$$T' = \pi \sqrt{\frac{r'}{g}},$$

folglich:

$$91) \quad T : T' = \sqrt{r} : \sqrt{r'},$$

d. h. für mathematische Kreispendel von verschiedener Länge verhalten sich die Schwingungszeiten wie die Quadratwurzeln aus den Längen der Pendel.

Ist T die Dauer einer Pendelschwingung, so ist $T \cdot n$ die Dauer von n Pendelschwingungen, nennen wir diese $T_{\prime}$, so hat man:

$$T_{\prime} = nT = n\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

$$92) \quad n = \frac{T_{\prime}}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Für ein Pendel von der Länge r' hat man in derselben Zeit die Anzahl der Pendelschwingungen:

$$n' = \frac{T_{\prime}}{\pi} \sqrt{\frac{g}{r'}},$$

folglich:

$$92a) \quad n : n' = \sqrt{\frac{1}{r}} : \sqrt{\frac{1}{r'}} = \sqrt{r'} : \sqrt{r},$$

d. h. für mathematische Kreispendel von verschiedenen Längen verhalten sich die Anzahl von Schwingungen in einer gegebenen Zeit **umgekehrt** wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen.

Aus der Formel 90 folgt für $T = 1$:

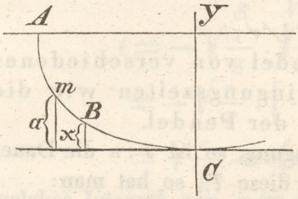
$$r = \frac{g}{\pi^2} = \frac{31{,}25}{9{,}8696} = 3{,}1666 \text{ Fufs.}$$

Ein Pendel, dessen Schwingungsdauer eine Sekunde beträgt, nennt man ein Sekundenpendel. Hiernach ist die Länge eines mathematischen Sekundenpendels:

3,1667 Fufs = 38 Zoll preufsisch,
= 0,9938 Mètres.

Pendelschwingung in einer beliebigen Kurve — Cykloïdenpendel — Tautochrone — Brachystochrone.

§ 58. Es sei allgemein (Fig. auf folg. Seite) ABC eine beliebige Kurve, in welcher ein Massenelement sich unter dem Einflufs der Schwerkraft bewegt. C sei ein Punkt des stabilen Gleichgewichts, und zugleich der Anfangspunkt des Koordinatensystems, dessen eine Axe cy mit der Richtung der Schwere zusammenfällt, also in dem Punkte C normal zur Kurve ist, während die beiden andern Axen in einer horizontalen, die Kurve C berührenden Ebene liegen. Ist a der Abstand des Punktes, in welchem das Massenelement seine Bewe-



gung von der Ruhe aus beginnt, so ist die erlangte Geschwindigkeit in dem Augenblick, wo es den Punkt B erreicht hat, dessen Abstand von der Horizontalen gleich x ist:

$$c = \sqrt{[2g(a-x).]}$$

Ist ds das Kurvenelement, so ist auch

$$c = \frac{-ds}{dt}$$

folglich

$$dt = \frac{-ds}{\sqrt{[2g(a-x)]}}.$$

Um nun die Zeit zu finden, welche das Massenelement braucht, um von einem Punkte der Kurve bis zu einem andern zu gelangen, mufs man diesen Ausdruck integriren, indem man ds und x von ein und demselben Urvariablen abhängig macht, und dann das Integral zwischen den entsprechenden Grenzen nehmen. Man kann dazu die Gleichung der Kurve benutzen. Ist dieselbe:

$$y = f_x + C$$
$$z = \varphi_x + C',$$

so hat man:

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = dx\sqrt{[1 + (df_x)^2 + (d\varphi_x)^2]},$$

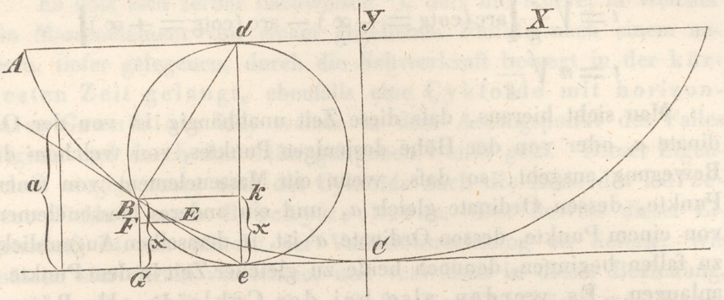
folglich ganz allgemein:

$$93)\quad t = -\frac{1}{\sqrt{2g}}\int\sqrt{\left[\frac{1 + (df_x)^2 + (d\varphi_x)^2}{a - x}\right]}dx + \text{Const.}$$

