ihre Subnormale für jeden Punkt konstant sei, denn wenn in der Gleichung:

$$n = \frac{T_{\prime}}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{q}}$$

die Subnormale q konstant ist, so kann die Gleichung nicht anders erfüllt werden, als wenn auch n einen konstanten Werth hat, sobald aber n diesen Werth erreicht, wird die Gleichung erfüllt, wo auch das Massenelement sich auf der Kurve befinden mag.

Bekanntlich ist die Parabel eine Kurve, deren Subnormale für die symmetrische Axe konstant gleich dem halben Parameter ist. Es folgt daher für die gesuchte Parabel die Gleichung:

$$x^2 = 2qy,$$

und wenn man q aus der Gleichung 96) entwickelt und hier einsetzt:

$$x^2 = \frac{T_{\prime}^2 \cdot g}{2\pi^2 \cdot n^2} \cdot y.$$

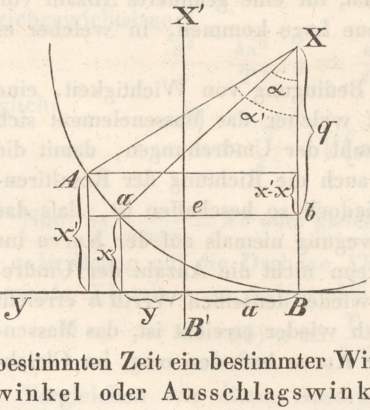
Bezeichnet n die Anzahl der Umdrehungen in einer Minute, so hat man $T_{\prime} = 60$, und nach Ausrechnung der Zahlenwerthe:

$$97)\ x^2 = 5684{,}115 \cdot \frac{y}{n^2}.$$

Hierdurch ist die Parabel bestimmt; die Rotationsaxe ist die Axe der X.

Gleichgewicht eines Massenelements auf einem rotirenden Kreisbogen.

§ 62. Ist die Kurve AB, in welcher sich das Massenelement bewegen kann, ein Kreisbogen, dessen Halbmesser $= r$ ist, und welcher um seinen Durchmesser rotirt, so drückt sich die Subnormale aus durch:



$$q = r \cdot \cos\alpha,$$

und da r für jeden Punkt konstant ist, so findet man, indem man diesen Werth von q in die Gleichung 96) einsetzt:

$$98)\ n = \frac{T_{\prime}}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos\alpha}}.$$

Es entspricht daher jeder Anzahl von Umdrehungen in einer bestimmten Zeit ein bestimmter Winkel α, welcher der Erhebungswinkel oder Ausschlagswinkel heifst. Aendert sich die Anzahl der Umdrehungen, so wird auch der Ausschlagswinkel geändert, das Massenelement kann dann bei einer geänderten Umdrehungszahl ins Gleichgewicht kommen, aber nothwendiger Weise in einer andern Lage, und dies bedingt einen wesentlichen Unterschied mit dem eben betrachteten Fall (§ 61), wo sich das Massenelement in einer Parabelbahn bewegte.

Hat der Winkel α zugenommen bis α', so ist die Entfernung des Massenelements von der Horizontalen um

$$x' - x = r(\cos\alpha' - \cos\alpha)$$

gewachsen.

Der hier besprochene Fall setzt voraus, dafs der Mittelpunkt des Kreises, in welchem das Massenelement steigen und fallen kann, in der Rotationsaxe liege. Diese Annahme ist keineswegs nothwendig. Denken wir, es sei $X'B'$ die Rotationsaxe, während XB eine andre vertikale, durch den Mittelpunkt des Kreisbogens AB gehende Axe vorstelle. Der Abstand der Axe $X'B'$ von XB sei a. Für irgend eine Lage des Massenelements in a ist nun die Subnormale auf der neuen Axe:

$$q = ae = r \,.\, \cos\alpha - a \,.\, \operatorname{cotg}\alpha,$$

und folglich:

$$99)\quad n = \frac{T_{\prime}}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r \,.\, \cos\alpha - a \,.\, \operatorname{cotg}\alpha}}\,.$$

Bei dieser Anordnung ändert sich die Subnormale nicht in demselben Sinne, in welchem der Cosinus des Erhebungswinkels sich ändert. Es ist denkbar, dafs, während sich der Winkel α wachsend bis α' ändert, die Aenderung der Subnormale äufserst gering sein, dafs also für die Lagen des Massenelements in dem Bogen $\alpha' - \alpha$ die Subnormale fast einen konstanten Werth haben könne, und dafs mithin für diese Lagen der Kreisbogen, welcher um eine Sehne rotirt, näherungsweise dieselben Eigenschaften haben könne, welche die Parabel, die um ihre symmetrische Axe rotirt, für alle Lagen des Massenelements hat. Es wird dabei wesentlich auf die Entfernung a der Rotationsaxe von dem Mittelpunkt des Kreisbogens ankommen, und wir wollen, da dieser Gegenstand von praktischer Wichtigkeit ist, untersuchen, welchen Werth a haben müsse, damit für die Lagen des Massenelements in dem Bogen von $\alpha' - \alpha$ die Subnormale nahezu konstant bleibe.

