Schwingende Bewegung. Gesetz für die Schwingung durch eine stabile Gleichgewichtslage.

§ 56. Denken wir, ein Massenelement bewege sich auf einer Kurve unter dem Einflufs einer konstant wirkenden Anziehungs- oder Abstofsungskraft; es habe seine Bewegung in irgend einem Punkte der Kurve mit Null-Geschwindigkeit begonnen, während es in diesem Punkte den Abstand a' vom Mittelpunkt der Kraft besafs, und habe sich bis zu einem Punkte, welcher einer stabilen Gleichgewichtslage entspricht und den Abstand a von dem Mittelpunkt der Kraft hat, bewegt. Die Leistung der Kraft auf das Massenelement ist in diesem Augenblick geworden nach § 53 (Gleichung 48. S. 27):

$$dK.(a'-a) = \tfrac{1}{2} dm . c^2,$$

in sofern $a'-a$ die Abstandsänderung, welche das Massenelement unter der Einwirkung der Kraft vom Zustand der Ruhe aus und c die Endgeschwindigkeit bedeutet, welche das Massenelement im Punkt a erlangt hat. Mit dieser erlangten Geschwindigkeit passirt das Massenelement die stabile Gleichgewichtslage, und von nun an wird der Geschwindigkeitszuwachs in der Richtung nach dem Mittelpunkt der Kraft konstant negativ, d. h. es nimmt die Geschwindigkeit, mit welcher das Massenelement sich dem Sinne der Kraft entgegen bewegt, fortwährend ab, bis sie endlich Null wird. Dieser Augenblick tritt ein, wenn die Summe der dem Massenelement in den einzelnen Zeitelementen entzogenen Geschwindigkeiten wieder c geworden ist, oder wenn die auf das Massenelement nun verzögernd einwirkende Kraft eine Leistung gleich $-\tfrac{1}{2} dm . c^2$ erzeugt hat. Da aber

$$\tfrac{1}{2} dm . c^2 = (a'-a) . dK$$

ist, so folgt:

$$-\tfrac{1}{2} dm c^2 = -(a'-a) . dK,$$

d. h. die, dem Massenelement bei seiner, dem Sinne der Kraft entgegengesetzten Bewegung entzogene lebendige Kraft ist gleich derjenigen geworden, welche die Kraft dem Massenelement bei seiner Bewegung im Sinne der Kraft ertheilt hat, sobald die Abstandsänderung $(a'-a)$ von dem Mittelpunkt der Kraft gleich aber entgegengesetzt derjenigen Abstandsänderung geworden ist, welche das Massenelement bei seiner Bewegung im Sinne der Kraft erlangt hat. Das Massenelement erlangt also auf der andern Seite der stabilen Gleichgewichtslage denselben Abstand von dem Mittelpunkt der Kraft, welchen es bei dem Beginn der Bewegung nach der Gleichgewichtslage hin besessen hatte. Sobald es diesen Abstand erlangt hat, ist seine Geschwindigkeit wieder Null geworden; die konstant wirkende Kraft bewegt nun, falls dieser Augenblick nicht einer Gleichgewichtslage entspricht, das Massenelement wieder in ihrem Sinne nach der Gleichgewichtslage hin, und dasselbe passirt diese Lage wiederum nach der entgegengesetzten Seite hin, bis es wieder mit Null-Geschwindigkeit in seiner ursprünglichen Lage angekommen ist. Nun wiederholt sich das Spiel von Neuem. Endlich läfst sich noch ganz allgemein zeigen, dafs bei der Bewegung von der Ruhe nach dem Punkt des stabilen Gleichgewichts hin einerseits, und bei der Entfernung von diesem Punkt andrerseits, in gleichen Abständen vom Mittelpunkt der Kraft gleich grofse Geschwindigkeiten Statt finden müssen.