Gewöhnlich führt diese Methode, wegen des schwierigen Integrals, nur schwer zum Ziele, und man sucht lieber ds aus andern Eigenschaften der Kurve herzuleiten, wie wir es bei dem Kreispendel gethan.

Von den verschiedenen Kurven, in welchen Pendelschwingungen stattfinden können, hat, aufser dem Kreisbogen, noch die Cykloïde ein besonderes Interesse.

Es sei ABC eine Cykloïde, welche durch Abwickelung eines Kreises von dem Halbmesser gleich r auf der horizontalen Linie AX entstanden ist. Der Erzeugungskreis sei bei seiner Abwickelung in die Lage gekommen, in welcher er eben das Kurvenelement BE beschreibt; er berühre dabei die Grundlinie AX in d, und indem er sich auf derselben fortwälzt, macht er zunächst, indem er



das Element BE beschreibt, eine unendlich kleine Drehung um den Punkt d; es ist folglich die Sehne Bd des Erzeugungskreises die Normale für den Punkt B, und daher die hierzu normale Sehne Be Tangente für denselben. Wo die Richtung der Normalen mit der Richtung der Schwere zusammenfällt, ist ein Punkt des stabilen Gleichgewichts (§ 55). Da die Erzeugungslinie horizontal ist, so ist leicht einzusehen, dafs dies der Punkt C sein müsse, welcher zugleich Scheitel der Cykloïde ist. Nun ist:

$$BE = \frac{BF}{\sin(BEF)} = \frac{BF}{\sin(BeG)} = \frac{BF \cdot Be}{BG}.$$

Es ist aber $BE = ds$; $BF = dx$; $BG = x$; $Be = \sqrt{(ed.ek)} = \sqrt{(2r.x)}$, folglich hat man:

$$ds = dx\sqrt{\frac{2r}{x}},$$

setzt man diesen Werth in den oben gefundenen allgemeinen Ausdruck für dt, so hat man:

$$dt = \frac{-ds}{\sqrt{[2g(a-x)]}} = -\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(ax-x^2)}}$$

folglich:

$$t = -\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(ax-x^2)}}$$

$$= -\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \cdot \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{2x-a}{2\sqrt{(ax-x^2)}}\right)^{*)}$$

$$= \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \operatorname{arc}\left(\operatorname{cotg} = \frac{2x-a}{2\sqrt{(ax-x^2)}}\right).$$

Nehmen wir dies Integral zwischen den Grenzen $x = a$ bis $x = 0$, so findet man die Zeit, welche das Massenelement braucht, um von der Ruhe aus bis zum Punkt des stabilen Gleichgewichts in der Cykloïde zu fallen:

---

*) Es ist nämlich (Wolffs Zahlenlehre II. Th. § 607. No. 9):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(m+px-qx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{q}} \operatorname{arc}\left[\operatorname{tang} = \frac{2qx-p}{2\sqrt{q} \cdot \sqrt{(m+px-qx^2)}}\right].$$

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}}\left[\operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = -\infty) - \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = +\infty)\right]$$

$$t = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Man sieht hieraus, dafs diese Zeit unabhängig ist von der Ordinate a, oder von der Höhe desjenigen Punktes, von welchem die Bewegung ausgeht, so dafs, wenn ein Massenelement von einem Punkte, dessen Ordinate gleich a, und ein anderes Massenelement von einem Punkte, dessen Ordinate a' ist, in demselben Augenblicke zu fallen beginnen, dennoch beide zu gleicher Zeit in dem Punkte C anlangen. Es werden also bei der Cykloïde alle Bögen, die man von irgend einem Punkte der Kurve bis zum Scheitelpunkte rechnen kann, in gleichen Zeiten durchfallen, und deshalb nennt man die Cykloïde in Bezug auf diese Eigenschaft tautochronische Linie; das Kreispendel ist dagegen nur für kleine Erhebungswinkel annähernd isochron.

