

veränderung, oder einer Zerstörung des Systems durch die auf dasselbe wirkenden Kräfte.

Allgemeine Gesetze für die Bewegung eines festen Systems. — Fortschreitende und drehende Bewegung.

§ 65. Bewegt sich ein festes System unter dem Einfluß beliebiger Kräfte, so haben entweder alle Massenelemente desselben gleiche Geschwindigkeit, oder sie haben verschiedene Geschwindigkeiten, doch stehen in diesem Fall die Geschwindigkeiten in einem bestimmten abhängigen Verhältniß zu einander; denn, da die Elemente des Systems ihren gegenseitigen Abstand nicht ändern können, so kann das Wegelement eines Massenelementes in einem Zeitelement nicht unabhängig sein von dem Wegelement, welches jedes der anderen Massenelemente in derselben Zeit zurücklegt.

Sind die Geschwindigkeiten aller Massenelemente in einer gewissen Zeit unter sich stets gleich groß und haben sie auch einerlei Richtung, so schreiten die sämtlichen Massenelemente in parallelen geraden Linien fort, und umgekehrt. Sind dagegen die Geschwindigkeiten der einzelnen Massenelemente während einer gewissen Zeit nicht gleich groß, oder sind sie zwar gleich groß, aber ihre Richtungen sind entgegengesetzt, so bewegen sich sämtliche Massenelemente in Kurven. Da aber die Massenelemente dabei ihren gegenseitigen Abstand nicht ändern dürfen, so müssen auch die in irgend einem Augenblick von ihnen beschriebenen Kurvenelemente überall denselben Abstand von einander behalten, also entweder äquidistant sein, oder zusammenfallen. Dies ist nicht anders denkbar, als wenn die gleichzeitig durchlaufenen Kurvenelemente sämtlich aus ein und demselben Punkte beschrieben werden können, wobei jedoch nicht ausgeschlossen bleibt, daß dieser Punkt in demselben Zeitelement selbst fortrückt. Denn: denken wir uns irgend ein Massenelement des Systems, und es sei der Weg desselben in dem betrachteten Zeitelement irgend ein beliebiges Kurvenelement, denken wir uns sodann den Mittelpunkt des Krümmungskreises dieses Kurvenelements, und nehmen an, dieser Mittelpunkt sei mit dem System fest verbunden, so dürfen die Abstände aller übrigen Massenelemente von diesem fest verbundenen Punkte sich bei der Bewegung nicht ändern. Nun erscheint aber der Mittelpunkt jenes Krümmungskreises für den Augenblick, in welchem jenes zuerst betrachtete Massenelement sein Kurvenelement durchläuft, als fester Punkt, um welchen die Drehung erfolgt, und da alle übrigen Mas-

senelemente in demselben Augenblick ihren Abstand von jenem Mittelpunkt nicht ändern dürfen, so müssen sie unter allen Umständen in diesem Augenblicke Bogenelemente aus demselben Mittelpunkt beschreiben. Aber die Massenelemente dürfen auch ihren Abstand unter einander nicht ändern. Dazu gehört zweierlei, nämlich:

- a) die Bogenelemente, welche die einzelnen Massenelemente bei jener Bewegung beschreiben, müssen entweder in ein und derselben Ebene, oder in parallelen Ebenen liegen, und
- b) die Bogenelemente müssen sämmtlich mit derselben Winkelgeschwindigkeit durchlaufen werden. Dies läßt sich leicht einsehen, wenn man beachtet, daß, falls diese beiden Bedingungen für irgend ein Element nicht erfüllt werden, dasselbe nothwendiger Weise eine Verschiebung gegen die übrigen erleiden werde.

Denken wir nun die Ebene des Krümmungskreises für das zuerst betrachtete Bahnelement, so müssen alle übrigen Bahnelemente nach der Bedingung a) entweder in dieser Ebene, oder in solchen Ebenen liegen, welche mit derselben parallel sind. Errichten wir im Mittelpunkt des zuerst betrachteten Krümmungskreises eine Normale zu der Ebene desselben, so erscheinen offenbar im Allgemeinen die Wegelemente sämmtlicher Massenelemente als Bögen, welche den Peripherien der Grundflächen von Kegeln angehören, deren gemeinschaftliche Axe die eben betrachtete Normale, deren gemeinschaftliche Spitze der Mittelpunkt des zuerst betrachteten Krümmungskreises ist, und deren Grundflächen in jenen parallelen Ebenen liegen. Das heißt nichts anders, als es fallen die Wegelemente sämmtlicher Massenelemente mit Kreisbögen zusammen, welche aus den Punkten beschrieben werden, in welchen jene Normale die betreffenden Parallelebenen schneidet. Die Kreise, mit deren Bögen die Wegelemente zusammenfallen, sind aber auch die Krümmungskreise der Wegelemente, und es folgt daraus, daß die Mittelpunkte sämmtlicher Krümmungskreise der einzelnen Wegelemente nicht nur in parallelen Ebenen, sondern auch in ein und derselben geraden Linie liegen müssen, welche normal ist zu jenen parallelen Ebenen. Diese gerade Linie heißt die Drehungsaxe des Systems. Da übrigens das zuerst betrachtete Massenelement ein beliebiges war, so muß der Mittelpunkt des Krümmungskreises jedes anderen Massenelementes dieselben Eigenschaften haben, und schon hieraus folgt der eben entwickelte Satz, denn nur in dem Fall, wo die Mittel-



punkte sämtlicher Krümmungskreise in derselben geraden Linie liegen, lassen sich sämtliche Wegelemente als Bogenstücke von den Peripherien der Grundflächen normaler Kegel auffassen, deren gemeinschaftliche Axe diese gerade Linie, und deren gemeinschaftliche Spitze ein beliebiger Punkt dieser geraden Linie ist.

