sind, und eine andere Gruppe von drei Kräften, welche in Ebenen liegen, die normal zu der Richtung von Q sind, welche folglich in parallelen Ebenen liegen. Da die Resultirende mit den Axen die Winkel A, B, Γ bildet, so bildet sie dieselben Winkel der Reihe nach auch mit den drei Kräften $Q_{\prime}, Q_{\prime\prime}, Q_{\prime\prime\prime}$, welche der Reihe nach mit diesen Axen parallel sind. Hiernach haben wir die beiden Gruppen:

parallel mit Q:	normal zu Q:
$Q_{\prime}\,.\cos A = Q\,.\cos A^2$,	$Q_{\prime}\,.\sin A = Q\,.\cos A\,.\sin A$,
$Q_{\prime\prime}\,.\cos B = Q\,.\cos B^2$,	$Q_{\prime\prime}\,.\sin B = Q\,.\cos B\,.\sin B$,
$Q_{\prime\prime\prime}\,.\cos \Gamma = Q\,.\cos \Gamma^2$,	$Q_{\prime\prime\prime}\,.\sin \Gamma = Q\,.\cos \Gamma\,.\sin \Gamma$.

Die Kräfte der ersten Gruppe lassen sich durch die Gleichungen 110) und 111) vereinigen. Es ist ihre Resultante (Gleichung 110), 111) und 112):

$$Q_{\prime}\,.\cos A + Q_{\prime\prime}\,.\cos B + Q_{\prime\prime\prime}\,.\cos \Gamma =$$

$$\frac{[\Sigma(K\,.\cos\alpha)]^2}{Q} + \frac{[\Sigma(K\,.\cos\beta)]^2}{Q} + \frac{[\Sigma(K\,.\cos\gamma)]^2}{Q} =$$

$$127)\quad Q = \sqrt{\left\{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K.\cos\beta)]^2 + [\Sigma(K.\cos\gamma)]^2\right\}}.$$

Der Angriffspunkt dieser Resultante ergiebt sich nach 117a), wenn wir die Koordinaten mit X, Y, Z bezeichnen:

$$128)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{Q_{\prime}\,.\cos A\,.\,X_{\prime} + Q_{\prime\prime}\,.\cos B\,.\,X_{\prime\prime} + Q_{\prime\prime\prime}\,.\cos\Gamma\,.\,X_{\prime\prime\prime}}{Q_{\prime}\,.\cos A + Q_{\prime\prime}\,.\cos B + Q_{\prime\prime\prime}\,.\cos\Gamma} \\ Y &= \frac{Q_{\prime}\,.\cos A\,.\,Y_{\prime} + Q_{\prime\prime}\,.\cos B\,.\,Y_{\prime\prime} + Q_{\prime\prime\prime}\,.\cos\Gamma\,.\,Y_{\prime\prime\prime}}{Q_{\prime}\,.\cos A + Q_{\prime\prime}\,.\cos B + Q_{\prime\prime\prime}\,.\cos\Gamma} \\ Z &= \frac{Q_{\prime}\,.\cos A\,.\,Z_{\prime} + Q_{\prime\prime}\cos B\,.\,Z_{\prime\prime} + Q_{\prime\prime\prime}\,.\cos\Gamma\,.\,Z_{\prime\prime\prime}}{Q_{\prime}\,.\cos A + Q_{\prime\prime}\,.\cos B + Q_{\prime\prime\prime}\,.\cos\Gamma} \end{aligned}\right.$$

Setzen wir in diese Gleichungen die Werthe der Gleichungen 126) für $Q_{\prime}, Q_{\prime\prime}, Q_{\prime\prime\prime}$; $X_{\prime}, X_{\prime\prime}, X_{\prime\prime\prime}$ etc., so ergiebt sich mit Berücksichtigung, dafs nach Gleichung 111)

$$\cos A = \frac{\Sigma(K\,.\cos\alpha)}{Q},\quad \cos B = \frac{\Sigma(K.\cos\beta)}{Q},\quad \cos\Gamma = \frac{\Sigma(K\,.\cos\gamma)}{Q}$$

ist:

128a)

$$X=\frac{\Sigma(K.\cos\alpha.x).\Sigma(K.\cos\alpha)+\Sigma(K.\cos\beta.x).\Sigma(K.\cos\beta)+\Sigma(K.\cos\gamma.x).\Sigma(K.\cos\gamma)}{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2+[\Sigma(K.\cos\beta)]^2+[\Sigma(K.\cos\gamma)]^2}$$

$$Y=\frac{\Sigma(K.\cos\alpha.y).\Sigma(K.\cos\alpha)+\Sigma(K.\cos\beta.y).\Sigma(K.\cos\beta)+\Sigma(K.\cos\gamma.y).\Sigma(K.\cos\gamma)}{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2+[\Sigma(K.\cos\beta)]^2+[\Sigma(K.\cos\gamma)]^2}$$

$$Z=\frac{\Sigma(K.\cos\alpha.z).\Sigma(K.\cos\alpha)+\Sigma(K.\cos\beta.z).\Sigma(K.\cos\beta)+\Sigma(K.\cos\gamma.z).\Sigma(K.\cos\gamma)}{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2+[\Sigma(K.\cos\beta)]^2+[\Sigma(K.\cos\gamma)]^2}$$

Es ist übrigens leicht zu übersehen, dafs der hier bestimmte Angriffspunkt der Resultirenden dieser drei parallelen Kräfte in der Ebene liegen mufs, welche durch die Angriffspunkte der drei Kräfte gelegt werden kann, denn läge er aufserhalb dieser Ebene und zerlegte man die sämmtlichen Kräfte in zwei andere, parallel und normal zu der Ebene, so würde diejenige Komponente der Mittelkraft, welche parallel mit der Ebene ist, und deren Angriffspunkt aufserhalb der Ebene läge, einen Hebelsarm in Bezug auf eine in der Ebene liegende, und die Richtungen der Komponenten der drei Kräfte, deren Angriffspunkte in der Ebene liegen, schneidende Axe haben, während diese Komponenten einen Hebelsarm in Bezug auf diese Axe nicht hätten; es würde also durch die Mittelkraft Gleichgewicht gegen drehende Bewegung nicht hergestellt werden.

Betrachten wir jetzt die zweite Gruppe der Komponenten, deren Richtungen in Ebenen liegen, welche zur Richtung der Resultirenden der fortschreitenden Bewegung normal sind, so können diese Kräfte keine fortschreitende Bewegung bedingen, wohl aber ist eine drehende Bewegung denkbar. Wir haben es also mit Kräften zu thun, die dem im vorigen Paragraphen unter C. behandelten Fall entsprechen, und für welche ein Kräftepaar substituirt werden kann. Um die Verhältnisse dieses Kräftepaares zu bestimmen, denken wir uns irgend eine Ebene, welche normal zu der Richtung von Q ist, nennen den normalen Abstand des Angriffspunktes $Q_{\prime}$ von dieser Ebene $Z_{\prime}^{0}$, den normalen Abstand der Angriffspunkte $Q_{\prime\prime}$ und $Q_{\prime\prime\prime}$ von derselben Ebene $Z_{\prime\prime}^{0}$, $Z_{\prime\prime\prime}^{0}$, denken ferner in der Ebene eine beliebige Axe, und bezeichnen die Winkel, welchen die Richtungslinien von $Q_{\prime}.\sin A$ mit dieser Axe bildet mit $\alpha_{\prime}^{0}$, ebenso die Winkel, welche die Richtungslinien der Kräfte $Q_{\prime\prime}.\sin B$ und $Q_{\prime\prime\prime}.\sin\Gamma$ mit derselben Axe bilden mit $\alpha_{\prime\prime}^{0}$, $\alpha_{\prime\prime\prime}^{0}$, so ergiebt sich der Neigungswinkel der Durchschnittslinie der Ebene des Kräftepaars mit jener Axe ψ nach 123:

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{Z_{,}{}^{0} Q_{,} . \sin A . \sin \alpha_{,}{}^{0} + Z_{,,}{}^{0} Q_{,,} . \sin B . \sin \alpha_{,,}{}^{0} + Z_{,,,}{}^{0} Q_{,,,} . \sin \Gamma . \sin \alpha_{,,,}{}^{0}}{Z_{,}{}^{0} Q_{,} . \sin A . \cos \alpha_{,}{}^{0} + Z_{,,}{}^{0} Q_{,,} . \sin B . \cos \alpha_{,,}{}^{0} + Z_{,,,}{}^{0} Q_{,,,} . \sin \Gamma . \cos \alpha_{,,,}{}^{0}}$$

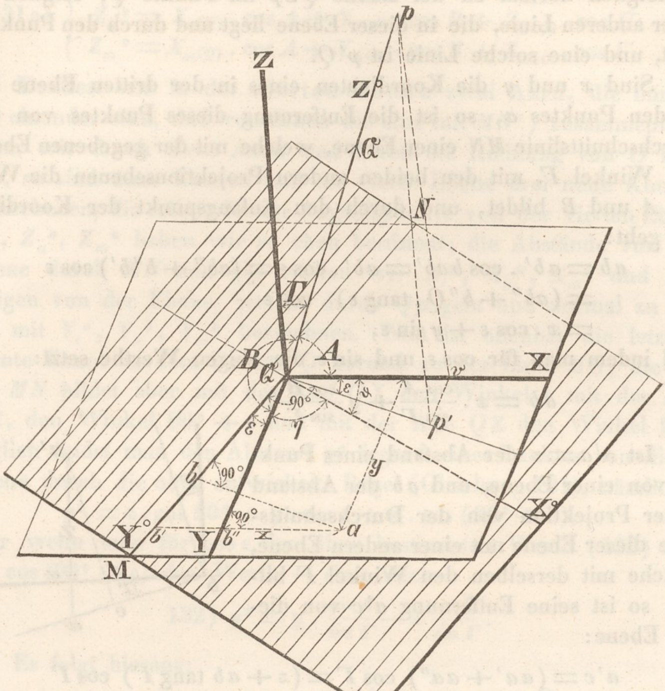
und in ähnlicher Weise läfst sich der Neigungswinkel φ der Ebene des Kräftepaares gegen die Richtung von Q nach 123a), sowie das Moment des Kräftepaares nach 123b) finden. Wollte man die in diesen Gleichungen vorkommenden Werthe analytisch ausdrücken, so kompliciren sich die Ausdrücke so sehr, dafs sie ihren Werth als Formeln für den Gebrauch verlieren, und es besser ist in jedem einzelnen Falle die Rechnung besonders durchzuführen. Um diese Rechnung zu erleichtern, dürfte folgender Weg zu empfehlen sein.

Wir verlegen den Anfangspunkt des ursprünglichen Koordinatensystems in den Angriffspunkt von Q. Es sind sodann die Koordinaten der drei Angriffspunkte $Q_{,}$, $Q_{,,}$, $Q_{,,,}$ durch die Gleichungen zu finden:

$$129)\quad \begin{cases} X_{,(Q)} = X_{,} - X, & Y_{,(Q)} = Y_{,} - Y, & Z_{,(Q)} = Z_{,} - Z, \\ X_{,,(Q)} = X_{,,} - X, & Y_{,,(Q)} = Y_{,,} - Y, & Z_{,,(Q)} = Z_{,,} - Z, \\ X_{,,,(Q)} = X_{,,,} - X, & Y_{,,,(Q)} = Y_{,,,} - Y, & Z_{,,,(Q)} = Z_{,,,} - Z. \end{cases}$$

Legen wir nun durch den Angriffspunkt von Q, also durch den Anfangspunkt des neuen Koordinatensystems eine Ebene normal zur Richtung von Q (vierte Ebene), so bildet diese Ebene mit den Ebenen, in welcheu die Axen X und Y liegen (dritte Ebene), den Winkel Γ mit der Ebene, in welcher die Axen X und Z (zweite Ebene) liegen, den Winkel B, und mit der Ebene, in welcher die Axen Y und Z (erste Ebene) liegen, den Winkel A; denn der Winkel, welchen zwei Ebenen bilden, wird gemessen durch den Winkel, welchen zwei Linien einschliefsen, die in einem Punkte der Durchschnittslinie einzeln normal auf den Ebenen sind. Der Angriffspunkt von Q ist aber ein Punkt der Durchschnittslinien der vier Ebenen, die Richtung Q ist normal auf der vierten Ebene, die Axe der Z ist normal auf der Ebene, in welcher die Axen der X und der Y liegen, folglich macht diese Ebene mit der vierten Ebene den Winkel, welcher die Richtung von Q mit der Axe der Z bildet, d. i. den Winkel Γ etc.

