allgemeiner auch wohl auf die Bewegungen in einer geschlossenen Kurve überhaupt auszudehnen.

Bewegt sich ein Massenelement in einem Kreise, so dafs die Tangential-Geschwindigkeit in jedem Punkte der Bahn dieselbe ist, so nennt man die Bewegung eine gleichförmig rotirende, im entgegengesetzten Falle eine ungleichförmig rotirende.

Die gleichförmig rotirende Bewegung ist also als das Resultat einer konstant wirkenden Normalkraft, und einer im Gleichgewicht befindlichen Tangentialkraft anzusehen.

Ist dagegen bei der Bewegung eines Massenelements in einem Kreise die Normalkraft veränderlich wirkend, d. h. ist das Aenderungsmaafs $f_{\prime\prime}$ derselben für verschiedene Bahnelemente verschieden grofs (was jedoch nicht ausschliefst, dafs es, wie oben nachgewiesen worden, während der Zeitdauer, welche das Durchlaufen jedes einzelnen Bahnelementes erfordert, als konstant betrachtet werden könne), so ist auch die Geschwindigkeit in der Richtung der Bahn veränderlich.

### Winkelgeschwindigkeit, Peripherie-Geschwindigkeit.

§ 45. Bewegt sich ein Massenelement in einem Kreise, so können wir uns den Radius dieses Kreises als mathematische Linie ohne Masse, und mit dem Massenelement gemeinschaftlich rotirend denken, ohne dafs dadurch in den Bewegungsverhältnissen des Massenelements irgend etwas geändert wird.

Ist in irgend einem Punkte der Bahn $c_{\prime} = \frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit des Massenelements, und $v = \frac{ds'}{dt}$ die Geschwindigkeit irgend eines andern Punktes dieses Radius, welcher den Abstand $\varrho$ vom Mittelpunkt hat, so sind offenbar die in gleichen Zeitelementen von dem Massenelement und von jenem Punkt zurückgelegte Wege gleich den Längen der gleichzeitig durchlaufenen Bogenelemente, und da diese, wie leicht ersichtlich, sich wie die Radien verhalten, so hat man:

$$ds : ds' = r : \varrho$$

und folglich auch $c_{\prime} : v = r : \varrho$,

oder:

$$c_{\prime} = v \frac{r}{\varrho}.$$

Man kann also die **Geschwindigkeit** des **Massenelements** finden, wenn man den Radius $r$ desselben und aufserdem die Geschwindigkeit $v$ irgend eines Punktes in diesem Radius und den Abstand $\varrho$ dieses Punkts vom Mittelpunkt des Kreises kennt. Nimmt man diesen Punkt so an, dafs sein Abstand $\varrho$ gleich der Längeneinheit ist, so nennt man die Geschwindigkeit desselben in Bezug auf das Massenelement die **Winkel-Geschwindigkeit**, und bezeichnet man dieselbe mit $w$, so hat man:

$$c_{\prime} = w\,r\,; \quad w = \frac{c_{\prime}}{r}\,.$$

Es ist also unter der **Winkel-Geschwindigkeit** eines rotirenden Massenelements diejenige **Geschwindigkeit** zu verstehen, welche ein Punkt, der in dem Abstand 1 von dem Mittelpunkt des Kreises mit dem Massenelement gemeinschaftlich rotirt, besitzt. Im Gegensatz hierzu pflegt man die Geschwindigkeit $c_{\prime}$, welche das Massenelement in der Richtung seiner Bahn hat, die **Peripherie-Geschwindigkeit** des Massenelements zu nennen.

Führen wir in die Gleichung 78) die Winkel-Geschwindigkeit $w$ ein, so ergiebt sich für die **Centrifugalkraft**:

$$79)\quad \left\{ \begin{aligned} dF &= dm\,.\,f_{\prime\prime} = dm\,\frac{c_{\prime}^{\,2}}{r} = dm\,.\,w^2\,.\,r \\ &= \frac{dG}{g}\,.\,\frac{c_{\prime}^{\,2}}{r} = \frac{dG}{g}\,w^2\,.\,r \\ r &= \frac{dm}{dF}\,.\,c_{\prime}^{\,2} = \frac{dF}{dm}\,.\,\frac{1}{w^2} = \frac{f_{\prime\prime}}{w^2} \\ f_{\prime\prime} &= \frac{dF}{dm} = w\,.\,c_{\prime} \end{aligned} \right.$$

Bewegt sich ein Massenelement in einem Kreise, so nennt man den Weg, welchen dasselbe zurücklegt, in dem es **einmal** die Peripherie des Kreises durchläuft, **eine Umdrehung**. Ist die Bewegung eine gleichförmig rotirende, so ist offenbar die **Zeitdauer einer Umdrehung** nach No. 25. S. 17:

$$t = \frac{s}{c} = \frac{2\pi r}{c_{\prime}} = \frac{2\pi}{w}\,.$$

Macht das Massenelement in einer Minute $n$ Umdrehungen, so ist andrerseits auch:

$$t = \frac{60}{n}\,,$$

aus diesen beiden Ausdrücken ergeben sich folgende Formeln:

$$
80) \left\{ \begin{array}{l}
t = \frac{60}{n} = \frac{2\pi r}{c_{,}} = \frac{2\pi}{w} \\
n = \frac{60}{t} = \frac{60 c_{,}}{2\pi r} = \frac{60 w}{2\pi} = 9{,}5493 \frac{c_{,}}{r} = 9{,}5493\, w \\
c_{,} = \frac{2\pi r}{t} = \frac{2\pi r \,.\, n}{60} = wr = 0{,}1047\, rn \\
r = \frac{c_{,} t}{2\pi} = \frac{60}{2\pi} \,.\, \frac{c_{,}}{n} = \frac{c_{,}}{w} = 9{,}5493 \frac{c_{,}}{n} \\
w = \frac{2\pi}{t} = \frac{2\pi}{60} \,.\, n = \frac{c_{,}}{r} = 0{,}1047\, n.
\end{array} \right.
$$

