Es läfst sich ferner nachweisen *), dafs die Kurve, in welcher ein Massenelement von einem gegebenen Punkte nach einem andern, tiefer gelegenen, durch die Schwerkraft bewegt in der kürzesten Zeit gelangt, ebenfalls eine Cykloïde mit horizontaler Grundlinie ist, welche in dem Anfangspunkt des Falles beginnt und durch den tiefer gelegenen Punkt geht. Dieser Eigenschaft wegen nennt man die Cykloïde auch die Linie des kürzesten Falles, auch Brachystochrone. Der Beweis dieser Eigenschaft ist nur mittelst der Variationsrechnung zu liefern, wir müssen hier darauf verzichten, und verweisen in dieser Beziehung, sowie in Betreff des Beweises, dafs die Cykloïde mit horizontaler Grundlinie die einzige Tautochrone sei, auf das unten genannte Werk von Poisson **).

Allgemeines Gesetz für das Gleichgewicht eines Massenelements auf einer Kurve.

§ 59. **Bewegt sich ein Massenelement unter dem Einflufs verschiedener Kräfte in einer beliebigen Kurve, und ist die Resultirende aus diesen Kräften in irgend einem Augenblick normal zur Kurve, so sind die Kräfte in diesem Augenblick im Gleichgewicht, und umgekehrt: wenn die Kräfte in irgend einem Augenblick im Gleichgewicht sein sollen, so mufs die Resultirende normal zur Kurve sein.**

Dieser Satz folgt unmittelbar aus der Darstellung in § 55, denn für irgend einen Augenblick läfst sich die Resultirende als konstant wirkend betrachten (§ 33) und für eine konstant wirkende Kraft ist in § 55 nachgewiesen, dafs die Kräfte eine Gleichgewichtslage haben, wenn die Richtung der Resultirenden für einen gewissen Punkt normal zur Kurve ist.

Es sei (Fig. auf folg. Seite) AB eine beliebige ebene Kurve; das Massenelement befinde sich in a, und es wirken auf dasselbe die Drucke ein dG, parallel mit der Axe BX und dF parallel mit der Axe BY. Die Richtung des resultirenden Druckes ist dann zu bestimmen durch Gleichung 59) und mit Rücksicht auf Satz 2 in § 33 durch:

$$\tan \alpha = \frac{dF}{dG},$$

wenn α den Winkel bezeichnet, den der resultirende Druck mit

---

*) Vergl. Traité de Mécanique par S. D. Poisson. T. I. § 285. S. 425.

**) Ebendaselbst. Tom. I. § 283. S. 422.

der Richtung dG macht. Soll nun die Lage a eine Gleichgewichtslage sein, so mufs diese Richtung des resultirenden Druckes normal zur Kurve sein, und für diesen Fall hat man auch:

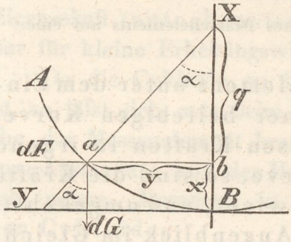
$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{dy}{dx},$$

folglich mufs für die Gleichgewichtslage immer die Gleichung statt finden:

$$95) \quad \frac{dF}{dG} = \frac{dy}{dx}.$$

Gleichgewicht eines Massenelements auf einer rotirenden Kurve.

§ 60. Denken wir nun, dafs dG der Druck der Schwerkraft sei, dafs die Axe BX vertikal sei, dafs die Kurve AB um die Axe BX gedreht werde, und dafs folglich das Massenelement der Einwirkung der Centrifugalkraft unterworfen sei. Da das Massenelement sich bei jener Drehung in einem Kreise bewegt, dessen Halbmesser die Ordinate y ist, so hat man, wenn w die Winkelgeschwindigkeit, und n die Anzahl der Umdrehungen bezeichnet, welche die Kurve in einer bestimmten Zeit $T_{,}$ macht, nach No. 79 und 80:



$$dF = d \cdot \frac{dG}{g} \cdot w^2 \cdot y = \frac{dG}{g} \cdot \frac{4\pi^2}{T_{,}^{\,2}} \cdot n^2 g.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung 95), so folgt für die Gleichgewichtslage:

$$\frac{n^2}{g} \cdot \frac{4\pi^2}{T_{,}^{\,2}} \cdot y = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} \alpha,$$

folglich:

$$n = \frac{T_{,}}{2\pi} \cdot \sqrt{\left(g \cdot \frac{\operatorname{tang} \alpha}{y}\right)}.$$

Nun ist $\frac{y}{\operatorname{tang} \alpha} = Xb$ oder gleich der Subnormalen des Punktes a in Bezug auf die Drehaxe XB. Bezeichnen wir diese Subnormale Xb mit q, so ergiebt sich:

$$96) \quad n = \frac{T_{,}}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{q}}.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit der Gleichung 92), so ergiebt sich die Zahl der Schwingungen n' eines mathematischen Pen-