Ist die Leistung während der Zeitdauer, in welcher sie hervorgebracht ist, nicht konstant, so kann man dafür einen gewissen mittlen Werth einführen, insofern man unter dem mittlen Werth einer veränderlichen Gröſse einen solchen konstanten Werth versteht, welcher in irgend einer Beziehung dasselbe Resultat erzeugt, wie der veränderliche Werth. Die obigen Formeln 51 bis 53 geben zugleich die mittlen Werthe für K, $c\frac{L}{t}$ u. s. w., wenn diese Gröſsen während der Zeit t veränderlich waren.

b) Wirkung **mehrer** mechanischen Kräfte auf **ein** Massenelement.

Grundsätze für die Wirkung mehrer Kräfte auf ein Massenelement — Zusammensetzen, Zerlegen der Kräfte. Allgemeine Bedingungen des Gleichgewichts.

§ 24. In den vorhergehenden Untersuchungen haben wir überall nur eine Kraft auf ein Massenelement wirkend gedacht. Zwar haben wir bei der Bestimmung des Druckes den Zustand des Gleichgewichts und somit nach den früheren Betrachtungen stillschweigend zwei Kräfte, deren Wirkungen sich aufheben, vorausgesetzt, allein wir haben den Gleichgewichtszustand immer nur als einen gegebenen und möglichen Fall betrachtet, ohne zu untersuchen, unter welchen Bedingungen dieser Fall eintreten kann. Gegenwärtig schreiten wir zur Untersuchung der Verhältnisse, welche eintreten, wenn zwei oder mehre Kräfte auf ein Massenelement wirken. Wir stellen zu diesem Zweck zunächst einige Grundsätze auf, die wir künftig mehrfach brauchen werden.

1) Wenn mehre Kräfte gleichzeitig auf ein Massenelement wirken, so ist das Resultat ihrer Gesammtwirkung während eines Zeitelementes dasselbe, welches auch erreicht worden wäre, wenn dieselben Kräfte während desselben Zeitelementes in einer beliebigen Reihenfolge gewirkt hätten, so daſs das Massenelement während eines Theils des Zeitelementes zuerst der Wirkung und der Richtung der einen Kraft, dann der Wirkung und der Richtung einer folgenden etc. gefolgt wäre.

2) Diese Vorstellung hindert nicht, daſs wir uns, anstatt der mehren Kräfte, welche gleichzeitig auf ein Massenelement wirken, eine einzige Kraft denken können, welche so beschaffen ist, daſs sie, wenn sie allein wirkte, während desselben Zeitelementes in dem Massenelement dieselbe Wirkung erzeugen würde, welche die verschiedenen einzelnen Kräfte zusammen erzeugen. Diese Kraft nennt man die

resultirende Kraft, die Resultante, die Mittelkraft; die andern Kräfte nennt man in Bezug auf die Resultante, deren Seitenkräfte, Komponenten. Denkt man die Mittelkraft verschiedener Seitenkräfte, so sagt man, dafs man die Seitenkräfte zusammensetze.

3) Die Wirkung jeder Kraft läfst sich auffassen als das Resultat mehrer anderer gleichzeitig wirkender Kräfte, oder mit andern Worten, jede Kraft läfst sich als Resultante verschiedener Seitenkräfte ansehen. Bestimmt man die Seitenkräfte, als deren Resultante man die gegebene Kraft ansehen will, so sagt man, man zerlege die Kraft in Seitenkräfte.

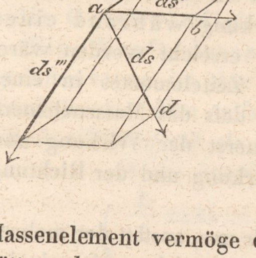
4) Aus dem Begriff des Gleichgewichts (S. 5) folgt, dafs mehre Kräfte, welche auf ein Massenelement wirken, im Gleichgewicht sind, wenn die Wirkungsgröfse ihrer Mittelkraft gleich Null ist.

5) Auch folgt aus dem Vorgetragenen leicht, dafs mehre auf ein Massenelement wirkende Kräfte im Gleichgewicht sind, wenn die Wirkungsgröfsen ihrer sämmtlichen Seitenkräfte gleich Null sind, und umgekehrt.

Prinzip des Parallelepipedums der Kräfte.