Denn es sei c die Geschwindigkeit, welche das Massenelement erreicht hat, indem sein Abstand vom Mittelpunkt der Kraft gleich x geworden, und zwar während es sich von dem Zustand der Ruhe, oder von dem Abstand a' aus nach dem Mittelpunkt der Kraft hin bewegt, es sei ferner f das Aenderungsmaafs der Kraft, so ist offenbar die gewonnene lebendige Kraft:

$$\tfrac{1}{2} dm \,.\, c^2 = dK \,.\, (a' - x) = dm \,.\, f\,(a' - x),$$

folglich:

$$c = \sqrt{[2f(a' - x)]}.$$

Indem das Massenelement den Punkt des stabilen Gleichgewichts erreicht, ist die Arbeit der konstant wirkenden Kraft gleich $dK(a' - a)$ geworden, und wenn es sich bis zum Abstande x wieder von der Gleichgewichtslage entfernt hat, so ist demselben die Arbeit $dK(a - x)$ ertheilt, folglich besitzt es die Arbeit:

$$dK(a' - a) + dK(a - x) = dK(a' - x);$$

ist nun in diesem Augenblick seine Geschwindigkeit c' geworden, so hat man:

$$\tfrac{1}{2} dm \,.\, c'^2 = dK \,.\, (a' - x) = \tfrac{1}{2} dmf(a' - x)$$
$$c' = \sqrt{[2f \,.\, (a' - x)]},$$

folglich:

$$c' = c.$$

Aus dieser Darstellung folgt folgendes Gesetz:

Bewegt sich ein Massenelement unter dem Einflufs beliebiger Kräfte in einer Kurve, so, dafs für einen bestimmten Punkt die resultirende Kraft eine konstant wirkende ist, und fängt die Bewegung in der Kurve mit Null-Geschwindigkeit an, so wird das Massenelement, falls es bei seiner Bewegung eine stabile Gleichgewichtslage durchläuft, auf der andern Seite dieser Lage eine ebenso grofse Entfernung von dem Mittelpunkt der Kraft erlangen, als es bei dem Beginn der Bewegung hatte, dann für einen Augenblick zur Ruhe kommen, sich hierauf, wieder mit Null-Geschwindigkeit beginnend, rückwärts in seine ursprüngliche Lage zurückbewegen, und diese hin- und hergehende Bewegung ununterbrochen fortsetzen. Bei dieser Bewegung hat das Massenelement zu beiden Seiten der stabilen Gleichgewichtslage in gleichen Abständen vom Mittelpunkt der Kraft gleiche Geschwindigkeiten.

Diese Gesetze lassen sich leicht für den Fall verstehen, wo der Mittelpunkt der Kraft unendlich weit entfernt liegt.

Eine solche hin- und hergehende Bewegung eines Massenelements nennen wir eine schwingende Bewegung. Die Bewegung von dem Zustand der Ruhe aus durch die stabile Gleichgewichtslage bis wiederum zum Zustand der Ruhe hin, nennen wir eine Schwingung. Die Schwingungen wiederholen sich hiernach ununterbrochen, so lange die Resultirende für den Mittelpunkt der Kraft konstant wirkend bleibt. Diese Voraussetzung trifft jedoch bei den in der Praxis vorkommenden Fällen nur sehr selten zu.

Mathematisches Pendel — Pendelschwingung im Kreisbogen.

§ 57. Ein Massenelement, welches unter dem Einflufs der Schwerkraft in irgend einer Kurve schwingt, so dafs es bei dieser Schwingung eine stabile Gleichgewichtslage durchläuft, nennt man ein mathematisches Pendel. Ist diese Kurve ein Kreisbogen, so nennt man das Pendel ein Kreispendel.

Es schwinge ein Massenelement unter dem Einflufs der Schwerkraft in dem Kreisbogen ABC. Ist EB die Richtung der Schwere, so erhalten wir die Lage des stabilen Gleichgewichts, wenn wir die Berührungsebene des Kreisbogens denken, welche normal zu EB ist, und zwischen dem Kreisbogen und dem Mittelpunkt der Kraft liegt. Der Berührungspunkt dieser Ebene B ist der Punkt des stabilen Gleichgewichts (§ 55). Fängt die Bewegung des Massenelements in a an, wo der Abstand von der Ebene gleich ab ist, so mufs, nach § 56, das Massenelement, nachdem es den Punkt B passirt hat, sich so weit erheben, dafs der Abstand $a'b'$ gleich ab wird; d. h. es wird der Winkel aEB gleich BEa' sein müssen.