In diesen Formeln bedeutet:

$t$ die Zeitdauer einer Umdrehung in Sekunden,
$n$ die Anzahl der Umdrehungen in einer Minute,
$c_{,}$ die Peripherie-Geschwindigkeit,
$r$ den Halbmesser des Kreises, in welchen sich das Massenelement bewegt,
$w$ die Winkel-Geschwindigkeit,
$c_{,}$, $r$, $w$ sind in einerlei Maafseinheit zu nehmen; die Zeiteinheit ist die Sekunde.

Ist die Bewegung nicht gleichförmig rotirend, so gelten obige Formeln noch für die mittlen Werthe.

Aus den Formeln 80 lassen sich, indem man die Werthe für die Geschwindigkeit $c_{,}$ in die Formeln 53. Seite 28 einführt, folgende für den praktischen Gebrauch bequeme Formeln herleiten (die Zahlenwerthe sind abgerundet):

$$
81) \left\{ \begin{array}{l}
\mathbf{Kr} = \mathbf{4868}\, \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{n}} \\
\sqrt{\mathbf{Kr}} = \mathbf{70} \sqrt{\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{n}}} \\
\sqrt[3]{\mathbf{Kr}} = \mathbf{17} \sqrt[3]{\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{n}}},
\end{array} \right.
$$

in welchen Formeln bezeichnet:

$K$ den Druck in der Richtung der Peripherie in Pfunden,
$r$ den Abstand dieses Druckes von der Drehaxe in Fufsen,
$N$ die Anzahl der wirksamen Pferdekräfte,
$n$ die Anzahl der Umdrehungen in einer Minute.

*Nimmt man K in Kilogrammes, r in Mètres, so hat man:*

$$81\text{a})\quad \begin{cases} Kr = 718\,\frac{N}{n} \\ \sqrt{Kr} = 27\sqrt{\frac{N}{n}} \\ \sqrt[3]{Kr} = 9\sqrt[3]{\frac{N}{n}}. \end{cases}$$

### Prinzip der virtuellen und reellen Wege.

§ 46. Denken wir uns ein Massenelement, auf welches eine beliebige Anzahl von Kräften einwirkt, deren Drucke in irgend einem Augenblick die Werthe $dK'$, $dK''$.... haben. Denken wir ferner ein ganz beliebiges Axensystem so, dafs der Durchschnittspunkt der Axen in das Massenelement fällt, und lassen die früher eingeführten Bezeichnungen gelten, so ist nach Gleichung 65. S. 37 der resultirende Druck in der Richtung der ersten Axe:

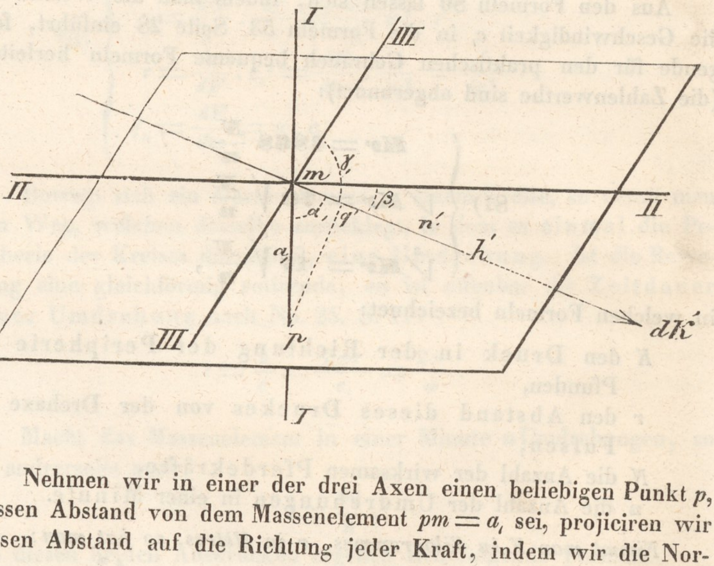
$$dK_{,} = \Sigma(dK' . \cos\alpha_{,}),$$

in der Richtung der zweiten Axe:

$$dK_{,,} = \Sigma(dK' \cos\beta_{,}),$$

in der Richtung der dritten Axe:

$$dK_{,,,} = \Sigma(dK' . \cos\gamma_{,}).$$




Nehmen wir in einer der drei Axen einen beliebigen Punkt $p$, dessen Abstand von dem Massenelement $pm = a_{,}$ sei, projiciren wir diesen Abstand auf die Richtung jeder Kraft, indem wir die Nor-