$b' b'' \dots$ und $e' e''$ die Projektionen der Abstände zweier Punkte, die in der Berührungsebene der Kurve in je einer von zwei sich im Berührungspunkt rechtwinklig schneidenden Axen liegen, auf die Richtung der verschiedenen Kräfte,

$n' n'' \dots$ die reellen Wege der verschiedenen Kräfte in Bezug auf eine Ebene, die im Abstande $a_{,}$ zur Richtung des Krümmungshalbmessers normal, also mit der Berührungsebene parallel ist,

$p' p'' \dots$ und $q' q'' \dots$ die reellen Wege der verschiedenen Kräfte in Bezug auf je zwei zu einander normale und mit dem Krümmungshalbmesser parallele Ebenen

bezeichnen.

Anwendung des Prinzips der virtuellen und reellen Wege auf den Zustand des Gleichgewichts.

§ 48. Sind beliebig viele Kräfte, welche auf ein Massenelement wirken, im Gleichgewicht, und wir denken ein beliebiges Axensystem, dessen Durchschnittspunkt mit dem Massenelement zusammenfällt, so sind die resultirenden Drucke für jede der drei Axen einzeln gleich Null (§ 34. S. 38), es ist also:

$$dK_{,} = 0; \quad dK_{,,} = 0; \quad dK_{,,,} = 0;$$

und es folgt daher für den Zustand des Gleichgewichts nach Gleichung 82 und 83):

$$87) \begin{cases} \Sigma(dK' a') = 0 \\ \Sigma(dK' b') = 0 \\ \Sigma(dK' e') = 0. \end{cases}$$

$$88) \begin{cases} \Sigma\left(\frac{dK'}{n'}\right) = 0 \\ \Sigma\left(\frac{dK'}{p'}\right) = 0 \\ \Sigma\left(\frac{dK'}{q'}\right) = 0. \end{cases}$$

Hierin liegen folgende Sätze:

1) Sind beliebig viele Kräfte, welche auf ein Massenelement wirken, im Gleichgewicht, und man nimmt einen beliebigen Punkt im Raume an, projicirt den Abstand desselben von dem Massenelement auf die Richtung jeder einzelnen Kraft, so ist die Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man den Druck

jeder Kraft mit der Projektion jenes Abstandes auf ihre Richtung multiplizirt, gleich Null.

2) Sind beliebig viele Kräfte, welche auf ein Massenelement wirken, im Gleichgewicht, und man denkt eine beliebige Ebene im Raum, so ist die Summe der Quotienten, welche gebildet werden, indem man den Druck jeder Kraft durch ihren reellen Weg in Bezug auf diese Ebene dividirt, gleich Null.

Diese Sätze gelten auch umgekehrt.

Wenn nämlich mehre Kräfte auf ein Massenelement wirken und es ist:

entweder für jeden beliebigen Punkt im Raume die Summe der Produkte aus dem Druck jeder Kraft in die Projektion des Abstandes jenes Punktes von dem Massenelement auf die Richtung der Kraft gleich Null, oder:

für jede beliebige Ebene die Summe der Quotienten, welche gebildet werden, indem man den Druck jeder Kraft durch ihren reellen Weg in Bezug auf jene Ebene dividirt, gleich Null,

so sind die Kräfte im Gleichgewicht.

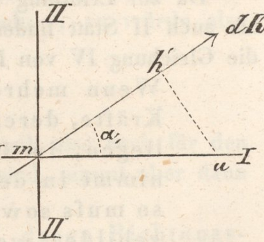
Um nun nachzuweisen, dafs jene Bedingungen für **jeden beliebigen Punkt**, oder **für jede beliebige Ebene** statt finden, braucht man nur zu zeigen, dafs sie für drei Punkte erfüllt werden, deren jeder in einer andern von drei durch das Massenelement gehenden zu einander rechtwinkligen Axen liegt, oder dafs sie für drei Ebenen gelten, die auf solchen Axen folglich nach unter einander normal sind. Dies läfst sich sehr leicht geometrisch beweisen, indem man das Axensystem um seinen Durchschnittspunkt dreht, und nun zeigt, dafs wenn diese obigen Bedingungen für das Axensystem in der ursprünglichen Lage gelten, dieselben auch für jede andere Lage gelten müssen, in welche man dasselbe durch Drehung bringen kann. Endlich läfst sich eben so leicht nachweisen, dafs der Durchschnittspunkt des anzunehmenden Axensystems auch aufserhalb des Massenelements liegen könne. Man hat also die obigen Bedingungs-Gleichungen überhaupt nur für drei Punkte, deren Ebene nicht durch das Massenelement geht, beziehlich für drei sich rechtwinklich schneidende Ebenen, nachzuweisen.

Bemerkung über die Vorzeichen bei Anwendung des Prinzips der virtuellen und reellen Wege.

§ 49. Bei der Anwendung dieser Gesetze (§ 46 bis § 48) ist es von der gröſsten Wichtigkeit, die **Vorzeichen** richtig anzuwenden, welche den Cosinus und den Linien, welche entweder die Projektionen des Abstandes der gewählten Punkte auf die Richtungen der Kräfte, oder die reellen Wege der Kräfte in Bezug auf die gewählten Ebenen bedeuten, angehören. In dieser Beziehung ist zu bemerken, daſs man die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte mit den angenommenen Axen bilden, von jeder Axe anfangend stets in ein und demselben Sinne messen muſs, und daſs wenn man die Richtungen, nach welchen die Kräfte das Massenelement einzeln zu bewegen streben, als positiv ansieht, die Verlängerungen dieser Richtungen rückwärts über das Massenelement hinaus als negativ betrachtet werden müssen, und umgekehrt. Es erleichtert dabei die Betrachtung, wenn man entweder sämmtliche Kräfte als ziehend, oder sämmtliche Kräfte als schiebend sich vorstellt.

Prinzip der statischen Momente für den Zustand des Gleichgewichts.

§ 50. Sind mehre Kräfte, die auf ein Massenelement wirken, und deren Richtungslinien in derselben Ebene liegen, im Gleichgewicht, und zerlegt man den Druck jeder Kraft nach zwei Axen, die zu einander normal sind, und in derselben Ebene liegen, so folgt leicht (§ 34. S. 38), wenn dK', dK'' .... die Drucke und $\alpha_{,}$ $\alpha_{,,}$ ... die Winkel, welche die Richtung derselben mit der einen Axe bilden, folglich $(90^\circ - \alpha_{,})$, $(90^\circ - \alpha_{,,})$ ... die Winkel mit der andern Axe sind:



$$\text{I.} \quad \Sigma(dK' \,.\, \cos\alpha_{,}) = 0$$

$$\text{II.} \quad \Sigma(dK' \,.\, \sin\alpha_{,}) = 0.$$

Nach dem Frühern folgt aus der Gleichung I. auch (S. 57):

$$\text{III.} \quad \Sigma(dK'\, mh') = 0.$$

Nun ist aber $\sin\alpha_{,} = \frac{uh'}{mu}$, folglich hat man auch nach II.

$\Sigma\left(dK' \,.\, \frac{uh'}{mu}\right) = 0$, und da mu bei sämmtlichen Drucken dasselbe ist, so folgt:

$$\text{IV.} \quad \Sigma(dK' \,.\, uh') = 0.$$