Projiciren wir die Richtung von Q auf die Ebene, in welcher die Axen der X und der Y liegen, und bezeichnen wir den Winkel, welcher die Projektion Qp' mit der Axe X bildet, mit ε, ziehen von $p_{,}$ die Normale $p'v$ auf die Axe X und verbinden pv, so ist auch pv normal zu QX, und daher:



130) $\cos\varepsilon = \frac{Qv}{Qp'} = \frac{Qp \cdot \cos A}{Qp \cdot \sin(Qpp')} = \frac{\cos A}{\sin(pQZ)} = \frac{\cos A}{\sin\Gamma}$.

Ebenso findet man:

$$\cos(p'QY) = \frac{\cos B}{\sin\Gamma} = \sin\varepsilon,$$

d. h. der Kosinus des Winkels, welchen die Projektion einer Linie auf eine Ebene mit einer in dieser Ebene liegenden Axe macht, ist gleich dem Quotienten aus dem Kosinus des Winkels, welchen die Linie selbst mit derselben Axe macht, durch den Sinus des Winkels, welchen die Linie mit einer zu der Ebene normalen Axe macht; ähnlich läfst sich eine Regel für den Sinus ableiten.

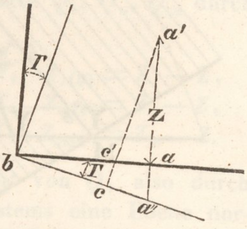
Die Durchschnittslinie MN, zwischen der vierten Ebene und der dritten Ebene, ist normal zu der Projektion Qp', denn, da sie in der vierten Ebene liegt, so ist sie normal auf pQ, und da sie auch in der dritten Ebene liegt, so ist sie normal zu QZ, sie ist folglich normal zu der Ebene QZp im Punkte Q, folglich zu jeder anderen Linie, die in dieser Ebene liegt und durch den Punkt Q geht, und eine solche Linie ist $p'Q$.

Sind x und y die Koordinaten eines in der dritten Ebene liegenden Punktes a, so ist die Entfernung dieses Punktes von der Durchschnittslinie MN einer Ebene, welche mit der gegebenen Ebene den Winkel Γ, mit den beiden andern Projektionsebenen die Winkel A und B bildet, und durch den Anfangspunkt der Koordinaten geht:

$$\begin{aligned} ab &= ab' \,.\, \cos bab' = ab' \,.\, \cos \varepsilon = (ab'' + b''b') \cos \varepsilon \\ &= (ab'' + b''Q \,.\, \operatorname{tang} \varepsilon) \,.\, \cos \varepsilon \\ &= x \,.\, \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon, \end{aligned}$$

und indem man für $\cos \varepsilon$ und $\sin \varepsilon$ die obigen Werthe setzt:

$$ab = x \,.\, \frac{\cos A}{\sin \Gamma} + y \frac{\cos B}{\sin \Gamma}.$$



Ist $a'a = z$ der Abstand eines Punktes von einer Ebene, und ab der Abstand seiner Projektion von der Durchschnittslinie dieser Ebene mit einer andern Ebene, welche mit derselben den Winkel Γ bildet, so ist seine Entfernung $a'c$ von dieser Ebene:

$$\begin{aligned} a'c &= (aa' + aa'') \cos \Gamma = (z + ab \operatorname{tang} \Gamma) \cos \Gamma \\ &= z \,.\, \cos \Gamma + ab \sin \Gamma. \end{aligned}$$

Setzen wir für ab den vorhin bestimmten Werth, und bezeichnen wir den Abstand $a'c$ mit z^0, so ist:

$$131) \quad z^0 = z \,.\, \cos \Gamma + x \cos A + y \cos B,$$

d. h. der Abstand eines Punktes, dessen Koordinaten x, y und z sind von einer Ebene, die im Anfangspunkt des Koordinatensystems normal steht auf einer durch den Anfangspunkt des Koordinaten gehenden, und mit den drei Koordinatenaxen die Winkel A, B, Γ bildenden Linie, ist gleich der Summe der Produkte, welche gebildet werden, wenn man jede der drei Koordinaten einzeln mit dem Kosinus des Winkels multiplizirt, welcher die Richtung jener Linie mit derjenigen Axe bildet, mit welcher die betreffende Koordinate parallel ist.

Hiernach hat man die Abstände der Angriffspunkte der Kräfte $Q_{\prime}$, $Q_{\prime\prime}$ und $Q_{\prime\prime\prime}$ von der Ebene, welche im Angriffspunkt von Q normal zu der Richtung der Mittelkraft Q gedacht ist:

$$131a)\left\{\begin{array}{l} Z_{\prime}{}^{0} = X_{\prime(\varrho)} \cdot \cos A + Y_{\prime(\varrho)} \cdot \cos B + Z_{\prime(\varrho)} \cdot \cos \Gamma \\ Z_{\prime\prime}{}^{0} = X_{\prime\prime(\varrho)} \cdot \cos A + Y_{\prime\prime(\varrho)} \cdot \cos B + Z_{\prime\prime(\varrho)} \cdot \cos \Gamma \\ Z_{\prime\prime\prime}{}^{0} = X_{\prime\prime\prime(\varrho)} \cdot \cos A + Y_{\prime\prime\prime(\varrho)} \cdot \cos B + Z_{\prime\prime\prime(\varrho)} \cdot \cos \Gamma. \end{array}\right.$$

Denken wir in der vierten Ebene zwei Axen, die normal auf einander sind, und von denen die eine mit MN*) zusammenfällt; legen wir durch diese Axen und durch die Richtung von Q Ebenen, so sind diese Ebenen und die vierte Ebene drei neue Koordinatenebenen, die Abstände der Angriffspunkte von der vierten Ebene $Z_{\prime}{}^{0}$, $Z_{\prime\prime}{}^{0}$, $Z_{\prime\prime\prime}{}^{0}$ haben wir so eben bestimmt; die Abstände von der Ebene durch MN und Qp wollen wir $X_{\prime}{}^{0}$, $X_{\prime\prime}{}^{0}$, $X_{\prime\prime\prime}{}^{0}$ und diejenigen von der Ebene, welche durch Qp geht und normal zu MN ist, mit $Y_{\prime}{}^{0}$, $Y_{\prime\prime}{}^{0}$, $Y_{\prime\prime\prime}{}^{0}$ bezeichnen. Nun ist offenbar die letztgenannte Ebene in dem Punkte Q normal zu der Linie MN; die Linie MN bildet aber mit der Axe QY den Winkel ε mit der Axe QX, den Winkel $90^{0} + \varepsilon$ und mit der Axe QZ den Winkel 90^{0}, folglich findet man den Abstand y^{0} irgend eines Punktes von dieser Ebene dnrch die oben entwickelte Regel (Gleichung 131), nämlich:

$$y^{0} = z \,.\, \cos 90^{0} + y \,.\, \cos \varepsilon + x \,.\, \cos (90^{0} + \varepsilon),$$

oder wenn man für $\cos \varepsilon$ den oben bestimmten Werth (130) und für $\cos (90^{0} + \varepsilon)$ den Werth $- \sin \varepsilon$ setzt:

$$132)\ y^{0} = y \,.\, \frac{\cos A}{\sin \Gamma} - x \frac{\cos B}{\sin \Gamma}.$$

Es folgt hieraus:

$$132a)\left\{\begin{array}{l} Y_{\prime}{}^{0} = Y_{\prime(\varrho)} \cdot \dfrac{\cos A}{\sin \Gamma} - X_{\prime(\varrho)} \cdot \dfrac{\cos B}{\sin \Gamma} \\ Y_{\prime\prime}{}^{0} = Y_{\prime\prime(\varrho)} \cdot \dfrac{\cos A}{\sin \Gamma} - X_{\prime\prime(\varrho)} \cdot \dfrac{\cos B}{\sin \Gamma} \\ Y_{\prime\prime\prime}{}^{0} = Y_{\prime\prime\prime(\varrho)} \cdot \dfrac{\cos A}{\sin \Gamma} - X_{\prime\prime\prime(\varrho)} \cdot \dfrac{\cos B}{\sin \Gamma}. \end{array}\right.$$

Die Linie Qp' erscheint offenbar als die Projektion derjenigen Axe, welche in der vierten Ebene liegt und in Q zu MN normal ist, auf die dritte Ebene. Bezeichnen wir den Winkel, welchen die genannte Axe mit der Axe QZ macht mit σ, den Winkel mit QY mit η und den Winkel mit QX mit ϑ, so ist nach der früher entwickelten Regel (130):

$$\cos \varepsilon = \frac{\cos \vartheta}{\sin \sigma}, \qquad \sin \varepsilon = \frac{\cos \eta}{\sin \sigma},$$

daraus folgt:

$$\cos \vartheta = \cos \varepsilon \,.\, \sin \sigma, \qquad \cos \eta = \sin \varepsilon \,.\, \sin \sigma.$$

*) Siehe die Figur auf S. 123.

Nun ist aber der Winkel σ offenbar gleich $90^\circ + \Gamma$ und daher $\sin\sigma = \cos\Gamma$, und indem wir für $\cos\varepsilon$ und $\sin\varepsilon$ die oben gefundenen Werthe setzen, ergiebt sich:

$$\cos\vartheta = \frac{\cos A \,.\, \cos\Gamma}{\sin\Gamma}, \qquad \cos\eta = \frac{\cos B \,.\, \cos\Gamma}{\sin\Gamma}.$$

Die Ebene, welche durch MN*) und Qp gelegt wird, ist aber normal auf der ebenerwähnten Axe, und da diese Axe mit den drei ersten Axen die Winkel σ, η und ϑ macht, so folgt der Abstand eines beliebigen Punktes von dieser Ebene (131):

$$x_0 = z \,.\, \cos\sigma + y \,.\, \cos\eta + z \,.\, \cos\vartheta,$$

und wenn man für $\cos\sigma$ setzt $\cos(90^\circ + \Gamma) = -\sin\Gamma$ und für $\cos\vartheta$ und $\cos\eta$ die eben bestimmten Werthe, so folgt:

$$x_0 = -z\sin\Gamma + y \,.\, \frac{\cos B \,.\, \cos\Gamma}{\sin\Gamma} + x \,.\, \frac{\cos A \,.\, \cos\Gamma}{\sin\Gamma},$$

oder durch eine leichte Umformung:

$$x_0 = \frac{z \,.\, \cos\Gamma^2 + y \,.\, \cos B \,.\, \cos\Gamma + x \,.\, \cos A \,.\, \cos\Gamma - z}{\sin\Gamma} = \frac{z_0 \cos\Gamma - z}{\sin\Gamma}.$$

Hiernach ist also:

133)

$$X_{\prime}{}^{0} = \frac{X_{\prime}(Q) \,.\, \cos A \,.\, \cos\Gamma + Y_{\prime}(Q) \,.\, \cos B \,.\, \cos\Gamma + Z_{\prime}(Q) \,.\, \cos\Gamma^2 - Z_{\prime}(Q)}{\sin\Gamma}$$

$$X_{\prime\prime}{}^{0} = \frac{X_{\prime\prime}(Q) \,.\, \cos A \,.\, \cos\Gamma + Y_{\prime\prime}(Q) \,.\, \cos B \,.\, \cos\Gamma + Z_{\prime\prime}(Q) \,.\, \cos\Gamma^2 - Z_{\prime\prime}(Q)}{\sin\Gamma}$$

$$X_{\prime\prime\prime}{}^{0} = \frac{X_{\prime\prime\prime}(Q) \,.\, \cos A \,.\, \cos\Gamma + Y_{\prime\prime\prime}(Q) \,.\, \cos B \,.\, \cos\Gamma + Z_{\prime\prime\prime}(Q) \,.\, \cos\Gamma^2 - Z_{\prime\prime\prime}(Q)}{\sin\Gamma},$$

oder:

$$133\text{a)} \quad X_{\prime}{}^{0} = \frac{Z_{\prime}{}^{0} \,.\, \cos\Gamma - Z_{\prime}(Q)}{\sin\Gamma}, \qquad X_{\prime\prime}{}^{0} = \frac{Z_{\prime\prime}{}^{0} \,.\, \cos\Gamma - Z_{\prime\prime}(Q)}{\sin\Gamma},$$

$$X_{\prime\prime\prime}{}^{0} = \frac{Z_{\prime\prime\prime}{}^{0} \,.\, \cos\Gamma - Z_{\prime\prime\prime}(Q)}{\sin\Gamma}.$$