§ 25. Denken wir uns drei Kräfte, deren Richtungen nicht in derselben Ebene liegen, auf ein Massenelement wirken. Die Elemente dieser Kräfte seien:

$$dK' = dmf',$$
$$dK'' = dmf'',$$
$$dK''' = dmf''',$$



und die Wegelemente derselben mögen bezeichnet werden mit $ds' = c'dt$, $ds'' = cdt$, $ds''' = c'''dt$.

Wir können uns nun nach dem ersten Grundsatz in § 24 den Fall auch so denken, dafs während eines bestimmten Zeitelementes die Wirkungen nach einander erfolgt wären, so, dafs zuerst das Massenelement vermöge der Kraft $dK'ds'$ den Weg ds' zurückgelegt hätte, also von a nach b gelangt sei, dann in einem folgenden Theil desselben Zeitelements in der Richtung von ds'' vermöge der Kraft $dK''ds''$ den Weg $bc = ds''$ und endlich in einem dritten Theil des Zeitelementes vermöge der Kraft $dK'''ds'''$ den Weg $cd = ds'''$ in der Richtung von ds''' zurückgelegt habe. Es wird dann nach Vollendung des Zeitelements das Massenelement sich in d befinden. Dasselbe würde stattfinden, wenn vermöge einer einzigen Kraft dK, welche in der Richtung ad wirksam ist, das Massenelement in dem Zeitelement den Weg $ds = ad$ zurückgelegt hätte. Es läſst sich also die Wirkung der drei Kräfte durch eine einzige ersetzen, deren Leistung sich ausdrückt durch $dKds$, und diese Kraft $dKds$ ist die Resultante aus den drei Kräften $dK'ds'$, $dK''ds''$, $dK'''ds'''$.

Es folgt hieraus das Gesetz:

Wenn drei Kräfte, deren Richtungen nicht in derselben Ebene liegen, auf ein Massenelement wirken, so erfolgt die gemeinschaftliche Wirkung nach der Diagonale des Parallelepipedums, welches durch die Gröſse und Richtung der Wegelemente der drei Kräfte gegeben ist, auch ist das Wegelement der Mittelkraft gleich der Länge dieser Diagonale. Dies Gesetz nennt man das Prinzip des Parallelepipedums der Kräfte.

Parallelepipedum der Geschwindigkeiten.

§ 26. Zufolge des Ausdrucks $ds = c\,.\,dt$ verhalten sich die Wegelemente in einem bestimmten Zeitelemente, wie die in diesem Zeitelemente stattfindenden Geschwindigkeiten. Trägt man auf den Richtungslinien der Kräfte anstatt der Wegelemente die in dem betrachteten Zeitelemente stattfindenden Geschwindigkeiten ab, so folgt, daſs die Diagonale des Parallelepipedums der Geschwindigkeiten sowohl der Gröſse als der Richtung nach gleich der Geschwindigkeit der Mittelkraft sein müsse.

Das Leistungselement, die Mittelkraft, aber drückt sich aus durch:

$$dKds = dm\,.\,c\,.\,dc.$$

Sind nun die Seitenkräfte ihrer Geschwindigkeit und Richtung nach gegeben, so ist auch die Geschwindigkeit und Richtung der Mittelkraft, und dadurch ihr Leistungselement entweder durch einfache geometrische, oder durch analytische Betrachtung zu finden.

Prinzip der virtuellen Leistungen.

§ 27. Für den Fall, daſs die Richtungen der Seitenkräfte mit einander rechte Winkel machen, ist offenbar zufolge des Parallelepipedums der Geschwindigkeiten (Figur umstehend):

$$c^2 = c'^2 + c''^2 + c'''^2,$$

folglich:

$$c\,dc = c'dc' + c''dc'' + c'''dc''',$$

und:

$$54)\quad dm.c\,dc = dm.c'dc' + dm.c''dc'' + dm.c'''dc''',$$

oder (nach 47):

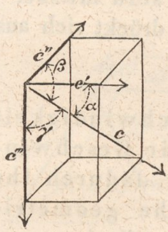
$$55)\quad dK.ds = dK'.ds' + dK''.ds'' + dK'''.ds'''.$$

Darin liegt der Satz:

das Leistungselement der Mittelkraft dreier Kräfte, deren Richtungen zu einander normal sind, und welche in verschiedenen Ebenen liegen, ist gleich der Summe der Leistungselemente der einzelnen Kräfte; und umgekehrt jedes Leistungselement läſst sich durch die Summe dreier anderer Leistungselemente ersetzen, deren Geschwindigkeits-Richtungen zu einander normal und in verschiedenen Ebenen liegen.

Nennen wir α, β, γ die Winkel, welche die Richtungslinie der Mittelkraft mit den einzelnen zu einander normalen Seitenkräften bildet, so folgt:

$$56)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{c'}{c} = \dfrac{c'}{\sqrt{(c'^2 + c''^2 + c'''^2)}} = \dfrac{ds'}{ds} \\ \cos\beta = \dfrac{c''}{c} = \dfrac{c''}{\sqrt{(c'^2 + c''^2 + c'''^2)}} = \dfrac{ds''}{ds} \\ \cos\gamma = \dfrac{c'''}{c} = \dfrac{c'''}{\sqrt{(c'^2 + c''^2 + c'''^2)}} = \dfrac{ds'''}{ds}. \end{cases}$$



Hieraus folgt, daſs die gleichzeitigen Geschwindigkeiten für ein Zeitelement oder auch die Wegelemente der zu einander normalen Seitenkräfte gleich den Projektionen der Geschwindigkeit oder des Wegelementes der Mittelkraft auf die Richtungen der Wege der Seitenkräfte sind. Diese gleichzeitigen Seiten-Geschwindigkeiten nennt man, in Bezug auf die mittlen Geschwindigkeiten, die virtuellen Geschwindigkeiten, die Werthe $dm.c'dc'$ etc. nennen wir die virtuellen Arbeiten, und es läſst sich das Gesetz der Gleichungen 54 und 55) auch so fassen: Jedes Arbeitselement einer Kraft ist gleich der Summe seiner virtuellen Arbeiten.

Diesen Satz nennt man das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, besser wollen wir ihn das Prinzip der virtuellen Arbeiten nennen.

Ist ds der Weg während eines Zeitelements, welchen das Massenelement, durch die Mittelkraft getrieben, zurücklegen würde, so wollen wir die Wege ds', ds'', ds''' d. h. die Projektionen des Wegelementes ds auf die Richtung der Seitenkräfte, die virtuellen Wegelemente der Seitenkräfte für ds nennen.

Parallelogramm der Kräfte.

§ 28. Ist das Wegelement der einen von den drei Kräften gleich Null, hat man es also nur mit zwei Kräften zu thun, so läſst sich immer durch die Richtungen der beiden Kräfte eine Ebene legen. Es folgt sehr leicht aus dem Vorgetragenen, daſs in diesem Falle anstatt des Parallelepipedums ein Parallelogramm erscheint, daſs das Wegelement der Mittelkraft gleich der Diagonale des Parallelogramms der Wegelemente, und die Geschwindigkeit der Mittelkraft gleich der Diagonale des Parallelogramms der Geschwindigkeiten ist.

Prinzip des unmöglichen Gleichgewichts für ein Massenelement.

§ 29. Wirken drei Kräfte auf ein Massenelement, deren Richtungslinien in verschiedenen Ebenen liegen, so läſst sich immer eine resultirende Kraft finden, deren Leistungselement einen bestimmten Werth hat. Daraus folgt, daſs drei solcher Kräfte niemals für sich im Gleichgewicht sein können. Ebenso läſst sich zeigen, daſs zwei Kräfte, welche auf ein Massenelement wirken, und deren Richtungslinien einen Winkel mit einander bilden, niemals für sich im Gleichgewicht sein können.

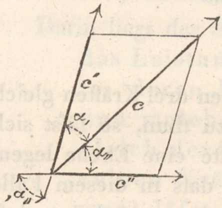
Dies Gesetz nennen wir das Prinzip des unmöglichen Gleichgewichts.

Mittelkraft einer beliebigen Anzahl von Kräften. Hilfssatz.

§ 30. In Folge des Satzes vom Parallelepipedum der Geschwindigkeiten kann man von einer beliebigen Anzahl von Kräften immer die Leistung der Mittelkraft bestimmen, denn man braucht die einzelnen Kräfte nur zunächst zu je zwei zusammenzusetzen und damit fortzufahren, bis man dieselben auf drei Kräfte, die in verschiedenen Ebenen liegen, oder auch auf zwei Kräfte in einer Ebene reducirt hat, und von diesen dann wieder die Mittelkraft bilden. Die so gefundene Mittelkraft ist die Mittelkraft sämmtlicher Kräfte. Bei dieser Zusammensetzung kann man sich des folgenden, geometrisch leicht nachzuweisenden Satzes bedienen:

Sind c' und c'' die Geschwindigkeiten zweier Kräfte, ist ${}_{,}\alpha_{,,}$ der Winkel, welchen die Richtungen mit einander bilden, so ist die Geschwindigkeit der Mittelkraft durch die Gleichung gegeben:

$$c^2 = c'^2 + c''^2 + 2c'c'' \,.\, \cos{}_{,}\alpha_{,,},$$



folglich:

$$cdc = c'dc' + c''dc'' + \cos{}_{,}\alpha_{,,}(c'dc'' + c''dc')$$

und daher das Leistungselement der Mittelkraft.

$$57)\quad dm\,cdc = dm[c'dc' + c''dc'' + \cos{}_{,}\alpha_{,,}(c'dc'' + c''dc')],$$

und wenn $\alpha_{,}$, $\alpha_{,,}$ die Winkel bezeichnen, welche die Geschwindigkeit c mit c', und c mit c'' macht, so hat man auch:

$$58)\quad \frac{c'}{c''} = \frac{\sin\alpha_{,,}}{\sin\alpha_{,}},$$

d. h.: **die Geschwindigkeiten der beiden Kräfte verhalten sich umgekehrt zu einander wie die Sinus der Winkel, welche dieselben mit der Richtung der Geschwindigkeit der dritten Kraft bilden.**

Ist der Winkel, welchen die Richtungen der beiden Kräfte bilden, ${}_{,}\alpha_{,,} = 90$ Grad, so folgt, da $\cos 90^0 = 0$:

$$dm\,c\,dc = dm(c'dc' + c''dc''),$$

also die Leistung der Mittelkraft gleich der Summe der Leistungen der Seitenkräfte, welches auch unmittelbar aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten sich ergiebt. Da nun in diesem Falle $\sin\alpha_{,} = \cos\alpha_{,,}$ ist, so hat man:

$$59)\ \begin{cases} \dfrac{c'}{c''} = \dfrac{\sin\alpha_{,,}}{\cos\alpha_{,,}} = \operatorname{tang}\alpha_{,,} = \operatorname{cotang}\alpha_{,}. \\ c' = c\,.\,\sin\alpha_{,,};\ c'' = c\,.\,\cos\alpha_{,,}. \end{cases}$$

Mittelkraft zweier Kräfte, deren Richtungen in derselben geraden Linie liegen.

§ 31. Wenn der Winkel ${}_{,}\alpha_{,,} = 0$ ist, so ist $\cos{}_{,}\alpha_{,,} = 1$; ist dagegen ${}_{,}\alpha_{,,} = 180$ Grad, so ist $\cos{}_{,}\alpha_{,,} = -1$, in beiden Fällen fallen die Richtungen der Geschwindigkeiten zusammen, und zwar liegen sie im ersten Falle nach derselben Richtung, in andern Falle sind sie entgegengesetzt. Man hat daher für den Fall, dafs die beiden Kräfte nach derselben Richtung wirken:

$$c^2 = c'^2 + c''^2 \pm 2c'c'',$$

folglich:

$$60)\quad c = c' \pm c'',$$

d. h. die resultirende Geschwindigkeit ist dann gleich der Summe oder gleich der Differenz der Geschwindigkeiten der einzelnen

Kräfte. Giebt man den Geschwindigkeiten, je nachdem sie in dem einen oder in dem andern Sinne liegen, bestimmte Vorzeichen, so kann man den Satz auch so fassen:

Wenn die Richtungslinien zweier Kräfte in dieselbe gerade Linie fallen, so ist die resultirende Geschwindigkeit gleich der algebraischen Summe der einzelnen Geschwindigkeiten.

Mit Hilfe dieser Sätze kann man aber auch jede Kraft, welche ihrer Richtung und Geschwindigkeit nach gegeben ist, immer in zwei oder mehre Seitenkräfte zerlegen.

Bestimmung der Mittelkraft durch das Axensystem.

§ 32. Durch geschicktes Zusammensetzen und Zerlegen der Kräfte kann man oft verwickelte Rechnungen sehr erleichtern. Hat man z. B. eine beliebige Menge von Kräften, welche auf ein Massenelement wirken, so kann man die Mittelkraft derselben auch so bestimmen, dafs man zuerst drei Richtungen annimmt, die zu einander normal sind (Axensystem), dafs man sodann jede einzelne Kraft nach diesen drei Richtungen zerlegt, die algebraische Summe der einzelnen Geschwindigkeiten, die in einerlei Richtungslinie fallen, bildet, und nun diese drei Geschwindigkeiten wieder zusammensetzt, die resultirende Geschwindigkeit ist dann diejenige der Mittelkraft.

