Es ist übrigens hervorzuheben, dafs diese Betrachtungen nur zulässig sind, wenn a positiv ist, d. h. wenn die Rotationsaxe zwischen dem Mittelpunkt des Kreisbogens und dem Massenelement angenommen wird. Nimmt man sie auf der entgegengesetzten Seite, so ist immer:

$$q = r \,.\, \cos\alpha + a \,.\, \operatorname{cotg}\alpha$$
$$= \cos\alpha\left(r + \frac{a}{\sqrt{(1 - \cos\alpha^2)}}\right);$$

es ändert sich also q in demselben Sinn, wie $\cos\alpha$, und es können daher nie für zwei Winkel von verschiedenen Cos. gleiche Subnormalen statt finden.

c) Wirkung mehrer mechanischen Kräfte auf ein festes System von Massenelementen.

Festes System.

§ 63. Unter einem festen System von Massenelementen verstehen wir zwei oder mehre Massenelemente, welche in fester Verbindung (Th. I. § 3) mit einander stehen, die folglich mit einander so zusammenhängen, dafs sich keines unabhängig von dem andern bewegen kann, und deren Abstand unter einander daher stets unverändert bleibt, wie sich auch der Abstand der einzelnen Elemente von andern, nicht zu dem System gehörigen Punkten ändern mag (§ 12).

Jeder feste Körper stellt hiernach ein festes System von Massenelementen dar, so lange man von der Formänderung, welche er durch äufsere Kräfte erleiden kann, absieht.

Ein Massenelement, welches sich vollkommen unabhängig von andern Massenelementen bewegen kann, welches also keinem festen System angehört, nennen wir frei.

Innere Kräfte eines festen Systems — Festigkeit.

§ 64. Wirkt eine Kraft auf ein zu einem festen System gehöriges Massenelement, so hat sie im Allgemeinen das Bestreben, den Abstand desselben von den übrigen Elementen des Systems zu ändern; da aber eine solche Aenderung nicht statt finden kann, so lange das System ein festes bleiben soll, so mufs dies Bestreben durch eine Gegenkraft aufgehoben werden. Es mufs also der Druck der äufserlich auf das Massenelement wirkenden Kraft durch einen Gegendruck, welcher dem ersten der Gröfse nach gleich aber der Richtung nach entgegengesetzt ist, im Gleichgewicht gehalten werden (§ 19). Diesen Gegendruck schreiben wir analog der Betrachtung in § 36 einer innern Kraft des Systems zu. Wir nennen diese innere Kraft die Festigkeit des Systems.

Unter der Festigkeit eines festen Systems verstehen wir also überhaupt diejenigen Kräfte, welche sich der Aenderung des gegenseitigen Abstandes der einzelnen Elemente des Systems entgegensetzen.

Die Festigkeit eines Systems wird durch jeden äufsern Druck, welcher auf dasselbe wirkt, in Anspruch genommen, sie ist immer als eine diesem Druck gleich grofse, aber in entgegengesetzter Richtung wirkende Reaktion anzusehen, welche in dem Punkte wirksam zu denken ist, in welchem die Richtung des äufsern Druckes das System trifft. Von der Richtung dieses Druckes gegen die Elemente des festen Systems, und von der Lage und der Beschaffenheit dieser letzten ist es abhängig, in welcher Weise auch die übrigen Punkte des Systems sich an der durch jenen äufsern Druck hervorgerufenen Reaktion betheiligen. Jenachdem diese Betheiligung eine verschiedene ist, pflegt man der Festigkeit verschiedene Bezeichnungen beizulegen, als absolute, relative etc. (Vergl. I. S. 193). Sind die äufsern Drucke so grofs, dafs die innern Kräfte des Systems ihnen nicht mehr das Gleichgewicht halten können, so erfolgt eine Aenderung des gegenseitigen Abstandes der einzelnen Elemente, oder mit andern Worten eine Formänderung des Systems. Bei dieser Formänderung nehmen zuweilen die innern Kräfte des Systems zu, und es tritt dann in gewissen Fällen endlich ein Augenblick ein, in welchem sie den äufsern Kräften wiederum das Gleichgewicht halten. Hört die Wirkung der äufsern Kräfte auf, so stellt sich die ursprüngliche gegenseitige Lage der Elemente entweder vollkommen, oder theilweise, oder gar nicht wieder her. Man sagt dann, das System sei vollkommen, unvollkommen elastisch, oder unelastisch. Sind die äufsern Kräfte so grofs, dafs die innern Kräfte des Systems ihnen überhaupt nicht das Gleichgewicht halten können, so erfolgt eine Zerstörung des festen Systems, entweder nachdem zuvor eine Formveränderung mit Zunahme der innern Kräfte in der eben besprochenen Weise statt gefundenen hat (zähes System), oder, ohne dafs vorher irgend welche Formveränderung erfolgt ist (sprödes System).

