gewicht sind, und von einer Kräftesumme, welche entweder konstant oder veränderlich wirkend ist.

Nach den auf S. 17 über die Entstehung der gleichförmigen Geschwindigkeit gemachten Bemerkungen läfst sich in den beiden unter b und c genannten Fällen die krummlinige Bewegung auch auffassen, als hervorgegangen aus der Wirkung dreier zu einander normalen Kräftesummen, von denen eine oder zwei momentan wirkend, die beiden anderen, resp. die dritte aber kontinuirlich, sei es konstant oder veränderlich wirkend, zu denken sind.

Bewegung in einer ebenen Kurve.

§ 40. Die Kurve, welche den Gleichungen No. 69 entspricht, ist im Allgemeinen eine Kurve von doppelter Krümmung; sie wird eine ebene Kurve, wenn entweder y oder z konstant wird, d. h. wenn die in der Richtung der einen Axe liegende Geschwindigkeit gleich Null ist. Für die Bewegung in einer ebenen Kurve haben wir also die Bedingungsgleichungen:

$$70) \left\{ \begin{array}{l} y = \int \frac{c_{II}}{c_I} dx + a_{II} \\ z = 0 \text{ oder } c_{III} = 0. \end{array} \right.$$

Die Bewegung in einer ebenen Kurve läfst sich also immer als das Resultat zweier Kräftesummen ansehen, deren Richtungen zu einander normal sind, und von welchen entweder die eine im Gleichgewicht, und die andere konstant resp. veränderlich wirkend, oder aber welche beide veränderlich wirkend zu denken sind.

Parabelbahn.

§ 41. Bewegt sich ein Massenelement unter dem Einflufs zweier Kräftesummen, deren Richtungen normal zu einander sind und von denen eine im Gleichgewicht ist, also eine gleichförmige Geschwindigkeit bedingt, die andere aber konstant wirkend ist, so ist die Bahn eine Parabel; denken wir nämlich, die gleichförmige Geschwindigkeit finde in der Axe der X statt, die ungleichförmige in der Axe der Y, und es sei f_{II} das Aenderungsmaafs der konstant wirkenden Kraft. Man hat sodann:

$$c_{II} = f_{II} t \text{ (No. 35. S. 20)},$$

worin t die Zeit bedeutet, welche seit der Einwirkung der Kraft verflossen ist. Diese Zeit ist aber dieselbe, während welcher in der Axe der X ein bestimmter Weg x mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $c_{,}$ durchlaufen ist, und sie findet sich nach No. 25. S. 17);

$$t = \frac{x}{c_{,}}.$$

Man hat also für die Gleichung der Kurve (No. 69):

$$y = \int \frac{c_{,,}}{c_{,}} dx + a_{,,} = \int \frac{f_{,,} t}{c_{,}} dx + a_{,,}$$

$$71)\quad y = \int \frac{f_{,,} x}{c_{,}^2} dx = \tfrac{1}{2} \frac{f_{,,}}{c_{,}^2} . x^2 + a_{,,},$$

welches die Gleichung der Parabel ist.

Sind die Kräftesummen nicht normal zu einander, schliefsen ihre Richtungen vielmehr den Winkel α ein, so kann man sie immer auf zwei zu einander normale Kräftesummen zurückführen. Nimmt man die Richtung der einen dieser normalen Kräftesummen mit der Richtung der konstant wirkenden Kraft zusammenfallend, so läfst sich die gleichförmige Geschwindigkeit der andern Kräftesumme $c_{,}$ in zwei andre Geschwindigkeiten zerlegen (No. 59. S. 34), deren eine in der Richtung der XAxe liegt, und gleich $c_{,} \sin \alpha$ ist, die andre in der Richtung der YAxe liegt und gleich $c_{,} \cos \alpha$ ist. Man hat sodann die Geschwindigkeitssumme in der YAxe (No. 60. S. 34):

$$c_{,,} = c_{,} \cos \alpha + f_{,,} t,$$

und nach der obigen Darstellung $t = \frac{x}{c_{,} \sin \alpha}$ setzt man nun in der allgemeinen Gleichung für die Kurve:

$$y = \int \frac{c_{,,}}{c_{,}} dx + a_{,,},$$

für $c_{,,}$ den Werth $c_{,} \cos \alpha + f_{,,} t$ und für $c_{,}$ den Werth $c_{,} \sin \alpha$; sodann aber für t den eben berechneten Werth, so ergiebt sich leicht:

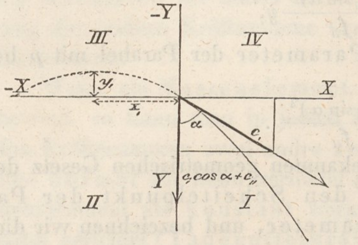
$$72) \left\{ \begin{aligned} y &= \int \left(\operatorname{cotg} \alpha + \frac{f_{,,}}{(c_{,} \sin \alpha)^2} . x \right) dx + a_{,,} \\ y &= x . \operatorname{cotg} \alpha + x^2 . \frac{f_{,,}}{2 (c_{,} \sin \alpha)^2} + a_{,,}. \end{aligned} \right.$$

Diese Kurve ist aber ebenfalls eine Parabel. Dies läfst sich auf folgende Weise zeigen. Zunächst finden wir einen Wendepunkt der Kurve, wenn y ein Maximum oder ein Minimum wird, und nach bekannten Regeln haben wir zur Bestimmung dieses Wendepunkts zu setzen:

$$dy = \operatorname{cotg} \alpha + \frac{f_{,,}}{(c' \sin \alpha)^2} x = 0,$$

daraus folgt:

$$73)\quad x_{,} = - \frac{c_{,}^2}{f_{,,}} . \sin \alpha . \cos \alpha . = - \tfrac{1}{2} \frac{c_{,}^2}{f_{,,}} . \sin 2\alpha.$$



Da nun die zweite Ableitung immer **positiv** ist, so lange $f_{,,}$ als positiv gedacht wird, weil nämlich das Quadrat im Nenner immer positiv sein muſs, so entspricht der eben bestimmte Werth von x einem **Minimum**, also einem negativen Werth von y; es wird also der Wendepunkt im III. oder IV. Quadranten liegen. Er liegt im III. Quadranten, wenn das zugehörige x **negativ** ist, und dies tritt ein, nach 73), wenn α ein **spitzer** Winkel ist. Dagegen wird x positiv, wenn α ein stumpfer Wtnkel, also $\cos \alpha$ negativ ist, und dann liegt der Wendepunkt im IV. Quadranten.

Setzen wir den Werth von x aus 73 in 72, so erhalten wir für den Wendepunkt:

$$74)\quad y_{,} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{c_{,}^{2}}{f_{,,}}\cos.\alpha^{2} + a_{,,}.$$

Verlegen wir nun den Anfangspunkt der Koordinaten in den Wendepunkt der Kurve, so ist zunächst $a_{,,} . = 0$ und nennen wir die neuen Koordinaten y' und x', so ist offenbar $x = x' - \frac{c_{,}^{2}}{f_{,,}} \sin\alpha . \cos\alpha$ (nach No. 73) und wenn wir diesen Werth in die Gleichung 72) einsetzen, so geht dieselbe nach einer leichten Rechnung über in:

$$75)\quad y' = \tfrac{1}{2}\,\frac{f_{,,}}{(c_{,}\sin\alpha)^{2}} . x'^{2},$$

welches wieder die Gleichung der **Parabel** ist; dieselbe geht in die Gleichung No. 71 über, wenn α gleich einem **Rechten** ist.

Zu bemerken ist hier noch, daſs die **konkave** Seite der Parabel immer der Axe der Y, oder derjenigen Axe zugekehrt ist, welche der Richtung der **konstant** wirkenden Kräftesumme entspricht.

Da endlich die **gleichförmige** Geschwindigkeit nach S. 17 als das Resultat einer **momentan** wirkenden Kraft aufgefaſst werden kann, so läſst sich die **Parabelbewegung immer betrachten als das Resultat einer momentan wirkenden Kräftesumme und einer konstant wirkenden Kräftesumme, deren Richtungen einen Winkel mit einander bilden.**

Krümmungskreis der Bahn, — Normalkraft, Tangentialkraft.

§ 42. Die Gleichung 75) läſst sich auch folgendermaaſsen schreiben: