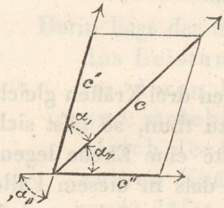
Sind c' und c'' die Geschwindigkeiten zweier Kräfte, ist ${}_{\prime}\alpha_{\prime\prime}$ der Winkel, welchen die Richtungen mit einander bilden, so ist die Geschwindigkeit der Mittelkraft durch die Gleichung gegeben:

$$c^2 = c'^2 + c''^2 + 2c'c''.\cos{}_{\prime}\alpha_{\prime\prime},$$

folglich:



$$cdc = c'dc' + c''dc'' + \cos{}_{\prime}\alpha_{\prime\prime}(c'dc'' + c''dc')$$

und daher das Leistungselement der Mittelkraft.

$$57)\ dm\,cdc = dm[c'dc' + c''dc'' + \cos{}_{\prime}\alpha_{\prime\prime}(c'dc'' + c''dc')],$$

und wenn $\alpha_{\prime}$, $\alpha_{\prime\prime}$ die Winkel bezeichnen, welche die Geschwindigkeit c mit c', und c mit c'' macht, so hat man auch:

$$58)\ \frac{c'}{c''} = \frac{\sin\alpha_{\prime\prime}}{\sin\alpha_{\prime}},$$

d. h.: **die Geschwindigkeiten der beiden Kräfte verhalten sich umgekehrt zu einander wie die Sinus der Winkel, welche dieselben mit der Richtung der Geschwindigkeit der dritten Kraft bilden.**

Ist der Winkel, welchen die Richtungen der beiden Kräfte bilden, ${}_{\prime}\alpha_{\prime\prime} = 90$ Grad, so folgt, da $\cos 90^0 = 0$:

$$dm\,c\,dc = dm(c'dc' + c''dc''),$$

also die Leistung der Mittelkraft gleich der Summe der Leistungen der Seitenkräfte, welches auch unmittelbar aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten sich ergiebt. Da nun in diesem Falle $\sin\alpha_{\prime} = \cos\alpha_{\prime\prime}$ ist, so hat man:

$$59)\ \begin{cases} \dfrac{c'}{c''} = \dfrac{\sin\alpha_{\prime\prime}}{\cos\alpha_{\prime\prime}} = \operatorname{tang}\alpha_{\prime\prime} = \operatorname{cotang}\alpha_{\prime}. \\ c' = c.\sin\alpha_{\prime\prime};\ c'' = c.\cos\alpha_{\prime\prime}. \end{cases}$$

Mittelkraft zweier Kräfte, deren Richtungen in derselben geraden Linie liegen.

§ 31. Wenn der Winkel ${}_{\prime}\alpha_{\prime\prime} = 0$ ist, so ist $\cos{}_{\prime}\alpha_{\prime\prime} = 1$; ist dagegen ${}_{\prime}\alpha_{\prime\prime} = 180$ Grad, so ist $\cos{}_{\prime}\alpha_{\prime\prime} = -1$, in beiden Fällen fallen die Richtungen der Geschwindigkeiten zusammen, und zwar liegen sie im ersten Falle nach derselben Richtung, in andern Falle sind sie entgegengesetzt. Man hat daher für den Fall, dafs die beiden Kräfte nach derselben Richtung wirken:

$$c^2 = c'^2 + c''^2 \pm 2c'c'',$$

folglich:

$$60)\ c = c' \pm c'',$$

d. h. die resultirende Geschwindigkeit ist dann gleich der Summe oder gleich der Differenz der Geschwindigkeiten der einzelnen

Kräfte. Giebt man den Geschwindigkeiten, je nachdem sie in dem einen oder in dem andern Sinne liegen, bestimmte Vorzeichen, so kann man den Satz auch so fassen:

Wenn die Richtungslinien zweier Kräfte in dieselbe gerade Linie fallen, so ist die resultirende Geschwindigkeit gleich der algebraischen Summe der einzelnen Geschwindigkeiten.

Mit Hilfe dieser Sätze kann man aber auch jede Kraft, welche ihrer Richtung und Geschwindigkeit nach gegeben ist, immer in zwei oder mehre Seitenkräfte zerlegen.

Bestimmung der Mittelkraft durch das Axensystem.

§ 32. Durch geschicktes Zusammensetzen und Zerlegen der Kräfte kann man oft verwickelte Rechnungen sehr erleichtern. Hat man z. B. eine beliebige Menge von Kräften, welche auf ein Massenelement wirken, so kann man die Mittelkraft derselben auch so bestimmen, dafs man zuerst drei Richtungen annimmt, die zu einander normal sind (Axensystem), dafs man sodann jede einzelne Kraft nach diesen drei Richtungen zerlegt, die algebraische Summe der einzelnen Geschwindigkeiten, die in einerlei Richtungslinie fallen, bildet, und nun diese drei Geschwindigkeiten wieder zusammensetzt, die resultirende Geschwindigkeit ist dann diejenige der Mittelkraft.

Es seien c', c'', c''', c'''' ... etc. die Geschwindigkeiten verschiedener Kräfte, $\alpha_{,}$, $\alpha_{,,}$, $\alpha_{,,,}$, $\alpha_{,,,,}$ .... die Winkel, welche sie mit der ersten Axe bilden, $\beta_{,}$, $\beta_{,,}$, $\beta_{,,,}$, $\beta_{,,,,}$ .... die Winkel mit der zweiten und $\gamma_{,}$, $\gamma_{,,}$, $\gamma_{,,,}$, $\gamma_{,,,,}$ ... die Winkel mit der dritten Axe. Zerlegt man die Geschwindigkeit c' nach der Richtung der drei Axen, so hat man mit Benutzung der Gleichung 56) die Seiten-Geschwindigkeit nach der ersten Axe: $c' \cos \alpha_{,}$, nach der Richtung der zweiten Axe $c' \cos \beta_{,}$, nach der Richtung der dritten Axe $c' \cos \gamma_{,}$. In gleicher Weise zerlegt man die übrigen Geschwindigkeiten, und wenn man nun die algebraische Summe der Geschwindigkeiten, die in einerlei Axe liegen, bildet, und diese für die erste Axe mit $c_{,}$, für die zweite Axe mit $c_{,,}$, für die dritte Axe mit $c_{,,,}$ bezeichnet, so folgt die Geschwindigkeit nach der ersten Axe:

$$61)\quad \begin{cases} c' \cos \alpha_{,} + c'' \cos \alpha_{,,} + c''' \cos \alpha_{,,,} + \dots = c_{,}, \\ \text{die nach der zweiten Axe:} \\ c' \cos \beta_{,} + c'' \cos \beta_{,,} + c''' \cos \beta_{,,,} + \dots = c_{,,}, \\ \text{die nach der dritten Axe:} \\ c' \cos \gamma_{,} + c'' \cos \gamma_{,,} + c''' \cos \gamma_{,,,} + \dots = c_{,,,}, \end{cases}$$