Es seien c', c'', c''', $c''''\dots$ etc. die Geschwindigkeiten verschiedener Kräfte, $\alpha_{,}$, $\alpha_{,,}$, $\alpha_{,,,}$, $\alpha_{,,,,}\dots$ die Winkel, welche sie mit der ersten Axe bilden, $\beta_{,}$, $\beta_{,,}$, $\beta_{,,,}$, $\beta_{,,,,}\dots$ die Winkel mit der zweiten und $\gamma_{,}$, $\gamma_{,,}$, $\gamma_{,,,}$, $\gamma_{,,,,}\dots$ die Winkel mit der dritten Axe. Zerlegt man die Geschwindigkeit c' nach der Richtung der drei Axen, so hat man mit Benutzung der Gleichung 56) die Seiten-Geschwindigkeit nach der ersten Axe: $c'\cos\alpha_{,}$, nach der Richtung der zweiten Axe $c'\cos\beta_{,}$, nach der Richtung der dritten Axe $c'\cos\gamma_{,}$. In gleicher Weise zerlegt man die übrigen Geschwindigkeiten, und wenn man nun die algebraische Summe der Geschwindigkeiten, die in einerlei Axe liegen, bildet, und diese für die erste Axe mit $c_{,}$, für die zweite Axe mit $c_{,,}$, für die dritte Axe mit $c_{,,,}$ bezeichnet, so folgt die Geschwindigkeit nach der ersten Axe:

$$61)\quad \left\{\begin{array}{c} c'\cos\alpha_{,}+c''\cos\alpha_{,,}+c'''\cos\alpha_{,,,}+\dots=c_{,}, \\ \text{die nach der zweiten Axe:} \\ c'\cos\beta_{,}+c''\cos\beta_{,,}+c'''\cos\beta_{,,,}+\dots=c_{,,}, \\ \text{die nach der dritten Axe:} \\ c'\cos\gamma_{,}+c''\cos\gamma_{,,}+c'''\cos\gamma_{,,,}+\dots=c_{,,,}, \end{array}\right.$$

und folglich die mittle Geschwindigkeit c:

$$62)\ c = \sqrt{(c_{,}^2 + c_{,,}^2 + c_{,,,}^2)}.$$

Die Winkel α, β, γ, welche c mit den Axen bildet, findet man durch die Gleichung 56):

$$\cos\alpha = \frac{c_{,}}{c},\quad \cos\beta = \frac{c_{,,}}{c},\quad \cos\gamma = \frac{c_{,,,}}{c}.$$

Bei Bestimmung der Ausdrücke $c' \cos\alpha_{,}$ etc. ist besonders auf das Vorzeichen von $\cos\alpha_{,}$ etc. zu achten, und es sind die Winkel stets in demselben Sinne zu messen.

Die Leistung, welche aus der Wirkung einer beliebigen Zahl von Kräften nach der Richtung einer der drei Axen hervorgeht, nennen wir eine Kräftesumme für diese Richtung. Wirken beliebig viele Kräfte auf ein Massenelement, so kann man in jedem Augenblick die Wirkung derselben auf drei Kräftesummen, deren Richtungen in den drei Axen liegen, zurückführen. Jede der drei Kräftesummen läfst sich behandeln, als ob sie die Leistung einer einzigen in dieser Richtung wirkenden Gesammtkraft sei, und wenden wir das Prinzip der virtuellen Leistungen an, so ergiebt sich sehr leicht für beliebig viele Kräfte, die auf ein Massenelement wirken, das Gesetz:

> die Leistung der Mittelkraft in irgend einem Zeitelement ist gleich der Summe dreier Kräftesumsummen für drei zu einander normale Axen.

Parallelepipedum und Parallelogramm der Drucke.