Im nächsten Augenblick kann der Punkt, aus welchem wir die sämtlichen Wegelemente beschrieben dachten, noch derselbe sein, oder er kann seine Lage geändert haben, d. h. jener Punkt kann, während die Massenelemente des Systems um ihn eine Drehung machen, selbst fortrücken. Geschieht dies Fortrücken immer in derselben Ebene, in welcher der zuerst betrachtete Krümmungskreis liegt, so beschreibt das zuerst betrachtete Massenelement, und folglich auch alle übrigen ebene Kurven. Die Drehungsaxe des Systems rückt dabei parallel mit ihrer ursprünglichen Lage fort. Schreitet der Punkt, um welchen wir die Drehung erfolgend denken, so fort, daß er nicht stets in jener Ebene bleibt, so beschreiben sämtliche Massenelemente Kurven von doppelter Krümmung, dabei schreitet die Axe so fort, daß sie fortwährend andere Winkel mit ihrer ursprünglichen Lage macht.

Aus diesen Darstellungen folgt nun folgendes Gesetz:

Wenn ein festes System sich bewegt, und die Geschwindigkeiten der einzelnen Massenelemente sind der Richtung und Gröfse nach in irgend einem Augenblick **nicht** gleich, so läfst sich die Bewegung immer so auffassen, als ob sämtliche Massenelemente in diesem Augenblick eine Drehung um ein und dieselbe Axe mit derselben Winkelgeschwindigkeit und in parallelen Ebenen machten, während diese Axe gleichzeitig nach irgend einem Gesetz fortrückt. Es ist dabei nicht ausgeschlossen, daß eine dieser beiden Bewegungen Null sein könne.

Ferner ergeben sich folgende Gesetze:

- 1) Ist der Weg, welchen ein Massenelement macht, gegeben, und ist auch die Lage der übrigen Massenelemente des Systems gegen dieses Element bekannt, so ist der Weg aller übrigen Massenelemente bestimmt;
- 2) Ändert sich in irgend einem Augenblick die Geschwindigkeit eines Massenelements des festen Systems, so ändern sich gleichzeitig die Geschwindigkeiten aller übrigen Elemente, und

- 3) Bleibt in irgend einem Augenblick die Geschwindigkeit irgend eines Elements des festen Systems ungeändert, so bleibt die Geschwindigkeit aller übrigen Elemente des Systems ungeändert.

Aus dem oben entwickelten Gesetz ergibt sich, dafs wenn ein festes System in Bewegung ist, im Allgemeinen jedes Massenelement gleichzeitig zwei Bewegungen mache, nämlich:

- 1) eine drehende Bewegung um eine gemeinschaftliche Axe mit einer allen Massenelementen gemeinschaftlichen Winkelgeschwindigkeit, und
- 2) eine fortschreitende Bewegung, welche alle Massenelemente mit der Axe gemeinschaftlich besitzen, und deren Weg-elemente für alle Massenelemente gleich grofs und parallel sind.

Diese beiden gleichzeitig erfolgenden Bewegungen können wir immer hervorgebracht denken durch Kräfte, welche auf die einzelnen Massenelemente in entsprechenden Richtungen wirken, und indem wir den Grundsatz I. des § 24 anwenden, können wir diese beiden gleichzeitig erfolgenden Bewegungen auch so auffassen, als ob sie innerhalb der Dauer eines Zeitelementes nach einander stattfänden, wobei es dann gleichgiltig ist, ob wir die fortschreitende Bewegung oder die drehende Bewegung als die zuerst erfolgende ansehen wollen.

Angriffspunkt einer Kraft. — Auf ein festes System angebrachte, und in einem festen System thätige Kräfte.

§ 66. Es ist hier ein sehr wesentlicher Unterschied hervorzuheben, welcher zwischen der Bewegung eines freien Massenelements und der Bewegung eines Massenelements, welches einem festen System angehört, statt findet. Ein freies Massenelement kann den Kräften, die auf dasselbe wirken, immer frei folgen und die Bahn desselben ist daher nur von diesen Kräften abhängig (vergl. § 37. S. 42); ein Massenelement, welches einem festen System angehört, kann dagegen nicht der Einwirkung der Kräfte, welche dasselbe in Anspruch nehmen, frei folgen, sondern seine Bahn ist auch bedingt durch den Zusammenhang mit den übrigen Elementen desselben Systems, und es ist durch diesen Zusammenhang gezwungen, jenen oben angedeuteten Bewegungsgesetzen zu folgen. Wie also auch die Kräfte beschaffen sein mögen, die auf die verschiedenen Massenelemente eines festen Systems wirken, das Resultat ihrer Wirkung wird immer jene fortschreitende und gleichzeitig drehende Bewegung der einzelnen Massenelemente sein.