Für den Erhebungswinkel α ist die Subnormale:

$$q = r \,.\, \cos\alpha - a \,.\, \operatorname{cotg}\alpha,$$

und für den Erhebungswinkel α' hat sie den Werth:

$$q' = r \,.\, \cos\alpha' - a \,.\, \operatorname{cotg}\alpha'.$$

Wenn nun die Subnormale für den Ausschlagswinkel α denselben Werth hat, als für α', so kann sie zwar für jeden zwischen α und α' liegenden Winkel einen andern Werth haben, allein sie wird, indem sich der Winkel von α bis α' ändert, sich nur in der Weise ändern können, dafs sie um eben soviel wächst, als sie abnimmt, so dafs also ihr mittler Werth derselbe bleibt. Wir setzen demnach:

$$q = q'; \quad r \cdot \cos\alpha - a \cdot \operatorname{cotg}\alpha = r \cdot \cos\alpha' - a \cdot \operatorname{cotg}\alpha',$$

folglich:

$$100) \quad a = r \cdot \frac{\cos\alpha - \cos\alpha'}{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\alpha'}.$$

Z. B. es soll das Massenelement, während es den Bogen von 30 Grad bis 45 Grad durchläuft, nahezu eine konstante Subnormale haben, wie weit mufs die vertikale Sehne, um welche der Kreisbogen rotirt, von dem Durchmesser desselben entfernt sein.

Es ist:

$$a = r \frac{\cos 30^0 - \cos 45^0}{\operatorname{cotg} 30^0 - \operatorname{cotg} 45^0}$$

$$a = 0{,}217\,r.$$

Es ist dann die Subnormale:

$$q = r \cdot \cos\alpha - a \cdot \operatorname{cotg}\alpha$$
$$= r\,(\cos\alpha - 0{,}217 \operatorname{cotg}\alpha),$$

also für:

$$30^0 \quad q = 0{,}4901\,r$$
$$32^0 \quad q = 0{,}5007\,r$$
$$34^0 \quad q = 0{,}5073\,r$$
$$36^0 \quad q = 0{,}5103\,r$$
$$37\tfrac{1}{2}{}^0 \quad q = 0{,}5106\,r$$
$$38^0 \quad q = 0{,}5103\,r$$
$$40^0 \quad q = 0{,}5074\,r$$
$$42^0 \quad q = 0{,}5021\,r$$
$$44^0 \quad q = 0{,}4946\,r$$
$$45^0 \quad q = 0{,}4901\,r.$$

Die gröfste Differenz der Subnormalen beträgt also nur circa $0{,}02\,r$, und da sich die Umdrehungszahlen umgekehrt verhalten, wie die Quadratwurzeln aus den Subnormalen (No. 96), so wird, während das Massenelement auf diesem Bogen sich befindet, die Zahl der Umdrehungen, bei welchen es im Gleichgewicht ist, höchstens zwischen n und $n\sqrt{\frac{0{,}5106}{0{,}4901}} = 1{,}02\,n$ variiren können.

Es ist übrigens hervorzuheben, daſs diese Betrachtungen nur zulässig sind, wenn a positiv ist, d. h. wenn die Rotationsaxe zwischen dem Mittelpunkt des Kreisbogens und dem Massenelement angenommen wird. Nimmt man sie auf der entgegengesetzten Seite, so ist immer:

$$q = r \,.\, \cos\alpha + a \,.\, \operatorname{cotg}\alpha$$
$$= \cos\alpha\left(r + \frac{a}{\sqrt{(1 - \cos\alpha^2)}}\right);$$

es ändert sich also q in demselben Sinn, wie $\cos\alpha$, und es können daher nie für zwei Winkel von verschiedenen Cos. gleiche Subnormalen statt finden.

c) Wirkung mehrer mechanischen Kräfte auf ein festes System von Massenelementen.

Festes System.

§ 63. Unter einem festen System von Massenelementen verstehen wir zwei oder mehre Massenelemente, welche in fester Verbindung (Th. I. § 3) mit einander stehen, die folglich mit einander so zusammenhängen, daſs sich keines unabhängig von dem andern bewegen kann, und deren Abstand unter einander daher stets unverändert bleibt, wie sich auch der Abstand der einzelnen Elemente von andern, nicht zu dem System gehörigen Punkten ändern mag (§ 12).

Jeder feste Körper stellt hiernach ein festes System von Massenelementen dar, so lange man von der Formänderung, welche er durch äuſsere Kräfte erleiden kann, absieht.

Ein Massenelement, welches sich vollkommen unabhängig von andern Massenelementen bewegen kann, welches also keinem festen System angehört, nennen wir frei.

Innere Kräfte eines festen Systems — Festigkeit.

§ 64. Wirkt eine Kraft auf ein zu einem festen System gehöriges Massenelement, so hat sie im Allgemeinen das Bestreben, den Abstand desselben von den übrigen Elementen des Systems zu ändern; da aber eine solche Aenderung nicht statt finden kann, so lange das System ein festes bleiben soll, so muſs dies Bestreben durch eine Gegenkraft aufgehoben werden. Es muſs also der Druck der äuſserlich auf das Massenelement wirkenden Kraft durch einen Gegendruck, welcher dem ersten der Gröſse nach gleich aber der Richtung nach entgegengesetzt ist, im Gleichgewicht