$$81\text{ a)}\begin{cases} Kr = 718\,\dfrac{N}{n} \\ \sqrt{Kr} = 27\sqrt{\dfrac{N}{n}} \\ \sqrt[3]{Kr} = 9\sqrt[3]{\dfrac{N}{n}}. \end{cases}$$

Prinzip der virtuellen und reellen Wege.

§ 46. Denken wir uns ein Massenelement, auf welches eine beliebige Anzahl von Kräften einwirkt, deren Drucke in irgend einem Augenblick die Werthe dK', dK''.... haben. Denken wir ferner ein ganz beliebiges Axensystem so, dafs der Durchschnittspunkt der Axen in das Massenelement fällt, und lassen die früher eingeführten Bezeichnungen gelten, so ist nach Gleichung 65. S. 37 der resultirende Druck in der Richtung der ersten Axe:

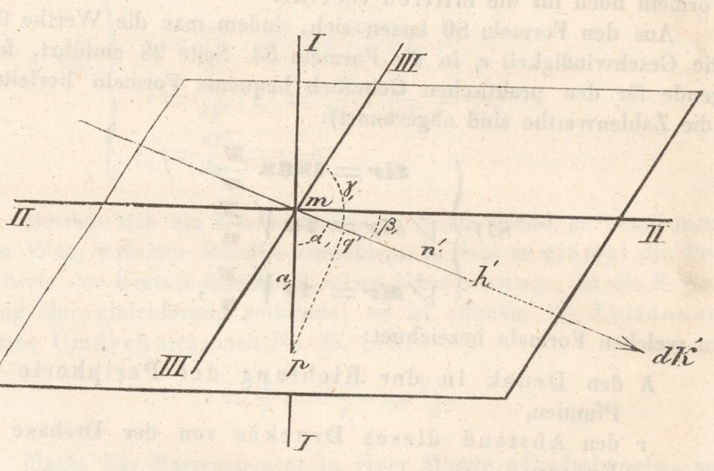
$$dK_{,} = \Sigma(dK'.\cos\alpha_{,}),$$

in der Richtung der zweiten Axe:

$$dK_{,,} = \Sigma(dK'\cos\beta_{,}),$$

in der Richtung der dritten Axe:

$$dK_{,,,} = \Sigma(dK'.\cos\gamma_{,}).$$



Nehmen wir in einer der drei Axen einen beliebigen Punkt p, dessen Abstand von dem Massenelement $pm = a_{,}$ sei, projiciren wir diesen Abstand auf die Richtung jeder Kraft, indem wir die Normalen pq', pq''*).... ziehen, und nehmen wir die Projektionen von $a_,$ auf die Richtung der einzelnen Kräfte a', a'', a''' etc., so ist offenbar:

$$\cos\alpha_, = \frac{mq'}{mp} = \frac{a'}{a_,},$$

und man hat daher:

$$dK_, = \Sigma\left(dK' \cdot \frac{a'}{a_,}\right),$$

folglich, da der Nenner $a_,$ allen Summanden rechts gemeinschaftlich ist:

$$82)\quad dK_, \cdot a_, = \Sigma\,(dK' \cdot a').$$

In Bezug auf die beiden andern Axen würde sich für einen beliebigen Punkt derselben, dessen Abstand vom Massenelement $b_,$ beziehlich $e_,$ sei, nachweisen lassen:

$$82\text{a})\quad \begin{cases} dK_{,,} \cdot b_, = \Sigma(dK'b') \\ dK_{,,,} \cdot e_, = \Sigma(dK'e'). \end{cases}$$

Denken wir eine Ebene durch den Punkt p normal zur Axe mp, und daher parallel mit der Ebene, in welcher die beiden andern Axen liegen; es mögen die Richtungen der verschiedenen Kräfte diese Ebene in den Punkten h', h'' ... etc. schneiden, und es sei $mh' = n'$, $mh'' = n''$ etc., so ist:

$$\cos\alpha_, = \frac{mp}{mh'} = \frac{a_,}{n'},$$

folglich:

$$dK_, = \Sigma\,(dK' . \cos\alpha_,) = \Sigma\left(\frac{dK}{n'} \cdot a_,\right),$$

und da wieder $a_,$ allen Summanden gemeinschaftlich ist, so folgt:

$$83)\quad \left\{ \frac{dK_,}{a_,} = \Sigma\left(\frac{dK'}{n'}\right). \right.$$

Ein ähnliches Gesetz läfst sich für die beiden andern Axen nachweisen, und wenn p', p''.... und q', q''.... die Entfernungen von dem Massenelement bezeichnen, in welchen die Richtungen der Drucke dK', dK''.... zwei andere Ebenen schneiden, von denen je eine normal ist auf je einer der beiden andern Axen, so hat man auch:

$$83\text{a})\quad \begin{cases} \dfrac{dK_{,,}}{b_,} = \Sigma\left(\dfrac{dK'}{p'}\right) \\ \dfrac{dK_{,,,}}{e_,} = \Sigma\left(\dfrac{dK'}{q'}\right). \end{cases}$$

Nun ist p (in der Figur) ein beliebiger Punkt einer der drei

*) In der Figur ist nur eine Kraft dK' ihrer Richtung nach gezeichnet, um nicht durch viele Linien das Bild undeutlich zu machen; es gelten natürlich für alle andern Kraftrichtungen dieselben Beziehungen, welche für diese eine gelten.

