und folglich die mittle Geschwindigkeit c:

$$62)\ c = \sqrt{(c_{,}^2 + c_{,,}^2 + c_{,,,}^2)}.$$

Die Winkel α, β, γ, welche c mit den Axen bildet, findet man durch die Gleichung 56):

$$\cos\alpha = \frac{c_{,}}{c},\quad \cos\beta = \frac{c_{,,}}{c},\quad \cos\gamma = \frac{c_{,,,}}{c}.$$

Bei Bestimmung der Ausdrücke $c' \cos\alpha_{,}$ etc. ist besonders auf das Vorzeichen von $\cos\alpha_{,}$ etc. zu achten, und es sind die Winkel stets in demselben Sinne zu messen.

Die Leistung, welche aus der Wirkung einer beliebigen Zahl von Kräften nach der Richtung einer der drei Axen hervorgeht, nennen wir eine Kräftesumme für diese Richtung. Wirken beliebig viele Kräfte auf ein Massenelement, so kann man in jedem Augenblick die Wirkung derselben auf drei Kräftesummen, deren Richtungen in den drei Axen liegen, zurückführen. Jede der drei Kräftesummen läfst sich behandeln, als ob sie die Leistung einer einzigen in dieser Richtung wirkenden Gesammtkraft sei, und wenden wir das Prinzip der virtuellen Leistungen an, so ergiebt sich sehr leicht für beliebig viele Kräfte, die auf ein Massenelement wirken, das Gesetz:

die Leistung der Mittelkraft in irgend einem Zeitelement ist gleich der Summe dreier Kräftesummen für drei zu einander normale Axen.

Parallelepipedum und Parallelogramm der Drucke.

§ 33. Sind die sämmtlichen Kräfte, welche anf ein Massenelement wirken, konstante, d. h. ist das Aenderungsmaafs für dieselben in jedem Zeitelement dasselbe, so folgt nach S. 19 (No. 30) $c' = f't'$, $c'' = f''t''$ etc. Nehmen wir an, dafs die sämmtlichen Kräfte gleich lange Zeit wirksam gewesen sind, also $t' = t''$ etc., so folgt ferner, dafs die Geschwindigkeiten unter sich in jedem Augenblicke dasselbe Verhältnifs haben, und wenn man für die Geschwindigkeiten in den Gleichungen 61) die Werthe $f't$, $f''t$, $f'''t$ etc. substituirt, und durch t durchweg dividirt, so hat man:

$$63)\ \begin{cases} f' \cos\alpha_{,} + f'' \cos\alpha_{,,} + f''' \cos\alpha_{,,,} + \ldots = f_{,}, \\ f' \cos\beta_{,} + f'' \cos\beta_{,,} + f''' \cos\beta_{,,,} + \ldots = f_{,,}, \\ f' \cos\gamma_{,} + f'' \cos\gamma_{,,} + f''' \cos\gamma_{,,,} + \ldots = f_{,,,}, \end{cases}$$

und folglich das Aenderungsmaafs der Mittelkraft:

$$64)\ f = \sqrt{(f_{,}^2 + f_{,,}^2 + f_{,,,}^2)}.$$

Es drücken sich aber die Drucke, welche die Kräfte auf das Massenelement ausüben, aus durch:

$$dK' = dmf', \quad dK'' = dmf'' \text{ etc.}$$

Wenn man nun die obigen Gleichungen 63) mit dm multiplizirt und für dmf' etc. die Werthe dK' etc. setzt, so hat man:

$$65) \begin{cases} dK' \cos\alpha_{,} + dK'' \cos\alpha_{,,} + dK''' \cos\alpha_{,,,} + \ldots = dK_{,}, \\ dK' \cos\beta_{,} + dK'' \cos\beta_{,,} + dK''' \cos\beta_{,,,} + \ldots = dK_{,,}, \\ dK' \cos\gamma_{,} + dK'' \cos\gamma_{,,} + dK''' \cos\gamma_{,,,} + \ldots = dK_{,,,}, \end{cases}$$

und folglich der Mitteldruck:

$$66) \quad dK = \sqrt{(dK_{,}^2 + dK_{,,}^2 + dK_{,,,}^2)}.$$

$$67) \quad \cos\alpha = \frac{dK_{,}}{dK} = \frac{f_{,}}{f}, \quad \cos\beta = \frac{dK_{,,}}{dK} = \frac{f_{,,}}{f}, \quad \cos\gamma = \frac{dK_{,,,}}{dK} = \frac{f_{,,,}}{f}.$$

Hat man es mit veränderlich wirkenden Kräften zu thun, so ändert sich freilich f in jedem Zeitelement, man kann jedoch für die Dauer eines Zeitelements f als konstant ansehen, und versteht man unter f' f'' etc. die bestimmten gleichzeitigen Werthe, welche die Aenderungsmaafse in einem bestimmten Zeitelement besitzen, so gelten die obigen Gleichungen unter dieser Voraussetzung auch für veränderlich wirkende Kräfte; und dann ergeben sich durch jene Betrachtungen die Gesetze:

1) In jedem Zeitelement verhalten sich die Drucke, welche verschiedene Kräfte auf ein Massenelement ausüben, zu einander, wie die Geschwindigkeiten, welche die Kräfte dem Massenelement in diesem Augenblick ertheilen würden, falls sie frei wirkten.

2) Wenn man die Drucke ihrer Gröfse und Richtung nach durch Linien darstellt, so gilt das Gesetz, welches wir als Parallelepipedum resp. Parallelogramm der Kräfte und der Geschwindigkeiten bezeichnet haben, mit allen seinen Konsequenzen auch für die Drucke.

In dieser Gestalt nennen wir dies Gesetz das Prinzip des Parallelepipedums resp. des Parallelogramms der Drucke.

Bedingungen für das Gleichgewicht nach dem Prinzip der virtuellen Leistungen.

§ 34. Sind die Geschwindigkeiten in der Richtung aller dreier Axen gleichförmig, d. h. nach S. 16, wenn die Kräftesummen für die Richtungen aller dreier Axen im Gleichgewicht sind, so ist auch die mittle Geschwindigkeit gleichförmig, und folglich sind die Kräfte überhaupt im Gleichgewicht. Denn nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten ergiebt sich $dm . cdc = dmc_{,}dc_{,} + dmc_{,,}dc_{,,} + dmc_{,,,}dc_{,,,}$, und da die Geschwindigkeiten $c_{,}$, $c_{,,}$, $c_{,,,}$ konstant sind,