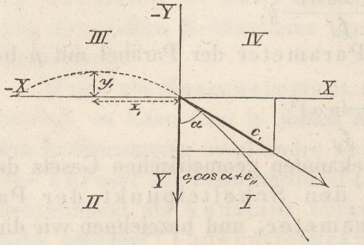

Da nun die zweite Ableitung immer positiv ist, so lange $f_{\prime\prime}$ als positiv gedacht wird, weil nämlich das Quadrat im Nenner immer positiv sein mufs, so entspricht der eben bestimmte Werth von x einem Minimum, also einem negativen Werth von y; es wird also der Wendepunkt im III. oder IV. Quadranten liegen. Er liegt im III. Quadranten, wenn das zugehörige x negativ ist, und dies tritt ein, nach 73), wenn α ein spitzer Winkel ist. Dagegen wird x positiv, wenn α ein stumpfer Wtnkel, also $\cos\alpha$ negativ ist, und dann liegt der Wendepunkt im IV. Quadranten.

Setzen wir den Werth von x aus 73 in 72, so erhalten wir für den Wendepunkt:

$$74)\quad y_{\prime} = -\tfrac{1}{2}\frac{c_{\prime}^2}{f_{\prime\prime}}\cos.\alpha^2 + a_{\prime\prime}.$$

Verlegen wir nun den Anfangspunkt der Koordinaten in den Wendepunkt der Kurve, so ist zunächst $a_{\prime\prime}. = 0$ und nennen wir die neuen Koordinaten y' und x', so ist offenbar $x = x' - \frac{c_{\prime}^2}{f_{\prime\prime}}\sin\alpha\,.\cos\alpha$ (nach No. 73) und wenn wir diesen Werth in die Gleichung 72) einsetzen, so geht dieselbe nach einer leichten Rechnung über in:

$$75)\quad y' = \tfrac{1}{2}\frac{f_{\prime\prime}}{(c_{\prime}\sin\alpha)^2}.x'^2,$$

welches wieder die Gleichung der Parabel ist; dieselbe geht in die Gleichung No. 71 über, wenn α gleich einem Rechten ist.

Zu bemerken ist hier noch, dafs die konkave Seite der Parabel immer der Axe der Y, oder derjenigen Axe zugekehrt ist, welche der Richtung der konstant wirkenden Kräftesumme entspricht.

Da endlich die gleichförmige Geschwindigkeit nach S. 17 als das Resultat einer momentan wirkenden Kraft aufgefafst werden kann, so läfst sich die Parabelbewegung immer betrachten als das Resultat einer momentan wirkenden Kräftesumme und einer konstant wirkenden Kräftesumme, deren Richtungen einen Winkel mit einander bilden.

Krümmungskreis der Bahn, — Normalkraft, Tangentialkraft.

§ 42. Die Gleichung 75) läfst sich auch folgendermaafsen schreiben:

$$x^2 = \frac{2(c_{\prime} \sin \alpha)^2}{f_{\prime\prime}} y,$$

und folglich ist, wenn wir den Parameter der Parabel mit p bezeichnen:

$$p = \frac{2(c_{\prime} \sin \alpha)^2}{f_{\prime\prime}}.$$

Nun ist aber nach einem bekannten geometrischen Gesetz der Krümmungshalbmesser für den Scheitelpunkt der Parabel gleich dem halben Parameter, und bezeichnen wir diesen Krümmungshalbmesser mit r, so folgt:

$$76)\ r = \tfrac{1}{2} p = \frac{(c_{\prime} \sin \alpha)^2}{f_{\prime\prime}}.$$

Dieser Krümmungshalbmesser liegt aber in der Axe der Y, d. h. in der Richtung der konstant wirkenden Kräftesumme.

Nun ist klar, dafs wir jeden beliebigen Kreis als Krümmungskreis des Scheitels einer Parabel ansehen können, und dafs für jedes Bogenelement eines Kreises, welches von einem Massenelement durchlaufen wird, immer die obige Gleichung gelten mufs, sobald wir unter $f_{\prime\prime}$ das Aenderungsmaafs einer in der Richtung des Radius wirkenden konstanten Kraft, unter $c_{\prime}$ eine gleichförmige Geschwindigkeit, welche mit der Richtung der konstanten Kraft, oder mit der Richtung des Radius den Winkel α bildet, verstehen.

Ebenso leicht ist es einzusehen, dafs wenn ein Massenelement sich in einer beliebigen Kurve bewegt, und wir denken für irgend ein Element der Kurve den Krümmungskreis: die obige Gleichung auch für dieses Kurvenelement gelten mufs. Hieraus folgt aber folgendes wichtige Gesetz:

> Bewegt sich ein Massenelement in einer beliebigen Kurve, so läfst sich für jedes Element der Bahn die Bewegung als das Resultat zweier Kräftesummen ansehen, von denen die eine nach der Richtung des Krümmungshalbmessers für dieses Bahnelement als konstant wirkend, die andre aber als im Gleichgewicht, folglich eine gleichförmige Geschwindigkeit bedingend, und mit der ersten einen beliebigen Winkel bildend, gedacht werden mufs.

Nimmt man den Winkel, welchen die beiden Kräftesummen mit einander bilden, gleich einem Rechten, und beachtet man, dafs die Richtung des Krümmungsradius eines Bahnelementes immer mit der Normalen für dieses Element zusammenfällt, so ist die Richtung der andern Kräftesumme tangential, und es folgt aus dieser Betrachtung:

Wenn ein Massenelement sich in einer beliebigen Kurve bewegt, so kann man in jedem Element der Bahn für die wirkenden Kräftesummen zwei andre substituiren (§38), von denen die eine normal zur Bahn gerichtet (Normalkraft) immer für dieses Bahnelement als konstant wirkend, die andre tangential zur Bahn gerichtet (Tangentialkraft) als im Gleichgewicht befindlich betrachtet werden mufs.

Die Gleichung 76):

$$r = \frac{(c_{,} \sin \alpha)^2}{f_{,,}}$$

gilt hiernach ganz allgemein, sobald man unter r den Krümmungshalbmesser in irgend einem Element der Kurve, unter $f_{,,}$ das Aenderungsmaafs der Normalkraft, unter $c_{,}$ die gleichförmige Seitengeschwindigkeit und unter α den Winkel versteht, welchen diese gleichförmige Seitengeschwindigkeit mit der Normale der Kurve bildet. Wird die gleichförmige Seitengeschwindigkeit tangential genommen, so ist $\alpha = 90$ Grad $\sin \alpha = 1$, und man hat:

$$77) \begin{cases} r = \dfrac{c_{,}^2}{f''} \\ f_{,,} = \dfrac{c_{,}^2}{r}. \end{cases}$$

Da aber die Tangente für ein Kurvenelement mit diesem zusammenfällt, so kann man unter $c_{,}$ auch die Geschwindigkeit in der Richtung der Bahn, oder die Geschwindigkeit, mit welcher das Massenelement in dem betrachteten Augenblick sich eben bewegt verstehen.

Centripetalkraft und Centrifugalkraft.

§ 43. Aus den Untersuchungen des vorigen Paragraphen folgt, dafs wenn ein Massenelement sich in einer beliebigen Kurve bewegt, man immer das Aenderungsmaafs $f_{,,}$ der Normalkraft nach der Gleichung 77) bestimmen kann, sobald man die Geschwindigkeit des Massenelements und den Krümmungshalbmesser der Bahn kennt. Diese Normalkraft äufsert auf das Massenelement einen Druck in der Richtung nach dem Mittelpunkt des Krümmungskreises, und diesem Druck mufs eine gleich grofse, aber entgegengesetzt wirkende Reaktion (§ 36) entsprechen. Man nennt daher auch wohl die Normalkraft, welche das Bestreben darstellt, das Massen-