läuft, auf der andern Seite dieser Lage eine ebenso grofse Entfernung von dem Mittelpunkt der Kraft erlangen, als es bei dem Beginn der Bewegung hatte, dann für einen Augenblick zur Ruhe kommen, sich hierauf, wieder mit Null-Geschwindigkeit beginnend, rückwärts in seine ursprüngliche Lage zurückbewegen, und diese hin- und hergehende Bewegung ununterbrochen fortsetzen. Bei dieser Bewegung hat das Massenelement zu beiden Seiten der stabilen Gleichgewichtslage in gleichen Abständen vom Mittelpunkt der Kraft gleiche Geschwindigkeiten.

Diese Gesetze lassen sich leicht für den Fall verstehen, wo der Mittelpunkt der Kraft unendlich weit entfernt liegt.

Eine solche hin- und hergehende Bewegung eines Massenelements nennen wir eine schwingende Bewegung. Die Bewegung von dem Zustand der Ruhe aus durch die stabile Gleichgewichtslage bis wiederum zum Zustand der Ruhe hin, nennen wir eine Schwingung. Die Schwingungen wiederholen sich hiernach ununterbrochen, so lange die Resultirende für den Mittelpunkt der Kraft konstant wirkend bleibt. Diese Voraussetzung trifft jedoch bei den in der Praxis vorkommenden Fällen nur sehr selten zu.

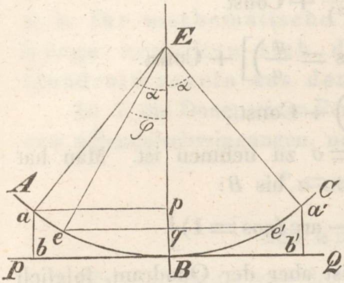
Mathematisches Pendel — Pendelschwingung im Kreisbogen.

§ 57. Ein Massenelement, welches unter dem Einflufs der Schwerkraft in irgend einer Kurve schwingt, so dafs es bei dieser Schwingung eine stabile Gleichgewichtslage durchläuft, nennt man ein mathematisches Pendel. Ist diese Kurve ein Kreisbogen, so nennt man das Pendel ein Kreispendel.

Es schwinge ein Massenelement unter dem Einflufs der Schwerkraft in dem Kreisbogen ABC. Ist EB die Richtung der Schwere, so erhalten wir die Lage des stabilen Gleichgewichts, wenn wir die Berührungsebene des Kreisbogens denken, welche normal zu EB ist, und zwischen dem Kreisbogen und dem Mittelpunkt der Kraft liegt. Der Berührungspunkt dieser Ebene B ist der Punkt des stabilen Gleichgewichts (§ 55). Fängt die Bewegung des Massenelements in a an, wo der Abstand von der Ebene gleich ab ist, so mufs, nach § 56, das Massenelement, nachdem es den Punkt B passirt hat, sich so weit erheben, dafs der Abstand $a'b'$ gleich ab wird; d. h. es wird der Winkel aEB gleich BEa' sein müssen.

Den Winkel $aEB = BEa'$ nennen wir den Erhebungswinkel, bezeichnen wir denselben mit α. Hat sich das Massenelement unter dem Einflufs der Schwere von a, mit Null-Geschwindigkeit anfangend, bis nach einem beliebigen Punkte e bewegt, und legen wir durch a und e die beiden Ebenen ap und eq normal zu EB, so ist die Geschwindigkeit, mit welcher das Massenelement in e ankommt, dieselbe, welche es erlangt haben würde, indem es von p nach q frei gefallen wäre (§ 52), folglich:

$$c = \sqrt{(2g . pq)}$$
$$= \sqrt{[2gr(\cos\varphi - \cos\alpha)]},$$



wenn wir mit r den Halbmesser des Kreisbogens, mit φ den Winkel eEB, um welchen das Massenelement nun noch von der Gleichgewichtslage entfernt ist, bezeichnen. Ist in diesem Augenblick ds das Wegelement, so ist auch, wenn wir die Geschwindigkeit für die Dauer eines Zeitelements als konstant ansehen:

$$c = \frac{ds}{dt},$$

es ist aber jedenfalls:

$$ds = -d\varphi . r,$$

da das Wegelement ds wächst, wenn das Element des veränderlichen Winkels φ abnimmt, folglich:

$$c = \frac{-r . d\varphi}{dt} = \sqrt{[2g(\cos\varphi - \cos\alpha) . r]}$$

$$dt = -\sqrt{\left(\frac{r}{2g}\right)} . \frac{d\varphi}{\sqrt{(\cos\varphi - \cos\alpha)}}.$$