Es kommt nur noch darauf an die Winkel $\alpha_{\prime}{}^{0}$, $\alpha_{\prime\prime}{}^{0}$, $\alpha_{\prime\prime\prime}{}^{0}$ zu bestimmen, welche die drei Kraftrichtungen $Q_{\prime} . \sin A$, $Q_{\prime\prime} . \sin B$, $Q_{\prime\prime\prime} . \sin\Gamma$ mit einer von den neuen, in der vierten Ebene liegenden Axen bilden. Wir wählen die Axe, welche normal zu MN ist, als diejenige, mit welcher die genannten zu bestimmenden Winkel gebildet werden, und nennen diese Axe die Axe der X^0. Jene drei Kraftrichtungen sind entstanden, indem man die Drucke $Q_{\prime}$, $Q_{\prime\prime}$, $Q_{\prime\prime\prime}$ nach der Richtung Q und normal dazu zerlegte, sie erscheinen also als die Projektionen der Kraftrichtungen $Q_{\prime}$, $Q_{\prime\prime}$, $Q_{\prime\prime\prime}$ auf die zu Q normale vierte Ebene, oder da diese letztgenannten Kraftrichtungen parallel mit den drei ersten Axen sind, als die Pro-

*) Siehe die Figur auf S. 123.

jektionen dieser drei Axen auf die vierte Ebene. Nun macht die Axe QX*) mit der angenommenen neuen Axe der X^0 den Winkel ϑ; mit der zu der Ebene, in welcher diese neue Axe liegt, normalen Axe Qp (Axe der Z^0) den Winkel A und mit der Axe MN (oder der Axe der Y^0) den Winkel $90^0+\varepsilon$.

Wir haben also nach dem Gesetz (130) auf S. 123 für den Winkel, welchen die Projektion von QX auf die vierte Ebene mit der Axe der X^0 macht, oder, was dasselbe ist, für den Winkel, welcher die Kraftrichtung $Q_{\prime}.\sin A$ mit der Axe der X^0 macht:

$$134)\left\{\begin{aligned}\cos\alpha_{\prime}{}^0 &= \frac{\cos\vartheta}{\sin A} = \frac{\cos A\,.\cos\Gamma}{\sin A\,.\sin\Gamma} = \operatorname{cotg} A\,.\operatorname{cotg}\Gamma\\ \sin\alpha_{\prime}{}^0 &= \frac{\cos(90^0+\varepsilon)}{\sin A} = \frac{-\sin\varepsilon}{\sin A} = \frac{-\cos B}{\sin A\,.\sin\Gamma}.\end{aligned}\right.$$

Ebenso findet man den Winkel, welchen die Projektion der Axe QY oder die Kraftrichtung $Q_{\prime\prime}.\sin B$ mit der Axe der X^0 macht, durch die Betrachtung, dafs die Axe QY mit der Axe der X^0 den Winkel η mit der Axe der Y^0 den Winkel ε und mit der Axe der Z^0 den Winkel B bildet:

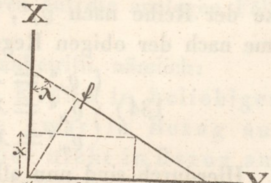
$$134\,a)\left\{\begin{aligned}\cos\alpha_{\prime\prime}{}^0 &= \frac{\cos\eta}{\sin\varepsilon} = \frac{\cos B\,.\cos\Gamma}{\sin B\,.\sin\Gamma} = \operatorname{cotg} B\,.\operatorname{cotg}\Gamma\\ \sin\alpha_{\prime\prime}{}^0 &= \frac{\cos\eta}{\sin B} = \frac{\cos A}{\sin B\,.\sin\Gamma},\end{aligned}\right.$$

und endlich ergiebt sich der dritte Winkel, da die Axe QZ mit der Axe der X^0, den Winkel $\sigma=90^0+\Gamma$; mit der Axe der Y^0 einen Rechten, und mit der Axe der Z^0 den Winkel Γ bildet:

$$134\,b)\left\{\begin{aligned}\cos\alpha_{\prime\prime\prime}{}^0 &= \frac{\cos(90^0+\Gamma)}{\sin\Gamma} = -1\\ \sin\alpha_{\prime\prime\prime}{}^0 &= \frac{\cos 90^0}{\sin\gamma} = 0,\end{aligned}\right.$$

d. h. die Richtung $Q_{\prime\prime\prime}.\sin\Gamma$ macht mit der Richtung der Axe der X^0 einen Winkel von 180 Grad, ist der Richtung der Axe X^0 also entgegengesetzt.

Endlich lassen sich auch noch die **Hebelsarme** der Kräfte $Q'.\sin A$, $Q_{\prime\prime}.\sin B$ und $Q_{\prime\prime\prime}.\sin\Gamma$ in Bezug auf die Axe pQ leicht bestimmen. Sind nämlich x und y die Koordinaten eines Punktes parallel mit der Ebene gemessen, auf welcher die dritte Axe normal steht, so ist der kürzeste Abstand der Richtungslinie der Kraft, welche durch diesen Punkt



*) Siehe die Figur auf S. 123.

geht, und deren Projektion mit der Axe der X den Winkel λ bildet, von der dritten Axe offenbar:

$$135) \left\{ \begin{aligned} Qf &= Qg \cdot \cos\lambda = (y + hg)\cos\lambda = (y + x \operatorname{tang}\lambda)\cos\lambda \\ &= y \cdot \cos\lambda + x \sin\lambda. \end{aligned} \right.$$

Macht die Kraftrichtung selbst mit der Axe der X den Winkel α, mit der Axe der Y den Winkel β und mit der Axe der Z den Winkel γ, so hat man nach dem Frühern (130) für den Winkel, welcher ihre Projektion mit der Axe der X bildet:

$$\cos\lambda = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}, \quad \sin\lambda = \frac{\cos\beta}{\sin\gamma},$$

folglich die kürzeste Entfernung der Kraftrichtung von der Axe der Z oder den Hebelsarm der Kraft in Bezug auf die Axe der Z:

$$135\text{a}) \quad Qf = R_{\prime\prime\prime} = \frac{x \cdot \cos\beta}{\sin\gamma} + \frac{y \cdot \cos\alpha}{\sin\gamma}.$$

Man findet also den Hebelsarm einer Kraft, deren Richtung durch einen gegebenen Punkt geht und mit den drei Axen gegebene Winkel bildet, in Bezug auf eine Axe, wenn man jede einzelne der beiden Koordinaten, welche nicht mit dieser Axe parallel sind, multiplizirt mit dem Kosinus des Neigungswinkels, welchen die Kraftrichtung mit derjenigen Axe macht, die der andern von beiden parallel ist, und die Summe der Produkte dividirt durch den Sinus des Neigungswinkels, welchen die Kraftrichtung mit derjenigen Axe macht, für welche man den Hebelsarm bestimmen will, oder wenn man jede der beiden Koordinaten mit dem Sinus des Neigungswinkels multiplizirt, welchen die Projektion der Kraftrichtung auf eine Ebene, die normal zu der Axe ist, für welche man den Hebelsarm bestimmen will, bildet mit derjenigen Axe, mit welcher die betreffende Koordinate parallel ist; und die Summe nimmt.

Nennen wir die Hebelsarme der drei Kräfte $Q_{\prime} \cdot \sin A$, $Q_{\prime\prime} \sin B$, $Q_{\prime\prime\prime} \cdot \sin \Gamma$ in Bezug auf die mit der Richtung Q zusammenfallende Axe der Reihe nach $\varrho_{\prime}^{0}$, $\varrho_{\prime\prime}^{0}$, $\varrho_{\prime\prime\prime}^{0}$, so findet man diese Hebelsarme nach der obigen Regel (135):

$$134) \left\{ \begin{aligned} \varrho_{\prime}^{0} &= X_{\prime}^{0} \cdot \sin\alpha_{\prime} + Y_{\prime}^{0} \cdot \cos\alpha_{\prime}^{0} \\ \varrho_{\prime\prime}^{0} &= X_{\prime\prime}^{0} \cdot \sin\alpha_{\prime\prime} + Y_{\prime\prime}^{0} \cdot \cos\alpha_{\prime\prime}^{0} \\ \varrho_{\prime\prime\prime}^{0} &= X_{\prime\prime\prime}^{0} \cdot \sin\alpha_{\prime\prime\prime} + Y_{\prime\prime\prime}^{0} \cdot \cos\alpha_{\prime\prime\prime}^{0} = - Y_{\prime\prime\prime}^{0}. \end{aligned} \right.$$

Hierdurch sind nun alle Elemente bestimmt, deren man bedarf, um nach § 75. (S. 117, Gleichung 123), 123a) und 123b) die Lage und das Moment des Kräftepaares zu bestimmen.

Man hat nämlich zu setzen in jenen Gleichungen:

$$137)\quad \begin{cases} \Sigma(K.\sin a.z) = Q_{\prime}.\sin A.\sin\alpha_{\prime}{}^{0}.Z_{\prime}{}^{0} + Q_{\prime\prime}.\sin B.\sin\alpha_{\prime\prime}{}^{0}.Z_{\prime\prime}{}^{0} + \\ \qquad Q_{\prime\prime\prime}.\sin\Gamma.\sin\alpha_{\prime\prime\prime}{}^{0}.Z_{\prime\prime\prime}{}^{0} \\ \Sigma(K.\cos a.z) = Q_{\prime}.\sin A.\cos\alpha_{\prime}{}^{0}.Z_{\prime}{}^{0} + Q_{\prime\prime}.\sin B.\cos\alpha_{\prime\prime}{}^{0}.Z_{\prime\prime}{}^{0} + \\ \qquad Q_{\prime\prime\prime}.\sin\Gamma.\cos\alpha_{\prime\prime\prime}{}^{0}.Z_{\prime\prime\prime}{}^{0} \\ \Sigma(K.R_{\prime\prime\prime}) = Q_{\prime}.\sin A.\varrho_{\prime}{}^{0} + Q_{\prime\prime}.\sin B.\varrho_{\prime\prime}{}^{0} + Q_{\prime\prime\prime}.\sin\Gamma.\varrho_{\prime\prime\prime}{}^{0}. \end{cases}$$

Es ergiebt sich sodann aus Gleichung 123) der Winkel ψ, welchen die Durchschnittslinie der Ebene des Kräftepaars und der vierten Ebene mit der Axe der X^0 macht; aus Gleichung 123a) der Winkel, welchen die Ebene des Kräftepaars mit der vierten Ebene, oder überhaupt mit einer Ebene macht, die normal ist zur Richtung der Resultirenden der fortschreitenden Bewegung, und endlich aus Gleichung 123b) das Moment des resultirenden Kräftepaares *).

Ueberhaupt folgt aus der eben durchgeführten Rechnung:

II. Wenn auf ein festes System beliebige Kräfte einwirken, welche weder in Bezug auf fortschreitende noch in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind, so läfst sich ihre Wirkung immer zurückführen auf eine Kraft, welche der Richtung und Gröfse nach (Gleichung 127, 128, 128a), und auf ein Kräftepaar, dessen Moment der Gröfse nach, und dessen Ebene der Lage nach (Gleichung 123 und 136) zu bestimmen sind.

Ziehen wir nunmehr den zweiten Fall in Betracht:

B. Wenn auf ein festes System Kräfte in beliebigen Richtungen wirken, welche zwar in Bezug auf drehende Bewegung, nicht aber in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind, so läfst sich immer eine Resultante durch die Gleichungen 127), 128) und 128a) der Gröfse und Richtung nach bestimmen.

Dieser Fall ist nämlich ohne Weiteres auf die analogen Fälle auf S. 104 und 115 zurückzuführen.

Was nun endlich den dritten Fall anbetrifft, nämlich:

C. Wenn auf ein festes System Kräfte in beliebigen Richtungen wirken, welche zwar in Bezug auf fortschreitende Bewegung, aber nicht in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind, so

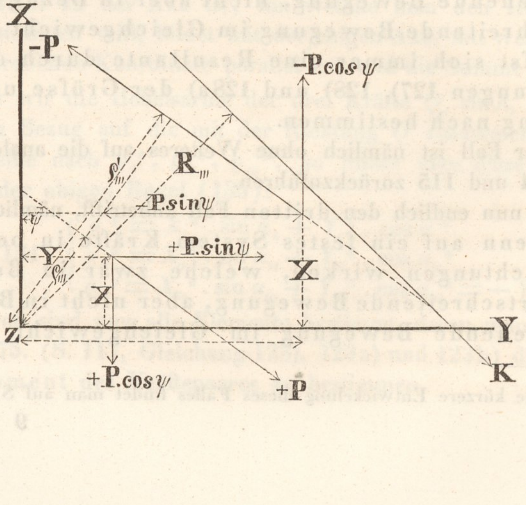
*) Eine kürzere Entwickelung dieses Falles findet man auf S. 142.

läſst sich die Wirkung derselben immer nur auf ein resultirendes Kräftepaar zurückführen.

Um dies nachzuweisen, verfahren wir ganz ähnlich wie auf S. 116 C.

Zunächst ist einleuchtend, daſs eine Gegenkraft, welche wir in das System einführen möchten, das Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung stören würde; es sind also wenigstens zwei gleich groſse, parallele, aber der Richtung nach entgegengesetzte Kräfte $+P'$ und $-P'$ einzuführen, welche mit den drei Axen die Winkel A, B und Γ bilden mögen.

Legen wir durch die parallelen Richtungen der Kräfte $+P'$ und $-P'$ eine Ebene, und verbinden nun ihre Angriffspunkte, so liegt auch diese Verbindungslinie in derselben Ebene. In jedem Falle lassen sich aber die beiden Kräfte in dieser Ebene zerlegen in je zwei andere, von denen die einen parallel sind mit einer der Koordinaten-Ebenen, z. B. mit der Ebene XY, und die andern in die Richtung der Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte fallen. Die Komponenten, parallel mit der Grundebene XY, sind unter sich parallel, gleich groſs, aber entgegengesetzt, und mögen mit $+P$ und $-P$ bezeichnet werden, die Komponenten nach der Richtung der Verbindungslinie sind ebenfalls gleich groſs, entgegengesetzt und fallen in dieselbe gerade Linie, sie mögen mit $+P''$ und $-P''$ bezeichnet werden. Diese beiden Komponenten halten einander das Gleichgewicht, sie nehmen nur die innern Kräfte des Systems in Anspruch, und können auf das System weder auf Drehung noch auf Fortschreiten wirken; sie fallen also aus der Betrachtung, und man sieht, daſs, wie man auch die Lage und Richtung der beiden



Kräfte $+P'$ und $-P'$ gewählt haben mag, sich für dieselben immer zwei andere $+P$ und $-P$ substituiren lassen, die in denselben Angriffspunkten wirken, deren Richtungen parallel mit einer der Koordinatenebenen sind, und aufserdem in derselben Ebene liegen, welche durch die Kräfte $+P'$ und $-P'$ gelegt werden konnte.

Behalten wir die Bezeichnungen auf S. 116 bei, so folgt, dafs, wenn die beiden Kräfte $+P$ und $-P$ Gleichgewicht gegen drehende Bewegung herstellen sollen, sein müsse:

$$\text{a)}\ \Sigma(K.\sin\alpha.R_{,}) = P.\sin\psi(Z-Z')$$
$$\text{b)}\ \Sigma(K.\sin\beta.R_{,,}) = P.\cos\psi(Z-Z')$$
$$\text{c)}\ \Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,}) = P.(\varrho_{,,,}-\varrho'_{,,,}).$$

Durch dieselben Betrachtungen, welche bereits auf S. 117 angestellt worden, und in Erwägung, dafs wir diese Betrachtungen, welche für die Ebene XY gelten, hier auch für die Ebene XZ und ZY anstellen können, folgt allgemein:

Der Neigungswinkel der Ebene des Kräftepaars gegen die Ebene XY

$$138)\ \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{\{[\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,})]^2+[\Sigma(K.\sin\beta.R_{,,})]^2\}}}{\Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,})},$$

d. h. man findet die Tangente des Neigungswinkels der Ebene, in welcher das resultirende Kräftepaar liegt, gegen eine der Koordinatenebenen gleich dem Quotienten aus der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Momentensummen der einzelnen Kräfte in Bezug auf die beiden Axen, die in dieser Ebene liegen, durch die Momentensumme der einzelnen Kräfte in Bezug auf die Axe, welche normal zu dieser Ebene ist.

Es folgt ferner:

Der Neigungswinkel der Durchschnittslinie der Ebene des Kräftepaars mit einer der Koordinatenebenen gegen eine der Axen, welche in dieser Ebene liegen:

$$138\text{a)}\ \operatorname{tang}\psi = \frac{\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,})}{\Sigma(K.\sin\beta.R_{,,})},$$

d. h. man findet die Tangente des Neigungswinkels, welchen die Durchschnittslinie der Ebene des Kräftepaars mit einer der Koordinatenebenen gegen eine in dieser letztgenannten Ebene liegende Axe macht, gleich dem Quotienten aus der Momentensumme der einzelnen Kräfte in Bezug auf diese Axe durch die Momentensumme in Bezug auf die andere in derselben Ebene liegende Axe.

138b) Das Moment des Kräftepaars

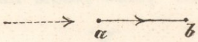
$$\sqrt{\left\{[\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,})]^2+[\Sigma(K.\sin\beta.R_{,,})]^2+[\Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,})]^2\right\}},$$

d. h. das Moment des resultirenden Kräftepaars ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Momentensummen der einzelnen Kräfte in Bezug auf die drei Axen.

Vorschlag zur Annahme eines allgemein giltigen Modus die Winkel zu zählen, welche Kraftrichtungen mit rechtwinkligen Koordinaten-Axen bilden.

§ 77. Bei den vorhergehenden statischen Untersuchungen hat man mit Kräften zu thun, deren Richtungslinien nicht in ein und derselben Ebene liegen; man bestimmt sodann die Lage dieser Richtungslinien durch die Winkel, welche sie mit drei angenommenen Koordinaten-Axen machen; es ist sehr wichtig die Vorzeichen der Winkelfunktionen richtig in die Rechnung einzuführen, und um in dieser Beziehung keinen Irrthum zu begehen, mufs man die Winkel, welche die Richtungslinien mit den einzelnen Axen machen, von jeder Axe aus stets in demselben Sinne rechnen (vergl. § 59). Es erscheint wünschenswerth, dafs man sich allgemein über einen Modus einige, nach welchem bei dergleichen Untersuchungen die Kraftrichtungen zu bestimmen sind, und zu dem Zwecke scheint folgendes Verfahren empfehlenswerth:

1) Man sehe sämmtliche Kräfte so an, als ob sie in ihrem Angriffspunkt ziehend wirken, und nehme ihre Werthe dann absolut.

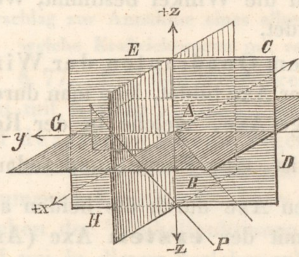


Um dies zu verstehen, diene folgende Erläuterung: Strebt eine Kraft ein Massenelement von a nach b zu bewegen, so können wir entweder die Kraft in einem Punkte wirkend denken, der auf derselben Seite von a liegt, auf welcher auch b liegt, und so als ob sie das Massenelement anziehe, oder wir können die Kraft auch in einem Punkte wirksam denken, der auf der entgegengesetzten Seite von a liegt, und so, als ob die Kraft das Bestreben habe, das Massenelement abzustofsen (§ 55. S. 67). Im ersten Falle bezeichnen wir die Wirkung, indem wir sagen, die Kraft wirke ziehend, im andern Fall, indem wir sagen, die Kraft wirke schiebend auf das Massenelement. Es ist gleichgiltig, ob wir sämmtliche Kräfte in ihren Angriffspunkten ziehend, oder ob wir sämmtliche Kräfte schiebend wirkend denken. Um eine Uebereinstimmung herbeizuführen, mögen stets sämmtliche Kräfte ziehend angenommen werden, und wenn sie schiebend gedacht werden sollen, möge man es ausdrücklich bemerken.

2) Die Winkel, welche eine Kraftrichtung mit den drei Axen macht, werden gefunden, wenn man von dem Anfangspunkt der Koordinaten eine Linie zieht, parallel mit der Richtung der Kraft, und in demselben Sinne, in welchem die Kraft auf ihren Angriffspunkt ziehend wirkt, und nun die Winkel bestimmt, welche diese Linie mit den drei Axen bildet.

3) Um zu beurtheilen, in welchem Quadranten der Winkel liegt, den diese Richtung mit einer Axe bildet, lege man durch die betrachtete Axe und durch diejenige Axe, welche in der Reihenfolge $\overset{1}{X}, \overset{2}{Y}, \overset{3}{Z}$ ihr die entfernteste ist, eine Ebene, und sodann eine Ebene normal zu der betrachteten Axe durch die beiden anderen Axen. Um also den Winkel mit der **ersten** Axe (Axe der X) zu bestimmen, lege man eine Ebene durch die erste und dritte Axe (Axe der X und der Z) und eine Ebene durch die zweite und dritte Axe (Axe der Y und der Z). Um den Winkel mit der **zweiten** Axe (Axe der Y) zu beurtheilen, lege man eine Ebene durch die zweite und erste Axe (Axe der Y und der X) und eine Ebene durch die erste und dritte Axe (Axe der X und der Z) und endlich um den Winkel zu bestimmen, welchen eine Kraftrichtung mit der **dritten** Axe macht, lege man eine Ebene durch die dritte und erste Axe und eine Ebene durch die erste und zweite Axe. Die beiden Ebenen, welche man für jede einzelne Axe gedacht hat, theilen den Raum in vier Abtheilungen. Die erste Abtheilung liegt zwischen dem Theile der durch die betrachtete Axe gelegten Ebene, welcher den positiven Zweig dieser Axe enthält, und demjenigen Theil der durch die beiden andern Axen gelegten Ebene, welcher den positiven Zweig der in der obenerwähnten Reihenfolge zunächst liegenden Axe enthält. Alle Linien, welche vom Anfangspunkt der Koordinaten gezogen in diese Abtheilung fallen, bilden mit der betrachteten Axe Winkel, die im ersten Quadranten liegen. Die zweite Abtheilung liegt zwischen diesem zuletzt erwähnten Theil der durch die beiden andern Axen gelegten Ebene, und demjenigen Theil der durch die betrachtete Axe gelegten Ebene, welche den negativen Zweig dieser Axe enthält. Alle Linien, die in diese Abtheilung fallen, bilden Winkel mit der betrachteten Axe, die im zweiten Quadranten liegen. Die dritte Abtheilung des Raumes liegt zwischen den so eben be-

zeichneten Theil der durch die betrachtete Axe gelegten Ebene, und demjenigen Theil der durch die beiden andern Axen gelegten Ebene, welcher den negativen Zweig der in der obigen Reihenfolge zunächst liegenden Axe enthält. Diese Abtheilung stellt den dritten Quadranten, und die noch übrige Abtheilung den vierten Quadranten dar.



Denkt man die drei Koordinatenebenen, so wird durch dieselben der Raum in acht Abtheilnngen getheilt, die wir mit *A, B, C, D, E, F, G, H* bezeichnen. Die Punkte, welche in diesen Abtheilungen liegen, haben folgende Koordinaten-Vorzeichen, nach welchen sich die Bezeichnung der Abtheilungen bestimmen soll.