Axen; es ist aber auch das angenommene Axensystem ein beliebiges, und folglich, da man durch jeden Punkt im Raume und durch das Massenelement immer eine gerade Linie legen, diese aber als Axe eines Axensystems ansehen kann, so gilt die oben bewiesene Gleichung 82) für jeden beliebigen Punkt, der aufserhalb des Massenelements liegt, und da ferner jede Ebene normal sein kann, zu einer entsprechenden, durch das Massenelement gedachten Axe, so gilt die Gleichung 83) für jede beliebige Ebene.

Die Entfernung des Massenelementes von dem Durchschnittspunkte einer Kraftrichtung mit einer angenommenen Ebene wollen wir den **reellen Weg** der Kraft für diese Ebene nennen.

Denken wir uns einen Punkt in einem beliebigen Abstande von dem Massenelement, und projiciren wir diesen Abstand auf die Richtung einer auf das Massenelement wirkenden Kraft, so nennen wir die Projektion den **virtuellen** Weg der Kraft in Bezug auf den Punkt (analog der Bezeichnung in § 27, doch nicht damit zu verwechseln).

Zerlegen wir sämmtliche Drucke nach drei auf einander normale Axen, deren Durchschnittspunkt im Massenelement liegt, und von denen eine durch einen angenommenen Punkt geht, so nennen wir die Summe der Drucke für diese letztgenannte Axe (S. 37) auch wohl den resultirenden Druck für den gedachten Punkt. Legen wir durch den angenommenen Punkt eine Ebene, welche normal ist zum Abstande des Punkts von dem Massenelement, so wollen wir den resultirenden Druck für den gedachten Punkt auch als „Normaldruck für diese Ebene“ bezeichnen.

Nach diesen Erklärungen können wir die Gesetze, welche die Gleichungen 82 und 83 enthalten, folgendermaafsen ausdrücken:

> Wirken beliebig viele Kräfte auf ein Massenelement, so ist für jeden beliebigen Punkt aufserhalb des Massenelements in irgend einem Augenblick das Produkt aus dem resultirenden Druck für diesen Punkt in den Abstand des Punkts von dem Massenelement gleich der Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man den Druck jeder einzelnen Kraft mit ihrem virtuellen Wege in Bezug auf den angenommenen Punkt multiplizirt, und es ist ferner für jede beliebige Ebene der Quotient aus dem Normaldruck für

diese Ebene durch den normalen Abstand derselben von dem Massenelement gleich der Summe der Quotienten, welche gebildet werden, indem man jeden einzelnen Druck durch seinen reellen Weg in Bezug auf die Ebene dividirt.

Dieses Gesetz wollen wir das Prinzip der virtuellen und reellen Wege nennen. Wir haben dasselbe hier für den allgemeinsten Fall entwickelt, und es bleibt nur übrig, daraus Folgerungen für spezielle Anwendungen zu ziehen.

Anwendung des Prinzips der virtuellen und reellen Wege auf die resultirende Kraft, und auf die Normalkraft bei der Bewegung in einer beliebigen Kurve.

§ 47. Nach § 35. No. 3 (S. 39) kann man für die Wirkung der einzelnen Kräfte diejenige ihrer Resultirenden substituiren. Für den im vorigen Paragraphen betrachteten Fall würde man offenbar haben, wenn man den virtuellen Weg der Resultirenden in Bezug auf den gewählten Punkt mit a, den reellen Weg mit n bezeichnet:

$$84)\quad \left\{ \begin{aligned} & dK_{,}\, a_{,} = dK\,.\,a = \Sigma(dK'\,a') \\ & \frac{dK_{,}}{a_{,}} = \frac{dK}{n} = \Sigma\left(\frac{dK'}{n'}\right). \end{aligned} \right.$$

Die Gesetze dieser beiden Gleichungen lassen sich ähnlich wie die der Gleichungen 82) und 83) in Worten ausdrücken, nämlich so:

Wirken beliebig viele Kräfte auf ein Massenelement, und man denkt irgend einen Punkt aufserhalb des Massenelements, projicirt den Abstand dieses Punkts auf die Richtung jeder einzelnen Kraft und auch auf die Richtung der Resultirenden sämmtlicher Kräfte, so ist das Produkt aus dem resultirenden Druck in die Projektion jenes Abstands auf die Richtung der Resultirenden gleich der Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man jeden einzelnen Druck mit der Projektion jenes Abstandes auf seine Richtung multiplizirt. Aufserdem ist der Quotient aus dem resultirenden Druck durch seinen reellen Weg in Bezug auf eine beliebige Ebene gleich der Summe der Quotienten, welche gebildet werden, indem man jeden einzelnen Druck durch seinen reellen Weg in Bezug auf dieselbe Ebene dividirt.