Die Zeit, welche das Massenelement braucht, um von a nach B zu gelangen, wird sich finden, indem wir diesen Ausdruck integriren, und das Integral zwischen den Grenzen $\varphi = \alpha$ und $\varphi = o$ nehmen. Allein das Integral von $\frac{d\varphi}{\sqrt{(\cos\varphi - \cos\alpha)}}$ läfst sich nicht in geschlossener Form erhalten. Wir können es aber für hinreichend kleine Winkel ermitteln, indem wir, mit Vernachlässigung der vierten Potenzen, von φ und α setzen:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}; \quad \cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

$$\sqrt{(\cos\varphi - \cos\alpha)} = \sqrt{\frac{(\alpha^2 - \varphi^2)}{2}},$$

folglich für kleine Erhebungswinkel:

$$dt = -\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{(\alpha^2 - \varphi^2)}}$$

$$t = -\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(\alpha^2 - \varphi^2)}} + \text{Const.}$$

$$= -\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \left[-\operatorname{arc}\left(\cos = \frac{\varphi}{\alpha}\right)\right] + \text{Const.}$$

$$= \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{\varphi}{\alpha}\right) + \text{Const.},$$

welches Integral von $\varphi = \alpha$ bis $\varphi = o$ zu nehmen ist. Man hat sodann für die Zeit der Bewegung von a bis B:

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \left[\operatorname{arc}(\cos = 0) - \operatorname{arc}(\cos = 1)\right].$$

Der Bogen, dessen $\cos = 0$ ist, ist aber der Quadrant, folglich $\operatorname{arc}(\cos = 0) = \frac{1}{2}\pi$, und der Bogen, dessen $\cos = 1$ ist, ist Null, folglich ist $t = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$.

Indem nun das Massenelement von dem Punkt B aus seine Bewegung nach C hin fortsetzt, verliert es allmählich die Geschwindigkeit, welche im Punkt B das Maximum erreicht hatte. In dem Punkt e', welcher in derselben Horizontalen mit dem Punkt e liegt, wird nach § 56 die Geschwindigkeit wieder gleich derjenigen im Punkte e geworden sein, und man hat:

$$c = \sqrt{[2g(\cos\varphi - \cos\alpha) \cdot r]},$$

es ist aber auch hier $ds = -d\varphi \cdot r$ und $c = -\frac{d\varphi \cdot r}{dt}$, folglich hat man auch für diesen Theil der Schwingung:

$$dt = \frac{-d\varphi \cdot r}{\sqrt{[2g \cdot (\cos\varphi - \cos\alpha) \cdot r]}},$$

und es mufs sich die Zeitdauer, welche das Massenelement braucht, um von B nach dem Punkt der Ruhe a' zu gelangen, genau in derselben Weise, wie vorhin, finden.

Nennen wir T die Zeit einer ganzen Pendelschwingung, so ist:

$$90)\quad T = 2t = \pi\sqrt{\frac{r}{g}} = 0{,}5620\sqrt{r}.$$

Man sieht, dafs in diesem Ausdruck der Erhebungswinkel α nicht vorkommt; es ist also die Zeitdauer einer Pendelschwingung unabhängig vom Erhebungswinkel, so lange derselbe so klein ist, dafs man die oben gemachte Substitution für $\cos\alpha$ gelten lassen kann.

Den Radius des Kreisbogens r nennt man die Länge des Pendels. Für eine Länge r' ist die Dauer der Schwingung:

$$T' = \pi \sqrt{\frac{r'}{g}},$$

folglich:

$$91) \quad T : T' = \sqrt{r} : \sqrt{r'},$$

d. h. für mathematische Kreispendel von verschiedener Länge verhalten sich die Schwingungszeiten wie die Quadratwurzeln aus den Längen der Pendel.

Ist T die Dauer einer Pendelschwingung, so ist $T \cdot n$ die Dauer von n Pendelschwingungen, nennen wir diese $T_{,}$, so hat man:

$$T_{,} = nT = n\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

$$92) \quad n = \frac{T_{,}}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Für ein Pendel von der Länge r' hat man in derselben Zeit die Anzahl der Pendelschwingungen:

$$n' = \frac{T_{,}}{\pi} \sqrt{\frac{g}{r'}},$$

folglich:

$$92a) \quad n : n' = \sqrt{\frac{1}{r}} : \sqrt{\frac{1}{r'}} = \sqrt{r'} : \sqrt{r},$$

d. h. für mathematische Kreispendel von verschiedenen Längen verhalten sich die Anzahl von Schwingungen in einer gegebenen Zeit **umgekehrt** wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen.

Aus der Formel 90 folgt für $T = 1$:

$$r = \frac{g}{\pi^2} = \frac{31{,}25}{9{,}8696} = 3{,}1666 \text{ Fuſs}.$$

Ein Pendel, dessen Schwingungsdauer eine Sekunde beträgt, nennt man ein Sekundenpendel. Hiernach ist die Länge eines mathematischen Sekundenpendels:

3,1667 Fuſs = 38 Zoll preuſsisch,
= 0,9938 Mètres.

Pendelschwingung in einer beliebigen Kurve — Cykloïdenpendel — Tautochrone — Brachystochrone.

§ 58. Es sei allgemein (Fig. auf folg. Seite) ABC eine beliebige Kurve, in welcher ein Massenelement sich unter dem Einfluſs der Schwerkraft bewegt. C sei ein Punkt des stabilen Gleichgewichts, und zugleich der Anfangspunkt des Koordinatensystems, dessen eine Axe cy mit der Richtung der Schwere zusammenfällt, also in dem Punkte C normal zur Kurve ist, während die beiden andern Axen in