Kräfte. Giebt man den Geschwindigkeiten, je nachdem sie in dem einen oder in dem andern Sinne liegen, bestimmte Vorzeichen, so kann man den Satz auch so fassen:

Wenn die Richtungslinien zweier Kräfte in dieselbe gerade Linie fallen, so ist die resultirende Geschwindigkeit gleich der algebraischen Summe der einzelnen Geschwindigkeiten.

Mit Hilfe dieser Sätze kann man aber auch jede Kraft, welche ihrer Richtung und Geschwindigkeit nach gegeben ist, immer in zwei oder mehre Seitenkräfte zerlegen.

Bestimmung der Mittelkraft durch das Axensystem.

§ 32. Durch geschicktes Zusammensetzen und Zerlegen der Kräfte kann man oft verwickelte Rechnungen sehr erleichtern. Hat man z. B. eine beliebige Menge von Kräften, welche auf ein Massenelement wirken, so kann man die Mittelkraft derselben auch so bestimmen, dafs man zuerst drei Richtungen annimmt, die zu einander normal sind (Axensystem), dafs man sodann jede einzelne Kraft nach diesen drei Richtungen zerlegt, die algebraische Summe der einzelnen Geschwindigkeiten, die in einerlei Richtungslinie fallen, bildet, und nun diese drei Geschwindigkeiten wieder zusammensetzt, die resultirende Geschwindigkeit ist dann diejenige der Mittelkraft.

Es seien c', c'', c''', c'''' ... etc. die Geschwindigkeiten verschiedener Kräfte, $\alpha_{,}$, $\alpha_{,,}$, $\alpha_{,,,}$, $\alpha_{,,,,}$ .... die Winkel, welche sie mit der ersten Axe bilden, $\beta_{,}$, $\beta_{,,}$, $\beta_{,,,}$, $\beta_{,,,,}$.... die Winkel mit der zweiten und $\gamma_{,}$, $\gamma_{,,}$, $\gamma_{,,,}$, $\gamma_{,,,,}$ ... die Winkel mit der dritten Axe. Zerlegt man die Geschwindigkeit c' nach der Richtung der drei Axen, so hat man mit Benutzung der Gleichung 56) die Seiten-Geschwindigkeit nach der ersten Axe: $c' \cos \alpha_{,}$, nach der Richtung der zweiten Axe $c' \cos \beta_{,}$, nach der Richtung der dritten Axe $c' \cos \gamma_{,}$. In gleicher Weise zerlegt man die übrigen Geschwindigkeiten, und wenn man nun die algebraische Summe der Geschwindigkeiten, die in einerlei Axe liegen, bildet, und diese für die erste Axe mit $c_{,}$, für die zweite Axe mit $c_{,,}$, für die dritte Axe mit $c_{,,,}$ bezeichnet, so folgt die Geschwindigkeit nach der ersten Axe:

$$61) \left\{ \begin{array}{c} c' \cos \alpha_{,} + c'' \cos \alpha_{,,} + c''' \cos \alpha_{,,,} + \ldots = c_{,}, \\ \text{die nach der zweiten Axe:} \\ c' \cos \beta_{,} + c'' \cos \beta_{,,} + c''' \cos \beta_{,,,} + \ldots = c_{,,}, \\ \text{die nach der dritten Axe:} \\ c' \cos \gamma_{,} + c'' \cos \gamma_{,,} + c''' \cos \gamma_{,,,} + \ldots = c_{,,,}, \end{array} \right.$$

und folglich die mittle Geschwindigkeit c:

$$62)\quad c = \sqrt{(c_{,}^2 + c_{,,}^2 + c_{,,,}^2)}.$$

Die Winkel α, β, γ, welche c mit den Axen bildet, findet man durch die Gleichung 56):

$$\cos\alpha = \frac{c_{,}}{c},\quad \cos\beta = \frac{c_{,,}}{c},\quad \cos\gamma = \frac{c_{,,,}}{c}.$$

Bei Bestimmung der Ausdrücke $c'\cos\alpha_{,}$ etc. ist besonders auf das Vorzeichen von $\cos\alpha_{,}$ etc. zu achten, und es sind die Winkel stets in demselben Sinne zu messen.

Die Leistung, welche aus der Wirkung einer beliebigen Zahl von Kräften nach der Richtung einer der drei Axen hervorgeht, nennen wir eine Kräftesumme für diese Richtung. Wirken beliebig viele Kräfte auf ein Massenelement, so kann man in jedem Augenblick die Wirkung derselben auf drei Kräftesummen, deren Richtungen in den drei Axen liegen, zurückführen. Jede der drei Kräftesummen läfst sich behandeln, als ob sie die Leistung einer einzigen in dieser Richtung wirkenden Gesammtkraft sei, und wenden wir das Prinzip der virtuellen Leistungen an, so ergiebt sich sehr leicht für beliebig viele Kräfte, die auf ein Massenelement wirken, das Gesetz:

die Leistung der Mittelkraft in irgend einem Zeitelement ist gleich der Summe dreier Kräftesumsummen für drei zu einander normale Axen.

Parallelepipedum und Parallelogramm der Drucke.

§ 33. Sind die sämmtlichen Kräfte, welche anf ein Mas senelement wirken, konstante, d. h. ist das Aenderungsmaafs für dieselben in jedem Zeitelement dasselbe, so folgt nach S. 19 (No. 30) $c' = f't'$, $c'' = f''t''$ etc. Nehmen wir an, dafs die sämmtlichen Kräfte gleich lange Zeit wirksam gewesen sind, also $t' = t''$ etc., so folgt ferner, dafs die Geschwindigkeiten unter sich in jedem Augenblicke dasselbe Verhältnifs haben, und wenn man für die Geschwindigkeiten in den Gleichungen 61) die Werthe $f't$, $f''t$, $f'''t$ etc. substituirt, und durch t durchweg dividirt, so hat man:

$$63)\quad \left\{\begin{array}{l} f'\cos\alpha_{,} + f''\cos\alpha_{,,} + f'''\cos\alpha_{,,,} + \ldots = f_{,}, \\ f'\cos\beta_{,} + f''\cos\beta_{,,} + f'''\cos\beta_{,,,} + \ldots = f_{,,}, \\ f'\cos\gamma_{,} + f''\cos\gamma_{,,} + f'''\cos\gamma_{,,,} + \ldots = f_{,,,}, \end{array}\right.$$

und folglich das Aenderungsmaafs der Mittelkraft:

$$64)\quad f = \sqrt{(f_{,}^2 + f_{,,}^2 + f_{,,,}^2)}.$$