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
$+x$	$+x$	$-x$	$-x$	$-x$	$-x$	$+x$	$+x$
$+y$	$+y$	$+y$	$+y$	$-y$	$-y$	$-y$	$-y$
$+z$	$-z$	$+z$	$-z$	$+z$	$-z$	$+z$	$-z.$

(Die Abtheilung *F* ist in der Figur nicht sichtbar).

Bezeichnen wir die Winkel mit der ersten Axe durch α, mit der zweiten Axe durch β und mit der dritten Axe durch γ, und nehmen wir den oben dargestellten Modus der Winkelzählung an, so ergiebt sich folgende Zusammenstellung:

Eine Linie, durch den Angriffspunkt der Koordinaten parallel mit einer Kraftrichtung gezogen, liegt in der Abtheilung	Die Winkel liegen in den Quadranten			Vorzeichen der Kosinus			Vorzeichen der Sinus			Vorzeichen der Kotangente			Vorzeichen der Tangente		
	α	β	γ	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	$\sin\alpha$	$\sin\beta$	$\sin\gamma$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\beta$	$\mathrm{ctg}\,\gamma$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\beta$	$\mathrm{tg}\,\gamma$
A	I	I	I	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
B	I	IV	II	+	+	−	+	−	+	+	−	−	+	−	−
C	II	I	IV	−	+	+	+	+	−	−	+	−	−	+	−
D	II	IV	III	−	+	−	+	−	−	−	−	+	−	−	+
E	III	II	IV	−	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	−
F	III	III	III	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+
G	IV	II	I	+	−	+	−	+	+	−	−	+	−	−	+
H	IV	III	II	+	−	−	−	−	+	−	+	−	−	+	−

Aus dieser Zusammenstellung ist ersichtlich, dafs die Vorzeichen der Kosinus von Winkeln, welche Linien bilden, die durch den Anfangspunkt der Koordinaten gehen und in irgend einer Abtheilung liegen, dieselben sind, welche auch die Koordinaten von Punkten haben, die in derselben Abtheilung liegen. Diese Vorzeichen sind jedoch nicht zu verwechseln mit den Vorzeichen, welche etwa die Koordinaten des Angriffspunkts der Kraft haben.

Es wirke z. B. in einem Punkte, dessen Koordinaten $+x$, $-y$, $+z$ sind, eine Kraft, welche mit der ersten und zweiten Axe einen Winkel mit positivem, mit der dritten Axe einen Winkel mit negativem Kosinus mache, so liegt der Winkel α im ersten, der Winkel β im vierten und der Winkel γ im zweiten Quadranten. Die Kraftrichtung ist in der Figur angedeutet. Die entgegengesetzte Kraftrichtung macht mit den drei Axen Winkel, deren Kosinus eben so grofs, aber entgegengesetzt sind, sie bildet also mit der ersten und zweiten Axe Winkel mit negativem und mit der dritten Axe einen Winkel mit positivem Kosinus, liegt also in der Abtheilung E.

Aus den obigen Darstellungen ist nun leicht ersichtlich, welche Bedeutung es haben müsse, wenn die Kräfte selbst mit positivem oder negativem Vorzeichen ($+P$ und $-P$) erscheinen, oder in die Rechnung eingeführt werden. Es kann dies nämlich in zwiefachem Sinne geschehen, entweder deuten die Vorzeichen $+P$ und $-P$ überhaupt nur an, dafs zwei Kräfte in parallelen Richtungen, aber entgegengesetzt wirkend, gedacht werden sollen, und es ist dann gleichgiltig, welche von beiden man als positiv, und welche man als negativ betrachten will, oder sie deuten an, dafs die betrachtete Kraft, welche mit negativem Vorzeichen erscheint, in ihrem Angriffspunkt in einem Sinne wirkt, welcher demjenigen der übrigen Kräfte entgegengesetzt ist; dafs sie also, wenn wir allgemein die Kräfte ziehend wirkend denken, in ihrem Angriffspunkte schiebend wirke; sie wird sofort in eine Kraft verwandelt werden können, welche ziehend wirkt, und dann absolut zu nehmen sein.

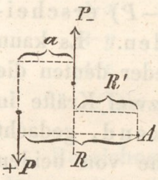
Gesetze über die Wirkung, Zusammensetzung und Zerlegung der Kräftepaare. Parallelogramm und Parallelepipedum der Kräftepaare und der Paar-Axen.

§ 78. Aus den Betrachtungen der §§ 74, 75 und 76 ergiebt sich, dafs, wenn auf ein festes System Kräfte wirken, welche in Bezug auf drehende Bewegung nicht im Gleichgewicht sind, das Gleichgewicht nur in dem einzigen Fall, wo die Kraftrichtungen parallel und zugleich die Summe sämmtlicher Kräfte nicht gleich Null ist (S. 105. No. 2, Gleichung 117a) durch eine einzige Gegenkraft herzustellen ist, in jedem andern Falle aber das Gleichgewicht gegen drehende Bewegung sich nur durch ein Kräftepaar herstellen läſst. Hieraus folgt, daſs überhaupt jede drehende Bewegung, welche Kräfte, die auf ein festes System wirken, diesem zu ertheilen streben, sich auf ein resultirendes Kräftepaar zurückführen lasse.

Es ist von Interesse einige Eigenschaften der Kräftepaare hier hervorzuheben.

1) Jedes Kräftepaar hat das Bestreben das System um eine Axe zu drehen, die normal ist zu der Ebene, in welcher das Kräftepaar liegt; der Punkt, in welchem die Axe die Ebene schneidet, läſst sich aus den Eigenschaften des Kräftepaares nicht bestimmen; es kann jeder beliebige Punkt sein, wenn er nicht durch andere Bedingungen gegeben ist.

Denn es sei R der kürzeste Abstand der Kraft $+P$ von der beliebig angenommenen Drehaxe A; R' der kürzeste Abstand der Kraft $-P$, dann ist die Summe der Momente, welche auf Drehung um die angenommene Axe wirken, $P.R - P.R' = P.(R - R')$, es ist aber immer $R - R'$ der kürzeste Abstand der Kraftrichtungen $+P$ und $-P$, bezeichnen wir denselben mit a, so ist Pa das Moment des Kräftepaars (S. 106), und es folgt, daſs die Summe der Momente für die Drehung um eine beliebige zur Ebene des Paares normale Axe immer gleich dem Moment des Kräftepaars ist, d. h. immer denselben Werth hat.



2) Man kann für jedes Kräftepaar ein anderes substituiren, welches in derselben Ebene liegt, und dasselbe Moment hat; es ist dabei gleichgiltig, welche Lage die Kraftrichtungen des neuen Paares gegen die des ersten haben, auch kann man entweder den Abstand der neuen Kraftrichtungen von einander, oder die Gröſse der Drucke derselben beliebig annehmen.

Denn, da das Bestreben auf Drehung um eine beliebige Axe durch die Summe der Momente in Bezug auf diese Axe gemessen wird, so hat das neue Kräftepaar in Bezug auf jeden beliebigen Punkt der Ebene immer dasselbe Bestreben auf Drehung, wie das erste Kräftepaar, sobald sein Moment dasselbe ist (No. 1).

3) Man kann daher die eine Kraftrichtung eines Kräftepaares durch einen beliebigen Punkt in der Ebene gehen lassen, und derselben eine beliebige Richtung geben, während die andere einen beliebigen Abstand von diesem Punkt bekommen kann.

Ist Pa das Moment eines Kräftepaars, und a' der Abstand des neuen Kräftepaars, so ist:

$$139)\left\{\begin{array}{l} P' = \frac{Pa}{a'} \\ a = \frac{Pa}{p'}. \end{array}\right.$$

4) Jedes Kräftepaar kann durch ein anderes ersetzt werden, welches in einer parallele Ebene liegt, und dasselbe Moment hat.

Denn da das Bestreben auf Drehung um irgend eine zur Ebene des Paares normale Axe durch das Moment des Kräftepaares ausgedrückt wird, so hat das neue Kräftepaar, da es in einer parallelen Ebene liegt, die folglich auch normal ist zu einer beliebigen Axe, welche normal zur Ebene des ersten Paares ist, dasselbe Bestreben auf Drehung um diese Axe, welches das erste Paar hat, sobald sein Moment dasselbe ist.

5) Kräftepaare, welche in derselben Ebene liegen, lassen sich durch ein einziges Kräftepaar ersetzen, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Momente der einzelnen Kräftepaare ist, wobei diejenigen Momente, welche die Ebene in entgegengesetzten Richtungen zu drehen streben, mit entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen sind.

Denn man kann jedes der Kräftepaare $P'a'$, $P''a''$, $P'''a'''$ .... in ein anderes verwandeln, dessen Richtungen in zwei bestimmte Parallellinien fallen. Ist a der kürzeste Abstand dieser beiden Parallellinien, so ist nach 139 die Kräftesumme in der einen Richtung:

$$+\left(\frac{P'a'}{a} + \frac{P''a''}{a} + \frac{P'''a'''}{a} \ldots\ldots\right) = P$$

und die Kräftesumme in der entgegengesetzten Richtung:

$$-\left(\frac{P'a'}{a} + \frac{P''a''}{a} + \frac{P'''a'''}{a}\right) = -P,$$

folglich hat man wiederum ein Kräftepaar, und es ist dessen Moment:

$$Pa = P'a' + P''a'' + P'''a''' + \ldots\ldots$$

6) Kräftepaare, welche in parallelen Ebenen liegen, lassen sich durch ein einziges Kräftepaar ersetzen, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Momente der einzelnen Kräftepaare ist, wobei diejenigen Momente, welche die Ebenen in entgegengesetzten Richtungen zu drehen streben, mit entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen sind.

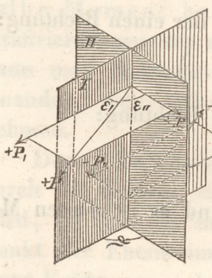
Denn, man kann jedes dieser Kräftepaare nach No. 4 in eine bestimmte Ebene verlegen, welche mit den Ebenen der Kräftepaare parallel ist, und dann nach No. 5 diese Kräftepaare vereinigen.

7) Kräfte, welche auf Drehung um irgend eine Axe wirken, lassen sich in Bezug auf drehende Bewegung durch ein Kräftepaar ersetzen, welches in einer zu der Axe normalen Ebene liegt, und dessen Moment gleich der Summe der Momente der einzelnen Kräfte in Bezug auf diese Axe ist.

Denn das Bestreben auf Drehung um eine gegebene Axe wird gemessen durch die Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte in Bezug auf diese Axe (S. 95); ein Kräftepaar, dessen Moment gleich der Summe der Momente der einzelnen Kräfte ist, hat dasselbe Bestreben auf Drehung zu wirken, (No. 1 und 2) würde also, wenn man es im entgegengesetzten Sinne wirken lieſse, die Drehung durch die einzelnen Kräfte aufheben, und ersetzt demnach deren Wirkung auf drehende Bewegung.

Die Ebene, in welcher ein Kräftepaar liegt, nennen wir die Paar-Ebene; eine Normale zu dieser Ebene: eine Paar-Axe, und den kürzesten Abstand der Richtungslinien: den Hebelsarm des Kräftepaars, oder kurz der Paar-Arm.

8) Kräftepaare, welche in Ebenen liegen, die sich schneiden, lassen sich immer durch ein Kräftepaar ersetzen, dessen Moment sich bestimmen läſst, welches in einer Ebene liegt, die durch die Durchschnittslinie der beiden Paar-Ebenen geht, und deren Lage gegen die beiden Paar-Ebenen eine bestimmte ist.



