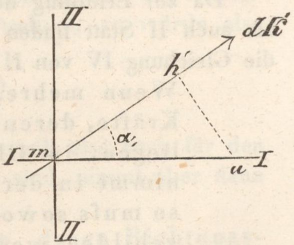
Bemerkung über die Vorzeichen bei Anwendung des Prinzips der virtuellen und reellen Wege.

§ 49. Bei der Anwendung dieser Gesetze (§ 46 bis § 48) ist es von der gröfsten Wichtigkeit, die **Vorzeichen** richtig anzuwenden, welche den Cosinus und den Linien, welche entweder die Projektionen des Abstandes der gewählten Punkte auf die Richtungen der Kräfte, oder die reellen Wege der Kräfte in Bezug auf die gewählten Ebenen bedeuten, angehören. In dieser Beziehung ist zu bemerken, dafs man die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte mit den angenommenen Axen bilden, von jeder Axe anfangend stets in ein und demselben Sinne messen mufs, und dafs wenn man die Richtungen, nach welchen die Kräfte das Massenelement einzeln zu bewegen streben, als positiv ansieht, die Verlängerungen dieser Richtungen rückwärts über das Massenelement hinaus als negativ betrachtet werden müssen, und umgekehrt. Es erleichtert dabei die Betrachtung, wenn man entweder sämmtliche Kräfte als ziehend, oder sämmtliche Kräfte als schiebend sich vorstellt.

Prinzip der statischen Momente für den Zustand des Gleichgewichts.

§ 50. Sind mehre Kräfte, die auf ein Massenelement wirken, und deren Richtungslinien in derselben Ebene liegen, im Gleichgewicht, und zerlegt man den Druck jeder Kraft nach zwei Axen, die zu einander normal sind, und in derselben Ebene liegen, so folgt leicht (§ 34. S. 38), wenn dK', dK'' .... die Drucke und $\alpha_{,}$ $\alpha_{,,}$ ... die Winkel, welche die Richtung derselben mit der einen Axe bilden, folglich $(90^{\circ} - \alpha_{,})$, $(90^{\circ} - \alpha_{,,})$ ... die Winkel mit der andern Axe sind:



$$\text{I.}\quad \Sigma(dK' \,.\, \cos\alpha_{,}) = 0$$

$$\text{II.}\quad \Sigma(dK' \,.\, \sin\alpha_{,}) = 0.$$

Nach dem Frühern folgt aus der Gleichung I. auch (S. 57):

$$\text{III.}\quad \Sigma(dK'\, mh') = 0.$$

Nun ist aber $\sin\alpha_{,} = \frac{uh'}{mu}$, folglich hat man auch nach II.

$\Sigma\left(dK' \,.\, \frac{uh'}{mu}\right) = 0$, und da mu bei sämmtlichen Drucken dasselbe ist, so folgt:

$$\text{IV.}\quad \Sigma(dK' \,.\, uh') = 0.$$

Die Linie uh' oder die Normale von irgend einem Punkt auf die Richtungslinie einer Kraft nennt man den Hebelsarm dieser Kraft in Bezug auf den Punkt, das Produkt von der Form $dK'.uh'$ oder das Produkt aus dem Druck einer Kraft in ihren Hebelsarm nennt man das statische Moment der Kraft in Bezug auf jenen Punkt.

Bezeichnet man den Hebelsarm der Kräfte mit r' r''...., so hat man die Gleichung IV in der Form:

$$89)\ \Sigma(dK'.r') = 0.$$

Da nun die Lage der Axe mu in der Ebene gleichgiltig ist, so folgt, dafs Alles, was für den Punkt u bewiesen ist, auch für jeden andern Punkt der Ebene gilt, und daher läfst sich die so eben entwickelte Gleichung IV in Verbindung mit III als Gesetz so ausdrücken:

> Sind mehre Kräfte, die auf ein Massenelement wirken, und deren Richtungslinien in derselben Ebene liegen, im Gleichgewicht, und man denkt in der Ebene einen beliebigen Punkt, so ist sowohl die Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man jeden Druck mit der Projektion des Abstandes jenes Punktes von dem Massenelement auf die Richtungslinie des Drukkes multiplizirt, als auch die Summe der statischen Momente in Bezug auf jenen Punkt, gleich Null.

Da zur Erfüllung des Gleichgewichts sowohl die Gleichung I als auch II Statt finden mufs, da ferner die Gleichung III von I, die Gleichung IV von II abgeleitet wurde, so folgt umgekehrt:

> Wenn mehre, auf ein Massenelement wirkende Kräfte, deren Richtungslinien in derselben Ebene liegen, im Gleichgewicht sein sollen, und man nimmt in der Ebene einen beliebigen Punkt an, so mufs sowohl die Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man jeden einzelnen Druck mit der Projektion des Abstandes jenes Punktes von dem Massenelement auf die Richtungslinie des Drucks multiplizirt, als auch die Summe der statischen Momente der Drucke in Bezug auf diesen Punkt gleich Null sein.

Hat man es mit Kräften zu thun, deren Richtungslinien in verschiedenen Ebenen liegen, und man will die Bedingungen des Gleichgewichts untersuchen, so kann man aufser den in § 48. S. 57 angeführten Gesetzen auch noch folgendes Verfahren befolgen: Man zerlegt jede einzelne Kraft in zwei andere, von denen eine in eine bestimmt angenommene, durch das Massenelement gehende Ebene fällt, die andere in einer Richtung normal zu dieser Ebene liegt. Nun wendet man für das Gleichgewicht in der Ebene die eben aufgestellten Gesetze an, und untersucht, ob aufserdem noch entweder die Summe der Drucke in der zur Ebene normalen Richtung gleich Null ist, oder aber ob in Beziehung auf diese Richtung die Gesetze S. 48. No. 1 oder 2 erfüllt werden, indem man entweder einen Punkt in der normalen Richtung annimmt und seinen Abstand auf die Richtung jeder Kraft projicirt, oder indem man zu der angenommenen Ebene eine Parallelebene denkt, und die reellen Wege der einzelnen Drucke in Bezug auf diese Ebene untersucht etc.

Anwendung des Prinzips der statischen Momente auf Kräfte, die nicht im Gleichgewicht sind.

§ 51. Wirken mehre Kräfte, deren Richtungslinien in derselben Ebene liegen, auf ein Massenelement, und die Kräfte sind nicht im Gleichgewicht, so wird nach § 35. No. 1 Gleichgewicht hergestellt sein, wenn wir eine neue Kraft auf das Massenelement einwirken lassen, welche der Resultirenden gleich und entgegengesetzt ist. Sobald diese Kraft einwirkt, gelten die Gesetze des vorigen Paragraphen. Ist der resultirende Druck dK und der Hebelsarm in Bezug auf einen angenommenen Punkt r, so würde also folgen:

$$\Sigma(dK'r') - dK.r = 0.$$

$$90)\quad dK.r = \Sigma(dK'r').$$

Das Prinzip der statischen Momente gilt also auch für den Fall, dafs die Kräfte nicht im Gleichgewicht sind, nimmt aber dann die Form an:

> Wirken beliebig viele Kräfte, deren Richtungslinien in ein und derselben Ebene liegen, auf ein Massenelement, so ist in jedem Augenblick das statische Moment der Mittelkraft in Bezug auf einen Punkt in der Ebene der Kräfte gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte in Bezug auf denselben Punkt.

Liegt der angenommene Punkt in der Richtung der Resultiren-