Bei den folgenden Untersuchungen dieses Abschnittes setzen wir immer voraus, dafs wir es mit einem absolut festen System zu thun haben, abstrahiren also ganz von der Möglichkeit einer Formveränderung, oder einer Zerstörung des Systems durch die auf dasselbe wirkenden Kräfte.

Allgemeine Gesetze für die Bewegung eines festen Systems. — Fortschreitende und drehende Bewegung.

§ 65. Bewegt sich ein festes System unter dem Einflufs beliebiger Kräfte, so haben entweder alle Massenelemente desselben gleiche Geschwindigkeit, oder sie haben verschiedene Geschwindigkeiten, doch stehen in diesem Fall die Geschwindigkeiten in einem bestimmten abhängigen Verhältnifs zu einander; denn, da die Elemente des Systems ihren gegenseitigen Abstand nicht ändern können, so kann das Wegelement eines Massenelementes in einem Zeitelement nicht unabhängig sein von dem Wegelement, welches jedes der anderen Massenelemente in derselben Zeit zurücklegt.

Sind die Geschwindigkeiten aller Massenelemente in einer gewissen Zeit unter sich stets gleich grofs und haben sie auch einerlei Richtung, so schreiten die sämmtlichen Massenelemente in parallelen geraden Linien fort, und umgekehrt. Sind dagegen die Geschwindigkeiten der einzelnen Massenelemente während einer gewissen Zeit nicht gleich grofs, oder sind sie zwar gleich grofs, aber ihre Richtungen sind entgegengesetzt, so bewegen sich sämmtliche Massenelemente in Kurven. Da aber die Massenelemente dabei ihren gegenseitigen Abstand nicht ändern dürfen, so müssen auch die in irgend einem Augenblick von ihnen beschriebenen Kurvenelemente überall denselben Abstand von einander behalten, also entweder äquidistant sein, oder zusammenfallen. Dies ist nicht anders denkbar, als wenn die gleichzeitig durchlaufenen Kurvenelemente sämmtlich aus ein und demselben Punkte beschrieben werden können, wobei jedoch nicht ausgeschlossen bleibt, dafs dieser Punkt in demselben Zeitelement selbst fortrückt. Denn: denken wir uns irgend ein Massenelement des Systems, und es sei der Weg desselben in dem betrachteten Zeitelement irgend ein beliebiges Kurvenelement, denken wir uns sodann den Mittelpunkt des Krümmungskreises dieses Kurvenelements, und nehmen an, dieser Mittelpunkt sei mit dem System fest verbunden, so dürfen die Abstände aller übrigen Massenelemente von diesem fest verbundenen Punkte sich bei der Bewegung nicht ändern. Nun erscheint aber der Mittelpunkt jenes Krümmungskreises für den Augenblick, in welchem jenes zuerst betrachtete Massenelement sein Kurvenelement durchläuft, als fester Punkt, um welchen die Drehung erfolgt, und da alle übrigen Massenelemente in demselben Augenblick ihren Abstand von jenem Mittelpunkt nicht ändern dürfen, so müssen sie unter allen Umständen in diesem Augenblicke Bogenelemente aus demselben Mittelpunkt beschreiben. Aber die Massenelemente dürfen auch ihren Abstand unter einander nicht ändern. Dazu gehört zweierlei, nämlich:

a) die Bogenelemente, welche die einzelnen Massenelemente bei jener Bewegung beschreiben, müssen entweder in ein und derselben Ebene, oder in parallelen Ebenen liegen, und

b) die Bogenelemente müssen sämmtlich mit derselben Winkelgeschwindigkeit durchlaufen werden. Dies läſst sich leicht einsehen, wenn man beachtet, daſs, falls diese beiden Bedingungen für irgend ein Element nicht erfüllt werden, dasselbe nothwendiger Weise eine Verschiebung gegen die übrigen erleiden werde.