Es sei ϑ der Neigungswinkel der beiden Paar-Ebenen, $a^I P^I$ sei das Moment des Kräftepaars in der ersten Ebene, $a^{II} P^{II}$ das Moment des Paares in der zweiten Ebene. Da die Kräftepaare jede Lage in der Ebene haben können, so lassen sich ihre Richtungen auch normal zur Durchschnittslinie denken, und wenn a der Abstand zweier Punkte der Durchschnittslinie ist, so lassen sich die Kräfte beider Paare durch diese Punkte der Durchschnittslinie legen. Nach Gleichung 139) sind sodann die Kräfte der beiden Paare:

$$P_{\prime} = \frac{a^I P^I}{a}; \quad P_{\prime\prime} = \frac{a^{II} P^{II}}{a}.$$

Nun greifen in dem einen Punkte der Durchschnittslinie die Kräfte $+P_{\prime}$ und $\pm P_{\prime\prime}$, im andern Punkte die Kräfte $-P_{\prime}$ und $\mp P_{\prime\prime}$ an. Da diese beiden Gruppen in ihren Angriffspunkten normal zur Durchschnittslinie sind, so liegen sie in parallelen Ebenen, die normal zur Durchschnittslinie sind; jede der beiden Gruppen läfst sich zusammensetzen nach dem Parallelogramm der Kräfte (§§ 28 und 30) und man hat in dem einen Angriffspunkt die Resultante:

$$P = \{P_{\prime}^2 + P_{\prime\prime}^2 + 2P_{\prime}P_{\prime\prime} \cdot \cos\vartheta\},$$

in dem andern Angriffspunkt eine ebenso grofse, aber entgegengesetzt gerichtete Resultante. Anstatt der ursprünglichen Kräfte können wir diese beiden Kräfte wirkend denken; sie sind parallel, liegen in einer Ebene, welche durch die Durchschnittslinie der ersten beiden Paar-Ebenen geht, und ihr Moment ist $= Pa$, oder wenn wir für P den obigen Werth, und darin für $P_{\prime}$ und $P_{\prime\prime}$ die vorhin gefundenen Ausdrücke setzen:

$$140) \quad Pa = \sqrt{\{(a^I P^I)^2 + (a^{II} P^{II})^2 + 2(a^I P^I) \cdot (a^{II} P^{II}) \cdot \cos\vartheta\}}.$$

Der Neigungswinkel, welchen die neue Paar-Ebene gegen die erste oder die zweite Paar-Ebene macht, ist gleich dem Winkel, welchen die Kraftrichtungen P und $P_{\prime}$ resp. $P_{\prime\prime}$ einschliefsen. Es ist also, wenn diese Winkel mit $\varepsilon_{\prime}$ und $\varepsilon_{\prime\prime}$ bezeichnet werden:

$$140\text{a}) \quad \begin{cases} \sin\varepsilon_{\prime} = \sin\vartheta \cdot \dfrac{P_{\prime}}{P} = \sin\vartheta \cdot \dfrac{a^I P^I}{aP} \\[2ex] \sin\varepsilon_{\prime\prime} = \sin\vartheta \cdot \dfrac{P_{\prime\prime}}{P} = \sin\vartheta \cdot \dfrac{a^{II} P^{II}}{aP}. \end{cases}$$

Man sieht hieraus folgendes Gesetz:

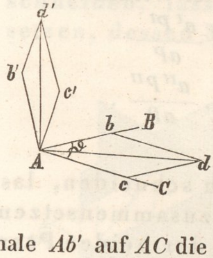
Kräftepaare in Ebenen, die sich schneiden, lassen sich stets zu einem Paare zusammensetzen, indem man den Neigungswinkel der beiden Paar-Ebenen konstruirt, auf den Schenkeln desselben in jeder Ebene Stücke abschneidet, welche dem Kräftepaar in dieser Ebene proportional sind, in der Ebene dieses Winkels über diesen Stücken ein

Parallelogramm konstruirt, und von dem Scheitel des Winkels die Diagonale zieht. Die Diagonale ist proportional dem resultirenden Kräftepaar; die Ebene durch die Diagonale und normal zur Ebene des Winkels ist die Paar-Ebene des resultirenden Kräftepaares, und die Winkel, welche die Diagonale mit den Schenkeln des Winkels bildet, sind gleich den Neigungswinkeln dieser Ebene gegen die betreffenden ersten Paar-Ebenen.

Dies interessante Gesetz bietet die gröſste Analogie mit dem Prinzip des Parallelogramms der Kräfte und der Geschwindigkeiten dar; wir nennen es das Prinzip des Parallelogramms der Kräftepaare.

9) Zwei Kräftepaare, deren Paar-Axen nicht parallel sind, lassen sich zu einem Kräftepaare vereinigen, indem man zwei Linien konstruirt, die sich schneiden, und den Paar-Axen einzeln parallel sind, von dem Durchschnittspunkt dieser Linien auf jeder ein Stück abträgt, welches dem Moment des Kräftepaars proportional ist, mit dessen Axe die betreffende Linie parallel ist, und aus diesen Stücken ein Parallelogramm konstruirt. Die Diagonale des Parallelogramms vom Durchschnittspunkt der Linien aus, repräsentirt, der Gröſse nach, das Moment des resultirenden Kräftepaars, und der Lage nach die Axe desselben. Die Paar-Ebene des resultirenden Kräftepaars ist normal zu dieser Axe.

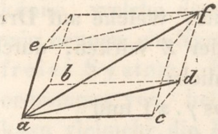
Denn es seien AB und AC die Schnitte der Paar-Ebenen der gegebenen Kräftepaare mit einer Ebene, die zu beiden normal ist, $ABC = \vartheta$ ist der Neigungswinkel beider Ebenen, nach dem vorigen Satz ist der Normalschnitt der resultirenden Paar-Ebene und das Moment des resultirenden Kräftepaars durch die Diagonale Ad zu bestimmen, wenn Ac dem Moment des Kräftepaars in der Ebene AC, Ab dem Moment des Kräftepaares in der Ebene AB proportional ist. Errichten wir in der Ebene ABC in A auf AB die Normale Ab' auf AC die Normale Ac', so sind diese Normalen auch normal auf den Ebenen AB und AC, und folglich parallel mit den Paar-Axen; machen wir $Ab' = Ab$, $Ac' = Ac$, vollenden das Parallelogramm und ziehen die Diagonale Ad', so ist sehr leicht geometrisch zu zeigen, daſs $Ad' = Ad$, und normal zu Ad sei. Da Ad'



$= Ad$ ist, so ist auch Ad' proportional dem resultirenden Kräftepaar, und da Ad' normal zu Ad ist, so ist Ad' auch normal zu der Ebene, in welcher das resultirende Paar liegt, folglich eine Paar-Axe des resultirenden Paars. Dies war nachzuweisen.

Wir nennen dies Gesetz das Parallelogramm der Paar-Axen.

10) Wirken auf ein festes System drei Kräftepaare, deren Paar-Axen nicht in eine Ebene gelegt werden können, so kann man dieselben zu einem Kräftepaar vereinigen, dessen Moment durch die Gröfse, und dessen Paar-Axe durch die Lage der Diagonale eines Parallelepipedums repräsentirt wird, dessen Seiten einzeln proportional den Momenten der gegebenen Kräftepaare, und parallel mit deren Paar-Axen sind. Die Ebene des resultirenden Kräftepaars steht normal auf der Diagonale des Parallelepipedums.



Denn es lassen sich nach dem vorigen Satze die Kräftepaare, deren Axen parallel mit ab und ac sind, zu einem Kräftepaar zusammensetzen, dessen Axe ad ist, und es läfst sich dieses Kräftepaar mit dem dritten, dessen Axe ac ist, wiederum zusammensetzen zu einem resultirenden Kräftepaare.

Die Axe desselben ist af, und es ist auch af proportional dem Moment desselben, wenn ae, ac und ab proportional sind dem Momente der einzelnen Kräftepaare. Nun ist aber af auch die Diagonale des Parallelepipedums $eabdcf$.

Wir nennen dies Gesetz das Parallelepipedum der Paar-Axen.

Die Kräftepaare lassen sich auch nach dem Gesetz No. 8 zusammensetzen, indem man zuerst die Kräftepaare in zwei Ebenen zu einem komponirt, und dieses dann mit dem Kräftepaar in der dritten Ebene zusammensetzt.

11) Jedes Kräftepaar läfst sich in zwei oder mehre andere zerlegen, von denen entweder die Lage der Paar-Axen oder die Gröfse der Momente der Kräftepaare gegeben sein kann.

Dies folgt unmittelbar aus den Gesetzen No. 8, 9 und 10.

12) Der Neigungswinkel der Paar-Axe gegen eine beliebige Ebene ist der Komplementswinkel des Neigungswinkels der Paar-Ebene gegen dieselbe Ebene, oder

auch des Neigungswinkels der Paar-Axe gegen eine auf dieser Ebene normale Axe.

Dies folgt unmittelbar aus der Bedingung, dafs die Paar-Axe normal zur Paar-Ebene ist.

Mit Hilfe dieser Gesetze lassen sich oft die Entwickelungen der §§ 75 und 76 wesentlich vereinfachen. Betrachten wir z. B. den Fall in § 76A. Wir zerlegen sämmtliche Kräfte in ihren Angriffspunkten nach drei Richtungen, parallel mit den drei Axen; es entstehen die Kräfte: $K.\cos\alpha\ldots$, $K.\cos\beta\ldots$, $K.\cos\gamma\ldots$, und es läfst sich die Resultirende der fortschreitenden Bewegung nach den Gesetzen auf S. 100 und nach den Gleichungen 127, 128, 128a) der Gröfse und Richtung nach, so wie ihr Angriffspunkt bestimmen. Nun wirken die Kräfte $K.\cos\beta$ und $K.\cos\gamma$ auf Drehung um die Axe der X; ihre Momente sind $K.\cos\beta.z\ldots$ und $K.\cos\gamma.y$. Diese Momente lassen sich durch ein Kräftepaar ersetzen (No. 7), dessen Moment ist:

$$141)\quad \Sigma(K.\cos\beta.z)+\Sigma(K.\cos\gamma.y).$$

In gleicher Weise lassen sich die Momente, welche auf Drehung um die Axe der Y nnd um diejenige der Z wirken, durch Kräftepaare ersetzen, deren Momente beziehlich:

$$141)\quad \begin{cases}\Sigma(K.\cos\alpha.z)+\Sigma(K.\cos\gamma.x) \text{ und}\\ \Sigma(K.\cos\alpha.y)+\Sigma(K.\cos\beta.x)\end{cases}$$

sind. Da die Axen dieser Kräftepaare normal zu einander sind, so ergiebt sich nach No. 10 das Moment des resultirenden Kräftepaars gleich:

$$141\text{a})\quad \sqrt{\left\{[\Sigma(K.\cos\beta.z)+\Sigma(K.\cos\gamma.y)]^2+[\Sigma(K.\cos\alpha.z)+\Sigma(K.\cos\gamma.x)]^2+[\Sigma(K.\cos\alpha.y)+\Sigma(K.\cos\beta.x)]^2\right\}},$$

oder:

$$\sqrt{\left\{[\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,})]^2+[\Sigma(K.\sin\beta.R_{,,})]^2+[\Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,})]^2\right\}},$$

und es findet sich der Neigungswinkel $\eta_{,}$ der resultirenden Paar-Axe gegen die Ebene YZ:

$$141\text{b})\quad \operatorname{tang}\eta_{,}=\frac{\Sigma(K.\cos\beta.z)+\Sigma(K.\cos\gamma.y)}{\sqrt{\left\{[\Sigma(K.\cos\alpha.z)+\Sigma(K.\cos\gamma.x)]^2+[\Sigma(K.\cos\alpha.y)+\Sigma(K.\cos\beta.x)]^2\right\}}}$$

oder nach 135a) gleich:

$$\operatorname{tang}\eta_{,}=\frac{\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,})}{\sqrt{\left\{[\Sigma(K.\sin\beta.R_{,,})]^2+[\Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,})]^2\right\}}}.$$

und der Neigungswinkel $\varphi_{,}$ der resultirenden Paar-Ebene gegen die Ebene YZ, oder der Neigungswinkel der resultirenden Paar-Axe gegen die Axe der X nach No. 12:

$$141\text{c)}\quad \tang \varphi_{\prime} = \cotg \eta_{\prime} = \frac{1}{\tang \eta_{\prime}}$$

u. s. w.

Die Gleichungen, welche entstehen, indem man anstatt der Koordinaten die Hebelsarme der Kräfte (nach Gleichung 135a) S. 128) einführt, sind dieselben, welche wir unter 138 und 138a) S. 131 auf anderem Wege entwickelt haben, uud es gelten für Kräftepaare, deren Paar-Axen normal zu einander sind und die nicht in derselben Ebene liegen, die auf S. 131 bei Gelegenheit der Entwickelung dieser Gleichungen aufgestellten Regeln.