Da die Cykloïde zu beiden Seiten der Linie CY symmetrisch ist, so läfst sich, wie beim Kreispendel, zeigen, dafs die Zeit, welche das Massenelement braucht, um von C aus sich wiederum bis zum Abstande a von der Horizontalen zu erheben, ebenfalls gleich t sein müsse. Demnach ist die Dauer einer Schwingung in der Cykloïde:

$$94) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = \pi\sqrt{\frac{4r}{g}},$$

d. h. die Dauer der Schwingung ist ebenso grofs, wie bei einem isochron schwingenden Kreispendel, dessen Pendellänge gleich dem doppelten Durchmesser des erzeugenden Kreises der Cykloïde ist.

Denken wir die Cykloïde auf einen cylindrischen Körper, dessen Seiten vertikal sind, dessen Grundfläche aber eine ganz beliebige Form haben mag, aufgewickelt, und zwar so, dafs die Grundlinie der Cykloïde in einer horizontalen Ebene bleibt, so entsteht eine Kurve von doppelter Krümmung, welche aber immer noch dieselbe Eigenschaft des Tautochronismus haben mufs, wie die ursprüngliche Cykloïde, denn es ist für diese Kurve in dem Ausdruck:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{[2g(a-x)]}}$$

für denselben Werth von x das Kurvenelement ds von derselben Länge, wie bei der ursprünglichen Cykloïde, es hat also dt denselben Ausdruck, und folglich lassen sich daran dieselben Entwickelungen knüpfen, welche wir eben besprochen haben.

Es läfst sich ferner nachweisen *), dafs die Kurve, in welcher ein Massenelement von einem gegebenen Punkte nach einem andern, tiefer gelegenen, durch die Schwerkraft bewegt in der kürzesten Zeit gelangt, ebenfalls eine Cykloïde mit horizontaler Grundlinie ist, welche in dem Anfangspunkt des Falles beginnt und durch den tiefer gelegenen Punkt geht. Dieser Eigenschaft wegen nennt man die Cykloïde auch die Linie des kürzesten Falles, auch Brachystochrone. Der Beweis dieser Eigenschaft ist nur mittelst der Variationsrechnung zu liefern, wir müssen hier darauf verzichten, und verweisen in dieser Beziehung, sowie in Betreff des Beweises, dafs die Cykloïde mit horizontaler Grundlinie die einzige Tautochrone sei, auf das unten genannte Werk von Poisson **).

Allgemeines Gesetz für das Gleichgewicht eines Massenelements auf einer Kurve.

§ 59. **Bewegt sich ein Massenelement unter dem Einflufs verschiedener Kräfte in einer beliebigen Kurve, und ist die Resultirende aus diesen Kräften in irgend einem Augenblick normal zur Kurve, so sind die Kräfte in diesem Augenblick im Gleichgewicht, und umgekehrt: wenn die Kräfte in irgend einem Augenblick im Gleichgewicht sein sollen, so mufs die Resultirende normal zur Kurve sein.**

Dieser Satz folgt unmittelbar aus der Darstellung in § 55, denn für irgend einen Augenblick läfst sich die Resultirende als konstant wirkend betrachten (§ 33) und für eine konstant wirkende Kraft ist in § 55 nachgewiesen, dafs die Kräfte eine Gleichgewichtslage haben, wenn die Richtung der Resultirenden für einen gewissen Punkt normal zur Kurve ist.

Es sei (Fig. auf folg. Seite) AB eine beliebige ebene Kurve; das Massenelement befinde sich in a, und es wirken auf dasselbe die Drucke ein dG, parallel mit der Axe BX und dF parallel mit der Axe BY. Die Richtung des resultirenden Druckes ist dann zu bestimmen durch Gleichung 59) und mit Rücksicht auf Satz 2 in § 33 durch:

$$\tang \alpha = \frac{dF}{dG},$$

wenn α den Winkel bezeichnet, den der resultirende Druck mit

---

*) Vergl. Traité de Mécanique par S. D. Poisson. T. I. § 285. S. 425.

**) Ebendaselbst. Tom. I. § 283. S. 422.