Denken wir nun die Ebene des Krümmungskreises für das zuerst betrachtete Bahnelement, so müssen alle übrigen Bahnelemente nach der Bedingung a) entweder in dieser Ebene, oder in solchen Ebenen liegen, welche mit derselben parallel sind. Errichten wir im Mittelpunkt des zuerst betrachteten Krümmungskreises eine Normale zu der Ebene desselben, so erscheinen offenbar im Allgemeinen die Wegelemente sämmtlicher Massenelemente als Bögen, welche den Peripherien der Grundflächen von Kegeln angehören, deren gemeinschaftliche Axe die eben betrachtete Normale, deren gemeinschaftliche Spitze der Mittelpunkt des zuerst betrachteten Krümmungskreises ist, und deren Grundflächen in jenen parallelen Ebenen liegen. Das heiſst nichts anders, als es fallen die Wegelemente sämmtlicher Massenelemente mit Kreisbögen zusammen, welche aus den Punkten beschrieben werden, in welchen jene Normale die betreffenden Parallelebenen schneidet. Die Kreise, mit deren Bögen die Wegelemente zusammenfallen, sind aber auch die Krümmungskreise der Wegelemente, und es folgt daraus, daſs die Mittelpunkte sämmtlicher Krümmungskreise der einzelnen Wegelemente nicht nur in parallelen Ebenen, sondern auch in ein und derselben geraden Linie liegen müssen, welche normal ist zu jenen parallelen Ebenen. Diese gerade Linie heiſst die Drehungsaxe des Systems. Da übrigens das zuerst betrachtete Massenelement ein beliebiges war, so muſs der Mittelpunkt des Krümmungskreises jedes anderen Massenelementes dieselben Eigenschaften haben, und schon hieraus folgt der eben entwickelte Satz, denn nur in dem Fall, wo die Mittelpunkte sämmtlicher Krümmungskreise in derselben geraden Linie liegen, lassen sich sämmtliche Wegelemente als Bogenstücke von den Peripherien der Grundflächen normaler Kegel auffassen, deren gemeinschaftliche Axe diese gerade Linie, und deren gemeinschaftliche Spitze ein beliebiger Punkt dieser geraden Linie ist.

Im nächsten Augenblick kann der Punkt, aus welchem wir die sämmtlichen Wegelemente beschrieben dachten, noch derselbe sein, oder er kann seine Lage geändert haben, d. h. jener Punkt kann, während die Massenelemente des Systems um ihn eine Drehung machen, selbst fortrücken. Geschieht dies Fortrücken immer in derselben Ebene, in welcher der zuerst betrachtete Krümmungskreis liegt, so beschreibt das zuerst betrachtete Massenelement, und folglich auch alle übrigen ebene Kurven. Die Drehungsaxe des Systems rückt dabei parallel mit ihrer ursprünglichen Lage fort. Schreitet der Punkt, um welchen wir die Drehung erfolgend denken, so fort, dafs er nicht stets in jener Ebene bleibt, so beschreiben sämmtliche Massenelemente Kurven von doppelter Krümmung, dabei schreitet die Axe so fort, dafs sie fortwährend andere Winkel mit ihrer ursprünglichen Lage macht.

Aus diesen Darstellungen folgt nun folgendes Gesetz:

> Wenn ein festes System sich bewegt, und die Geschwindigkeiten der einzelnen Massenelemente sind der Richtung und Gröfse nach in irgend einem Augenblick **nicht** gleich, so läfst sich die Bewegung immer so auffassen, als ob sämmtliche Massenelemente in diesem Augenblick eine Drehung um ein und dieselbe Axe mit derselben Winkelgeschwindigkeit und in parallelen Ebenen machten, während diese Axe gleichzeitig nach irgend einem Gesetz fortrückt. Es ist dabei nicht ausgeschlossen, dafs eine dieser beiden Bewegungen Null sein könne.

