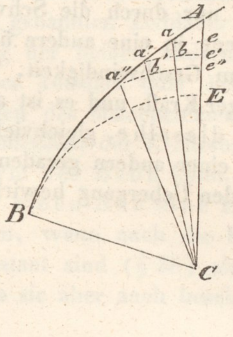
Prinzip der konstanten Leistungen, wenn der konstante Druck stets durch denselben Punkt geht.

§ 53. Der Satz des vorigen Paragraphen läfst sich noch auf eine allgemeinere Form bringen, und gewinnt dann folgende Gestalt:

Bewegt sich ein Massenelement unter dem Einflufs mehrer Kräfte in einer Kurve, und es existirt ein Punkt, für welchen der resultirende Druck (§ 46. S. 54) konstant ist, so ist auch die Leistung, der Gewinn an lebendiger Kraft und die Geschwindigkeits-Aenderung konstant, welche für das Massenelement Statt finden, indem dasselbe seine Entfernung von jenem Punkte um ein bestimmtes Stück ändert, und zwar drückt sich immer die Leistung für eine bestimmte Zeit aus durch das Produkt aus dem konstanten Druck in die Differenz der Entfernung von jenem Punkt, welche das Massenelement am Anfange und am Ende der Zeit besitzt: die Kurve, welche während dieser Zeit durchlaufen wird, mag eine beliebige Form haben.

Denn es bewege sich das Massenelement in der Kurve AB so, dafs der resultirende Druck für den Punkt C konstant $= dK$ ist, nehmen wir auf der Kurve AB unendlich kleine Wegstücken an, Aa, aa', $a'a''$.... und beschreiben aus C mit den Abständen aC, $a'C$.... BC Kugelflächen, welche AC in den Punkten e, e', e''...E schneiden, so ist für ein unendlich kleines Wegstück Aa das Kugelelement ae als eben, Ae aber als normal zu dieser Ebene, und der konstante Druck dK als parallel mit AC wirkend anzusehen, das Leistungselement, welches auf das Massenelement wirkt, indem dasselbe von A nach a sich bewegt, drückt sich also nach dem vorigen Satze aus durch $dK.Ae$, welche Gestalt auch immer das Kurvenelement Aa haben mag. Ebenso läfst sich zeigen, dafs das Leistungselement für die Bewegung von a nach a' gleich $dK.ab = dK.ee'$ etc. ist; es ist folglich die Leistung der stets durch den Punkt C gehenden konstant wirkenden Kraft, indem das Massenelement sich von A



nach B bewegt, gleich: $\Sigma(dK.Ae')$ und da dK für alle Elemente konstant ist, auch gleich:

$$dK.\Sigma(Ae) = dK.AE = dK(AC-CE) = dK.(AC-BC),$$

das ist, was zu beweisen war.

Dieser Fall kommt auf den des vorigen Paragraphen zurück, wenn man annimmt, dafs der Punkt C unendlich weit entfernt liegt, die Richtungen nach C also alle als parallel angesehen werden können.

Geht die Richtung einer Kraft stets durch einen bestimmten Punkt, so pflegt man diesen Punkt den **Mittelpunkt der Kraft** zu nennen.

Bewegung eines Massenelements durch Gleichgewichtslagen. — Stabiles, labiles Gleichgewicht.

§ 54. Bewegt sich ein Massenelement unter dem Einflufs beliebiger Kräfte in einer gewissen Kurve, so setzt dies immer voraus, dafs die Kräfte **nicht** in allen aufeinander folgenden Lagen des Massenelements im **Gleichgewicht** sind, denn wäre dies der Fall, so müfste (§ 38) die Bahn eine gerade Linie sein.

Wenn jedoch bei der Bewegung eines Massenelements in einer Kurve die Kräfte in irgend einem Punkte durch eine Gleichgewichtslage gehen, d. h. wenn für **irgend einen Punkt die resultirende Leistung aus sämmtlichen Kräften Null wird, so ist in diesem Punkte die Geschwindigkeit des Massenelements ein Maximum oder ein Minimum.**

Denn, zerlegen wir die Leistung sämmtlicher Kräfte nach drei zu einander normalen Richtungen, so ist nach Gleichung 54) S. 32 in jedem Augenblick:

$$dm\,.\,c\,dc = dm\,c_{\prime}\,dc_{\prime} + dm\,c_{\prime\prime}\,dc_{\prime\prime} + dm\,c_{\prime\prime\prime}\,dc_{\prime\prime\prime},$$

wenn c die resultirende Geschwindigkeit, $c_{\prime}$, $c_{\prime\prime}$, $c_{\prime\prime\prime}$ die Geschwindigkeiten nach der Richtung der drei Axen bezeichnen. Nun ist offenbar die resultirende Geschwindigkeit (c), mit welcher sich das Massenelement bewegt, in dem Augenblick ein Maximum oder Minimum, wo ihr Differenzial dc gleich Null wird, d. h. wenn die Gleichung erfüllt wird:

$$dc = \frac{dm\,c_{\prime}\,dc_{\prime} + dm\,c_{\prime\prime}\,dc_{\prime\prime} + dm\,c_{\prime\prime\prime}\,dc_{\prime\prime\prime}}{dm\,c} = 0,$$

oder:

$$dm\,c_{\prime}\,dc_{\prime} + dm\,c_{\prime\prime}\,dc_{\prime\prime} + dm\,c_{\prime\prime\prime}\,dc_{\prime\prime\prime} = 0.$$