Festes System mit fixen (festgehaltenen) Punkten.

§ 79. Die bisherigen Untersuchungen über die Gesetze, welche für Kräfte gelten, die auf ein festes System wirken, setzten überall voraus, dafs jeder Punkt des Systems diejenige Bewegung machen könne, welche durch die Einwirkung jener Kräfte bedingt wurde; wir nennen ein System, für welches diese Voraussetzung zutrifft ein freies System. Es kommen jedoch sehr häufig auch solche Anordnungen vor, bei denen jene Voraussetzungen nicht gelten; es kann vielmehr die Bedingung gestellt sein, dafs gewisse Punkte des festen Systems sich nicht bewegen dürfen, wie auch die Kräfte des Systems beschaffen sein mögen; solche Punkte nennen wir fixe Punkte, oder festgehaltene Punkte des Systems, und das System selbst im Gegensatz zu dem freien System, nennen wir ein festes System mit fixen Punkten. Die Fälle, welche hier von besonderem Interesse sind, sind folgende:

a) ein festes System mit einem fixen Punkte,
b) ein festes System mit zwei fixen Punkten,
c) ein festes System mit drei fixen Punkten.

Nach den vorstehenden Andeutungen haben wir unter einem fixen Punkt eines Systems überhaupt einen solchen zu verstehen, welcher weder eine fortschreitende Bewegung noch eine rotirende Bewegung um irgend eine Axe annehmen kann. Hieraus folgt zunächst:

1) dafs das System überhaupt keine fortschreitende Bewegung haben könne, denn eine solche würde allen Punkten des Systems gemeinschaftlich (§ 65. S. 88), folglich auch den fixen Punkten eigen sein, und dies widerspricht der Voraussetzung, und

2) dafs die Drehaxe des Systems immer durch die fixen Punkte gehen müsse; denn nur die Punkte, welche in der Drehaxe liegen, haben keine rotirende Bewegung.

Diese beiden Bedingungen erheischen, dafs in den fixen Punkten Kräfte wirksam sein müssen, deren Komponenten, in Bezug auf drei normale Axen, gleich und entgegengesetzt den Komponenten aller übrigen Kräfte in Bezug auf dieselben Axen sind (§ 71. S. 99), und deren Momente in Bezug auf irgend eine Axe, welche nicht durch die fixen Punkte geht, zusammen gleich und entgegengesetzt der Summe der Momente aller übrigen auf das System wirkenden Kräfte sein müssen; denn, denken wir solche Kräfte in das System eingeführt, so wird das System überhaupt im Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung sein (erste Bedingung), und es wird auch im Gleichgewicht gegen drehende Bewegung sein in Bezug auf jede Axe, welche nicht durch die fixen Punkte des Systems geht (zweite Bedingung).

Die Kräfte, welche dieser Darstellung nach in den fixen Punkten wirksam sein müssen, um diese Punkte eben als fixe zu konstituiren, nennen wir die Reaktionen des Systems gegen die fixen Punkte, und die ihnen gleichen aber entgegengesetzten Kräfte, deren Komponenten nach den drei Axen also in demselben Sinne wirken, wie die Komponenten der Resultirenden der fortschreitenden Bewegung des Systems nach denselben Axen, nennen wir die Drucke des Systems gegen die fixen Punkte.

1) Festes System mit einem fixen Punkt. Der Druck Q des Systems gegen den fixen Punkt und die Richtung dieses Druckes ist hier ohne Weiteres zu bestimmen durch die Gleichungen **110** und **111**) S. 98; denn da nur ein fixer Punkt vorhanden ist, so mufs die Reaktion gegen denselben gleich der Gegenkraft des Systems ($-Q$) gegen fortschreitende Bewegung sein. Denken wir drei normale Koordinaten-Axen, auf welche wir das System beziehen, und denken wir in dem fixen Punkt, dessen Koordinaten X, Y und Z sein mögen, die Kraft $-Q$ wirkend, welche mit den Axen die Winkel A, B, Γ macht, so haben wir nunmehr in Bezug auf diese drei Axen drei Kräftepaare, und es ist das Moment des Kräftepaars, welches auf Drehung um die erste Axe wirkt:

$$\Sigma(K . \cos\beta . z) + \Sigma(K . \cos\gamma . y) - Q . \cos B . Z - Q . \cos\Gamma . Y),$$

nun ist aber (**111**. S. 98):

$$Q . \cos B = \Sigma(K . \cos\beta); \quad Q . \cos\Gamma = \Sigma(K . \cos\gamma);$$

folglich drückt sich das Moment des Kräftepaares in Bezug auf die erste Axe aus, durch:

$$\Sigma(K \cdot \cos\beta \cdot [z - Z]) + \Sigma(K \cdot \cos\gamma \cdot [y - Y]).$$

In ähnlicher Weise lassen sich die Momente der Kräftepaare in Bezug auf die beiden andern Axen darstellen. Nun sieht man aber leicht, dafs $(z - Z) \ldots (y - Y) \ldots (x - X)$ nichts anders bezeichnet, als die Koordinaten der Angriffspunkte der Kräfte in Bezug auf ein Koordinaten-System, dessen Anfangspunkt in dem ersten Koordinaten-System die Koordinaten X, Y, Z hat, mit anderen Worten, dessen Anfangspunkt der fixe Punkt ist. Verlegt man also den Anfangspunkt der Koordinaten in den fixen Punkt und nennt man die neuen Koordinaten $x_{,}, y_{,}, z_{,}$ so ist das Moment des Kräftepaares in Bezug auf die erste Axe

$$\Sigma(K \cdot \cos\beta \cdot z_{,}) + \Sigma(K \cdot \cos\gamma \cdot y_{,}) \text{ u. s. w.}$$

Es folgt sodann leicht folgendes Gesetz:

> Rotirt ein festes System um **einen** fixen Punkt, so erhält man die Lage der Drehaxe und das Moment des resultirenden Kräftepaares, indem man durch den fixen Punkt drei beliebige zu einander normale Koordinatenaxen annimmt, die Kräftepaare des Systems für diese drei Axen durch Bildung der entsprechenden Momentensummen bestimmt, und diese drei Kräftepaare nach den Gleichungen 141a) (resp. 138) zusammensetzt.

Für den Fall, dafs man die Koordinatenaxen durch den fixen Punkt legt, sind die Momente der Reaktion gegen den fixen Punkt in Bezug auf alle drei Axen Null; legt man dagegen die Koordinatenaxen nicht durch den fixen Punkt, so hat man die Momente der in dem fixen Punkte wirkenden Reaktion mit in Betracht zu ziehen.

2) Festes System mit zwei fixen Punkten. Hat ein festes System zwei fixe Punkte, so müssen beide in der Drehaxe liegen, und es folgt daher, dafs die Drehaxe des festen Systems durch die gerade Linie gegeben ist, welche durch die beiden fixen Punkte geht; es erfolgt daher die Drehung sämmtlicher Punkte des Systems in Ebenen, welche zu der Verbindungslinie der beiden fixen Punkte normal sind. Das Kräftepaar in Bezug auf diese Verbin-

dungslinie als Drehaxe mufs das resultirende Kräftepaar des Systems sein, und es müssen folglich die Kräftepaare in Bezug auf zwei Axen, die unter sich und zu der Verbindungslinie der fixen Punkte normal sind, einzelne gleich Null sein; denn wäre dies nicht der Fall, und man brächte das System auf drei Kräftepaare für diese drei Axen, so würde das resultirende Kräftepaar eine andere Paar-Axe haben, als die Verbindungslinie der beiden fixen Punkte. Nehmen wir nun ein rechtwinkliges Koordinaten-System an, dessen eine Axe (Axe der Z) mit der Verbindungslinie der beiden fixen Punkte der Richtung nach zusammenfällt, so liegen die beiden andern Axen in einer Ebene, welche normal zu der Verbindungslinie ist, und es sind die Koordinaten der fixen Punkte in Bezug auf diese beiden Axen gleich Null, während sie in Bezug auf die Axe der Z mit Z_I und Z_{II} bezeichnet werden mögen.

Bezeichnet nun Q_I' den Druck des Systems gegen den ersten fixen Punkt, parallel mit der Axe der X, Q_I'' und Q_I''' die Drucke in demselben Punkt, welche parallel mit der zweiten und dritten Axe sind, und bezeichnen wir analog mit Q_{II}', Q_{II}'', Q_{II}''' die Drucke des Systems in dem zweiten fixen Punkt; ihre Reaktionen also mit entgegengesetztem Vorzeichen, so müssen folgende Gleichungen erfüllt werden:

1) $\Sigma(K \,.\, \cos\alpha) - Q_I' - Q_{II}' = 0.$
2) $\Sigma(K \,.\, \cos\beta) - Q_I'' - Q_{II}'' = 0.$
3) $\Sigma(K \,.\, \cos\gamma) - Q_I''' - Q_{II}''' = 0.$
4) $\Sigma(K \,.\, \cos\beta \,.\, z) + \Sigma(K \,.\, \cos\gamma \,.\, y) - Q_I'' \,.\, Z_I - Q_{II}'' \,.\, Z_{II} = 0.$
5) $\Sigma(K \,.\, \cos\alpha \,.\, z) + \Sigma(K \,.\, \cos\gamma \,.\, x) - Q_I' \,.\, Z_I - Q_{II}' \,.\, Z_{II} = 0.$

Die drei ersten Gleichungen stellen die Bedingungen des Gleichgewichts gegen fortschreitende Bewegung dar, die beiden letzten die Bedingungen des Gleichgewichts gegen Drehung um die Axen X und Y. Die Gleichungen 1), 2), 4) und 5) genügen zur Bestimmung der Drucke Q_I' Q_I'' und Q_{II}' Q_{II}'', wogegen zur Bestimmung der Drucke Q_I''' und Q_{II}''', nämlich derjenigen, welche in den fixen Punkten auf Verschieben des Systems in der Richtung der Verbindungslinie wirken, nur die eine Gleichung 3) vorhanden ist; es bleibt daher einer von diesen beiden Drucken entweder willkürlich anzunehmen oder durch andere Bedingungen zu bestimmen.

Entwickelt man aus 1) und 5) die Drucke Q_I' und Q_{II}' so findet man:

$$142)\begin{cases} Q_I' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha.[z - Z_{II}]) + \Sigma(K.\cos\gamma.x)}{Z_I - Z_{II}} \\ Q_{II}' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha.[z - Z_I]) + \Sigma(K.\cos\gamma.x)}{Z_{II} - Z_I} \\ Q_I'' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\beta.[z - Z_{II}]) + \Sigma(K.\cos\gamma.y)}{Z_I - Z_{II}} \\ Q_{II}'' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\beta.[z - Z_I]) + \Sigma(K.\cos\gamma.y)}{Z_{II} - Z_I} \\ \text{während zwischen } Q_I''' \text{ und } Q_{II}''' \text{ nur die Beziehung bleibt} \\ \qquad Q_I''' + Q_{II}''' = \Sigma(K.\cos\gamma). \end{cases}$$

Man bemerkt leicht, daſs der Nenner in den obigen Gleichungen überall die Entfernung der beiden fixen Punkte ausdrückt, und daſs der Zähler die Momentensummen in Bezug auf Drehung um eine Axe bezeichnet, die durch den andern fixen Punkt geht, und normal sowohl zu der Richtung der Verbindungslinie der fixen Punkte, als zu der Richung ist, für welche man den Druck des Systems bestimmen will (135a). Hieraus ergiebt sich, daſs die Gleichungen 142) folgendes Gesetz darstellen:

Wenn in einem festen System, auf welches beliebige Kräfte einwirken zwei fixe Punkte vorhanden sind, so rotirt dasselbe um eine Axe, welche durch die beiden fixen Punkte geht (fixe Axe); man findet den Druck des Systems auf einen der fixen Punkte nach einer Richtung, die normal zu dieser Drehaxe ist, wenn man die Summe der Momente der sämmtlichen übrigen auf das System angebrachten Kräfte in Bezug auf eine Axe, die durch den andern fixen Punkt geht, und normal sowohl zur Drehaxe, als zu der betrachteten Richtung ist, dividirt durch den Abstand der beiden fixen Punkte.

Das Moment des auf Drehung um die fixe Axe wirkenden Kräftepaares drückt sich aus durch:

$$142a)\begin{cases} \Sigma(K.\cos\alpha.y) + \Sigma(K.\cos\beta.x) \\ \text{oder auch durch} \\ \Sigma(K.\sin\gamma.R_{III}) \quad \text{(Gleichung 135a)} \end{cases}$$

wenn R_{III} den kürzesten Abstand jeder Kraftrichtung von der fixen Axe, und γ den Winkel bezeichnet, den die Kraftrichtung mit der fixen Axe bildet.

Liegen die sämmtlichen Drucke in Ebenen, welche normal zu der fixen Axe sind, so ist für alle Drucke $\gamma = 90^\circ$ folglich

$\cos\gamma = 0$, und es folgt, dafs der Druck, welcher auf Verschieben in der Richtung der Axe wirkt, Null ist; bezeichnen wir den Abstand der beiden fixen Punkte mit L, die Koordinaten der Drucke K... in Bezug auf eine Ebene, welche durch den ersten fixen Punkt geht und normal zur fixen Axe ist mit z_0.... so folgt:

$$Z_{II} - Z_I = L;\quad z = z_0 + Z_I = z_0 + Z_{II} - L$$

$$Z_I - Z_{II} = -L;\quad z - Z_{II} = z_0 - L;\quad z - Z_I = z_0.$$

Es gehen also die Gleichungen 142) für diesen Fall über in folgende:

$$142\,b)\left\{\begin{array}{l} Q_I' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha.[L-z_0])}{L};\quad Q_I'' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\beta.[L-z_0])}{L} \\[2ex] Q_{II}' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha.z_0)}{L};\quad Q_{II}'' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\beta.z_0)}{L}; \end{array}\right.$$

d. h. wenn ein festes System um eine Axe rotirt, welche durch zwei fixe Punkte geht, und es liegen sämmtliche Kräfte, die auf das System wirken, in Ebenen die zu der Axe normal sind, so findet man den Druck auf jeden der fixen Punkte nach irgend einer Richtung, wenn man die mit dieser Richtung parallelen Komponenten jeder Kraft mit dem Abstand ihres Angriffspunkts von einer Ebene, welche in dem andern fixen Punkt normal zur Drehaxe ist, multiplizirt, und die Summe der Produkte durch den Abstand der beiden fixen Punkte dividirt.

3) Festes System mit drei fixen Punkten. Hat ein festes System drei fixe Punkte, so können dieselben entweder in gerader Linie liegen, oder nicht.

Liegen die der fixen Punkte in gerader Linie, so ist der Fall zum Theil auf den vorigen zurückzuführen; die Drehaxe mufs mit jener geraden Linie zusammenfallen, allein indem man die Bedingungsgleichung 1 bis 5 (S. 146) bildet, und die Drucke auf den dritten fixen Punkt Q_{III}', Q_{III}'', Q_{III}''' mit den Koordinaten X_{III}, Y_{III} und Z_{III} einführt, so ergiebt sich bald, dafs nun die Zahl der Unbekannten gröfser ist, als die Zahl der Gleichungen; es lassen sich also nun die Drucke auf die fixen Punkte nicht anders bestimmen, als indem man entweder neue Bedingungen giebt, oder indem man gewisse Drucke annimmt. Diese Bemerkung gilt natürlich nur unter der Voraussetzung, dafs das System ein absosut festes (§ 64. S. 84) sei, dafs wir also keine Formveränderung desselben voraussetzen dürfen. In manchen Fällen ist die Voraussetzung zulässig, dafs das System durch eine Ebene, die normal zu der Verbindungslinie der drei fixen Punkte ist, und durch den mittlern fixen

Punkt geht, sich in zwei feste Systeme jedes mit zwei fixen Punkten zerlegen lasse, und dann sind die Drucke auf die fixen Punkte nach Anleitung der Gleichungen 142) zu bestimmen, indem man die Kräfte, deren Angriffspunkte auf der einen Seite der Ebene liegen als zu dem einen System, diejenigen auf der anderen Seite der Ebene als zu dem andern System gehörig ansieht.

Hat ein festes System drei fixe Punkte, welche **nicht** in gerader Linie liegen, so ist das System in vollkommenem Gleichgewicht, denn es kann zufolge des für die fixen Punkte im Anfange dieses Paragraphen entwickelten Satzes No. 1 (S. 143) keine fortschreitende Bewegung haben, und es kann auch keine drehende Bewegung um irgend eine Axe annehmen, denn eine solche Drehaxe müfste alle drei fixen Punkte aufnehmen, und das würde der Voraussetzung widersprechen, dafs die drei fixen Punkte nicht in ein und derselben geraden Linie liegen.

Reduktion der Kräfte in einem System mit zwei fixen Punkten.

§ 80. Hat ein festes System zwei fixe Punkte, und ist es daher gezwungen um eine Axe zu rotiren, welche durch diese beiden Punkte geht, so nennt man diese Axe die fixe Axe des Systems.

I. Denken wir ein festes System mit zwei fixen Punkten, und es mögen die Kraftrichtungen sämmtlich in Ebenen liegen, die normal zur fixen Axe sind. Wir können nun den Druck bestimmen, den jede einzelne Kraft parallel mit ihrer Richtung in jedem der beiden fixen Punkte erzeugt, indem wir nämlich einstweilen alle übrigen Kräfte fortdenken, und die Gleichung 142b) oder das Gesetz derselben (S. 148) für diese Kraft allein anwenden. Wir sagen dann, die Kraft werde auf die fixen Punkte reduzirt. Wenn wir sämmtliche Kräfte einzeln auf die fixen Punkte reduziren, so erhalten wir in jedem der fixen Punkte eine Reihe von Drucken, deren Richtungen sämmtlich in einer Ebene liegen, die in dem fixen Punkt normal zur Drehaxe ist, und indem wir diese Drucke nach bekannten Regeln zusammensetzen, oder auch nach zwei rechtwinklig angenommenen Axen zerlegen, erhalten wir wieder die Drucke sämmtlicher Kräfte auf den fixen Punkt.

Die Richtigkeit dieses Gesetzes leuchtet ein, wenn wir berücksichtigen, dafs die mit den Kräften vorgenommenen Operationen lediglich die Berechnung der Gleichungen 142b) darstellen, mit dem Unterschiede, dafs wir für jede Kraft zuerst die Werthe $\frac{K.(L-z_0)}{L}$

und $\frac{K-z_0}{L}$ bilden, hierauf aber, nachdem durch diese Operation sämmtliche Kräfte reduzirt sind, die Werthe $\frac{K.(L-z)}{L}.\cos\alpha$ u. s. w. bilden, und dann die Summation dieser Werthe vornehmen.

II. Wenn die Drucke $K\ldots$, welche auf Drehung eines festen Systems um eine fixe Axe wirken in Ebenen liegen, die zu der fixen Axe normal sind, so kann man im Durchschnittspunkt jeder solchen Ebene mit der fixen Axe zwei gleich grofse, aber entgegengesetzt gerichtete Drucke $\mp K$ und $\pm K$ angebracht denken, die dem in dieser Ebene liegenden Druck $\pm K$ gleich und mit der Richtung desselben parallel sind. Nun giebt immer der ursprüngliche Druck $\pm K$ mit einem der beiden in der Axe angebrachten Drucke $\mp K$ ein Kräftepaar, während der andere Druck in der Axe $\pm K$ durch die Reaktion der fixen Punkte aufgehoben wird. Die verschiedenen Drucke $\pm K$, welche mit den ursprünglichen Drucken gleich grofs und gleich gerichtet sind, kann man auf die fixen Punkte reduciren, und dabei nach dem so eben entwickelten Gesetz verfahren, während das in der Ebene bestehende Kräftepaar den Gesetzen für die Kräftepaare unterworfen bleibt. Das Moment dieses Kräftepaares ist offenbar $K.R_{,,,}$, wenn $R_{,,,}$ der kürzeste Abstand der Kraftrichtung $\pm K$ von der fixen Axe ist. Man kann alle die einzelnen Kräftepaare zu einem Kräftepaar vereinigen, man kann jedes in eine beliebige parallele Ebene verlegen, man kann für jedes Kräftepaar ein anderes substituiren, dessen Hebelsarm oder dessen Druck beliebig anzunehmen sind. Man kann dabei die Kraft $\mp K$ immer durch die fixe Axe gehend denken oder auch nicht. Denkt man für das Kräftepaar $KR_{,,,}$ ein anderes Kräftepaar, das demselben gleich ist, dessen Druck aber K_0 und dessen Hebelsarm ϱ sei, so sagt man, es sei der Druck K von dem Hebelsarm $R_{,,,}$ auf dem Hebelsarm ϱ reduzirt worden, und aus der Gleichung

$$143)\left\{\begin{aligned} KR_{,,,} &= K_0\,\varrho \text{ folgt:}\\ K_0 &= K.\frac{R_{,,,}}{\varrho}\\ \varrho &= \frac{K}{K_0}.R_{,,,}.\end{aligned}\right.$$

Das Reduziren der Kräfte ist daher nichts anderes, als die Substitution eines Kräftepaars, durch ein anderes, dessen Moment dem ersten gleich ist, und man hat bei dieser Substitution volle Freiheit alle die Gesetze in Anwendung zu bringen, welche wir für die Kräftepaare (§ 78) entwickelt haben, nur darf man nie vergessen, dafs man es hierbei stets mit den Momenten zu thun hat, dafs also die Kräfte jedes substituirten Kräftepaars in Bezug auf fortschreitende Bewegung sich aufheben, und dafs folglich durch dergleichen Reduktionen der Druck auf die fixen Punkte nicht geändert wird.

Von den in einem festen System thätigen Kräften.

Thätige (lebendige) Kräfte der fortschreitenden Bewegung; Mittelpunkt derselben, Schwerpunkt, Guldinsche Regeln.

§ 81. Wenden wir uns nunmehr wieder zu den Betrachtungen des § 66. S. 88. Wir haben in dem Vorstehenden die wichtigsten Gesetze über die Wirkung der auf ein festes System angebrachten Kräfte entwickelt, und es wird sich nun darum handeln, die Gesetze für die in einem festen System thätigen Kräfte festzustellen. Nachdem dies geschehen, haben wir noch die Beziehungen zu untersuchen, welche zwischen den auf ein festes System angebrachten, und den in einem festen System thätigen Kräften statt finden. Zunächst ist wiederholt darauf hinzuweisen, dafs der Begriff der in einem System thätigen Kräfte nur auf einer Vorstellung beruht, welche wir zur Erleichterung der Anschauung gewisser Vorgänge eingeführt haben. Wir substituiren für die auf das System in verschiedenen Angriffspunkten angebrachten Kräfte andere Kräfte, nämlich solche, die in jedem einzelnen Massenelement thätig sein müfsten, um in dem System genau dieselbe Wirkung hervorzubringen, welche jene erzeugen (S. 66), oder mit anderen Worten, wir denken uns in dem System anstatt der auf dasselbe angebrachten Kräfte, andere Kräfte angebracht, deren Betrachtung bequemer ist. Da also die in einem System thätigen Kräfte sich vollkommen ansehen lassen, als eine neue Gruppe auf das System angebrachter Kräfte, durch welche wir die Wirkung der ursprünglich angebrachten Kräfte ersetzt denken, so werden sie auch im Allgemeinen keinen anderen Gesetzen unterliegen, als denen, welche wir für die auf ein festes System angebrachten Kräfte in den vorigen Paragraphen hergeleitet haben, nur werden diese Gesetze sich dadurch modificiren, dafs gewisse neue Bedingungen hinzutreten, welche diese neuen Kräfte erfüllen müssen, um den Voraussetzungen zu entsprechen, die wir für dieselben gemacht haben.

Indem wir also die thätigen oder lebendigen Kräfte (S. 89) betrachten, welche der fortschreitenden Bewegung des Systems entsprechen, werden wir von der Resultirenden dieser Kräfte