Ferner ergeben sich folgende Gesetze:

1) Ist der Weg, welchen ein Massenelement macht, gegeben, und ist auch die Lage der übrigen Massenelemente des Systems gegen dieses Element bekannt, so ist der Weg aller übrigen Massenelemente bestimmt;

2) Aendert sich in irgend einem Augenblick die Geschwindigkeit eines Massenelements des festen Systems, so ändern sich gleichzeitig die Geschwindigkeiten aller übrigen Elemente, und

3) Bleibt in irgend einem Augenblick die Geschwindigkeit irgend eines Elements des festen Systems ungeändert, so bleibt die Geschwindigkeit aller übrigen Elemente des Systems ungeändert.

Aus dem oben entwickelten Gesetz ergiebt sich, dafs wenn ein festes System in Bewegung ist, im Allgemeinen jedes Massenelement gleichzeitig zwei Bewegungen mache, nämlich:

1) eine drehende Bewegung um eine gemeinschaftliche Axe mit einer allen Massenelementen gemeinschaftlichen Winkelgeschwindigkeit, und
2) eine fortschreitende Bewegung, welche alle Massenelemente mit der Axe gemeinschaftlich besitzen, und deren Wegelemente für alle Massenelemente gleich grofs und parallel sind.

Diese beiden gleichzeitig erfolgenden Bewegungen können wir immer hervorgebracht denken durch Kräfte, welche auf die einzelnen Massenelemente in entsprechenden Richtungen wirken, und indem wir den Grundsatz 1. des § 24 anwenden, können wir diese beiden gleichzeitig erfolgenden Bewegungen auch so auffassen, als ob sie innerhalb der Dauer eines Zeitelementes nach einander statt fänden, wobei es dann gleichgiltig ist, ob wir die fortschreitende Bewegung oder die drehende Bewegung als die zuerst erfolgende ansehen wollen.

Angriffspunkt einer Kraft. — Auf ein festes System angebrachte, und in einem festen System thätige Kräfte.

§ 66. Es ist hier ein sehr wesentlicher Unterschied hervorzuheben, welcher zwischen der Bewegung eines freien Massenelements und der Bewegung eines Massenelements, welches einem festen System angehört, statt findet. Ein freies Massenelement kann den Kräften, die auf dasselbe wirken, immer frei folge und die Bahn desselben ist daher nur von diesen Kräften abhängig (vergl. § 37. S. 42); ein Massenelement, welches einem festen System angehört, kann dagegen nicht der Einwirkung der Kräfte, welche dasselbe in Anspruch nehmen, frei folgen, sondern seine Bahn ist auch bedingt durch den Zusammenhang mit den übrigen Elementen desselben Systems, und es ist durch diesen Zusammenhang gezwungen, jenen oben angedeuteten Bewegungsgesetzen zu folgen. Wie also auch die Kräfte beschaffen sein mögen, die auf die verschiedenen Massenelemente eines festen Systems wirken, das Resultat ihrer Wirkung wird immer jene fortschreitende und gleichzeitig drehende Bewegung der einzelnen Massenelemente sein.

Derjenige Punkt eines festen Systems, in welchem wir eine Kraft wirksam denken, heifst der Angriffspunkt dieser Kraft.

Denken wir uns beliebige Kräfte in verschiedenen Angriffspunkten auf ein System wirkend, und denken wir, dafs durch den Einflufs dieser Kräfte das System sich bewegt, so wird dieselbe Bewegung auch hervorgebracht werden können, wenn anstatt jener in den verschiedenen Angriffspunkten wirkenden Kräfte andere Kräfte in jedem einzelnen Massenelement des Systems thätig wären; nämlich solche Kräfte, welche jedem Massenelement während des betrachteten Zeitelementes zuerst eine bestimmte fortschreitende und dann eine bestimmte drehende Bewegung (oder auch in umgekehrter Folge) ertheilen. Wir können also immer für die Wirkung der in verschiedenen Angriffspunkten beliebig auf das System wirkenden Kräfte zwei Reihen anderer Kräfte substituiren (§ 35. No. 3), die in jedem einzelnen Massenelement als thätig zu denken sind, so dafs die eine Reihe von Kräften jedem Massenelement eine gemeinschaftliche mit gleicher Geschwindigkeit und in parallelen Richtungen erfolgende fortschreitende Bewegung ertheilt, während die andere Reihe von Kräften jedem Massenelement eine Drehung um eine gemeinschaftliche Axe mit derselben Winkelgeschwindigkeit, und in einer zu dieser Axe normalen Ebene ertheilt.

Die beliebigen in verschiedenen Angriffspunkten des festen Systems wirkenden Kräfte nennen wir „auf das System wirkende oder angebrachte Kräfte", und wenn wir für dieselben in der eben angedeuteten Weise andere Kräfte substituiren, die in jedem einzelnen Massenelement thätig gedacht, demselben die Bewegung ertheilen würden, welche es wirklich erleidet, so nennen wir diese substituirten Kräfte „die in dem System thätigen oder lebendigen Kräfte". Die in dem System thätigen Kräfte lassen sich immer zerlegen in die Kräfte der fortschreitenden und in diejenigen der drehenden Bewegung.

Nun können wir nach § 35 und 36 und nach § 64 den Fall immer so auffassen, als würden sämmtliche auf das feste System angebrachte Kräfte durch innere Kräfte des Systems, die ihnen der Richtung nach gleich, aber entgegengesetzt sind, im Gleichgewicht gehalten, und als wirkten die in dem System thätigen Kräfte allein frei auf die einzelnen Massenelemente ein.

Um nun die Gesetze, nach welchen die Wirkung von Kräften auf ein festes System erfolgt, zu ermitteln, wollen wir zunächst die auf ein System angebrachten Kräfte, dann die in dem System thätigen Kräfte einer nähern Betrachtung unterziehen.

Von den auf ein festes System angebrachten Kräften.

Vollkommenes, unvollkommenes Gleichgewicht — Gegenkraft, Mittelkraft (Resultirende) mehrer auf ein festes System wirkenden Kräfte.

§ 67. Wirken beliebige Kräfte auf ein festes System, so ertheilen sie im Allgemeinen jedem Punkte desselben, wie wir oben gesehen haben, eine fortschreitende und eine drehende Bewegung. Wir sagen, die Kräfte, welche auf ein System wirken, seien in irgend einem Augenblick in vollkommenem Gleichgewicht, wenn sie dem System keine Bewegung, oder den einzelnen Massenelement keinen Geschwindigkeitszuwachs in diesem Augenblick ertheilen. Wenn dagegen die Kräfte dem System zwar keine fortschreitende, aber eine drehende Bewegung ertheilen, oder wenn sie zwar keine drehende, aber eine fortschreitende Bewegung bewirken, so sagen wir, es finde theilweises oder unvollkommenes Gleichgewicht statt, und bezeichnen den erstgenannten Fall als Gleichgewicht gegen fortschreitende, den andern Fall als Gleichgewicht gegen drehende Bewegung.

Sind mehre Kräfte, welche auf ein System wirken, nicht im Gleichgewicht, und es kann eine neue Kraft auf das System wirkend gedacht werden, durch deren Einwirkung Gleichgewicht statt finden würde, so nennen wir diese Kraft die Gegenkraft des Systems von Kräften. Denken wir in dem Angriffspunkt der Gegenkraft eine Kraft wirkend, welche derselben der Richtung nach gleich aber entgegengesetzt ist, so nennen wir diese die Mittelkraft, oder die Resultirende des ganzen Systems; denn offenbar würde die Wirkung der einzelnen in den verschiedenen Angriffspunkten wirkenden Kräfte durch die Wirkung dieser Mittelkraft substituirt werden können, das heifst, es würde die Wirkung auf das feste System dieselbe bleiben, wenn wir anstatt der einzelnen Kräfte die Mittelkraft in dem bestimmten Angriffspunkt allein wirksam denken.

Es folgt aus dieser Darstellung jedoch durchaus nicht, dafs für jedes feste System, auf welches beliebige Kräfte einwirken, jedesmal nur **eine** Mittelkraft wirklich denkbar sei; es kann vielmehr die fortschreitende Bewegung des Systems eine andere und in einem andern Angriffspunkt wirksame Gegenkraft bedingen, als die drehende Bewegung, ja es läfst sich oft die drehende Bewegung, welche die Kräfte dem System ertheilen, gar nicht durch eine