§ 33. Sind die sämmtlichen Kräfte, welche anf ein Mas senelement wirken, konstante, d. h. ist das Aenderungsmaafs für dieselben in jedem Zeitelement dasselbe, so folgt nach S. 19 (No. 30) $c' = f't'$, $c'' = f''t''$ etc. Nehmen wir an, dafs die sämmtlichen Kräfte gleich lange Zeit wirksam gewesen sind, also $t' = t''$ etc., so folgt ferner, dafs die Geschwindigkeiten unter sich in jedem Augenblicke dasselbe Verhältnifs haben, und wenn man für die Geschwindigkeiten in den Gleichungen 61) die Werthe $f't$, $f''t$, $f'''t$ etc. substituirt, und durch t durchweg dividirt, so hat man:

$$63)\ \begin{cases} f' \cos\alpha_{,} + f'' \cos\alpha_{,,} + f''' \cos\alpha_{,,,} + \ldots = f_{,}, \\ f' \cos\beta_{,} + f'' \cos\beta_{,,} + f''' \cos\beta_{,,,} + \ldots = f_{,,}, \\ f' \cos\gamma_{,} + f'' \cos\gamma_{,,} + f''' \cos\gamma_{,,,} + \ldots = f_{,,,}, \end{cases}$$

und folglich das Aenderungsmaafs der Mittelkraft:

$$64)\ f = \sqrt{(f_{,}^2 + f_{,,}^2 + f_{,,,}^2)}.$$

Es drücken sich aber die Drucke, welche die Kräfte auf das Massenelement ausüben, aus durch:

$$dK' = dmf', \quad dK'' = dmf'' \text{ etc.}$$

Wenn man nun die obigen Gleichungen 63) mit dm multiplizirt und für dmf' etc. die Werthe dK' etc. setzt, so hat man:

$$65)\ \begin{cases} dK' \cos\alpha_{,} + dK'' \cos\alpha_{,,} + dK''' \cos\alpha_{,,,} + \ldots = dK_{,}, \\ dK' \cos\beta_{,} + dK'' \cos\beta_{,,} + dK''' \cos\beta_{,,,} + \ldots = dK_{,,}, \\ dK' \cos\gamma_{,} + dK'' \cos\gamma_{,,} + dK''' \cos\gamma_{,,,} + \ldots = dK_{,,,}, \end{cases}$$

und folglich der Mitteldruck:

$$66)\ dK = \sqrt{(dK_{,}^2 + dK_{,,}^2 + dK_{,,,}^2)}.$$

$$67)\ \cos\alpha = \frac{dK_{,}}{dK} = \frac{f_{,}}{f},\ \cos\beta = \frac{dK_{,,}}{dK} = \frac{f_{,,}}{f},\ \cos\gamma = \frac{dK_{,,,}}{dK} = \frac{f_{,,,}}{f}.$$

Hat man es mit veränderlich wirkenden Kräften zu thun, so ändert sich freilich f in jedem Zeitelement, man kann jedoch für die Dauer eines Zeitelements f als konstant ansehen, und versteht man unter f' f'' etc. die bestimmten gleichzeitigen Werthe, welche die Aenderungsmaafse in einem bestimmten Zeitelement besitzen, so gelten die obigen Gleichungen unter dieser Voraussetzung auch für veränderlich wirkende Kräfte; und dann ergeben sich durch jene Betrachtungen die Gesetze:

1) In jedem Zeitelement verhalten sich die Drucke, welche verschiedene Kräfte auf ein Massenelement ausüben, zu einander, wie die Geschwindigkeiten, welche die Kräfte dem Massenelement in diesem Augenblick ertheilen würden, falls sie frei wirkten.

2) Wenn man die Drucke ihrer Gröfse und Richtung nach durch Linien darstellt, so gilt das Gesetz, welches wir als Parallelepipedum resp. Parallelogramm der Kräfte und der Geschwindigkeiten bezeichnet haben, mit allen seinen Konsequenzen auch für die Drucke.

In dieser Gestalt nennen wir dies Gesetz das Prinzip des Parallelepipedums resp. des Parallelogramms der Drucke.

Bedingungen für das Gleichgewicht nach dem Prinzip der virtuellen Leistungen.

§ 34. Sind die Geschwindigkeiten in der Richtung aller dreier Axen gleichförmig, d. h. nach S. 16, wenn die Kräftesummen für die Richtungen aller dreier Axen im Gleichgewicht sind, so ist auch die mittle Geschwindigkeit gleichförmig, und folglich sind die Kräfte überhaupt im Gleichgewicht. Denn nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten ergiebt sich $dm.cdc = dmc_{,}dc_{,} + dmc_{,,}dc_{,,} + dmc_{,,,}dc_{,,,}$, und da die Geschwindigkeiten $c_{,}$, $c_{,,}$, $c_{,,,}$ konstant sind, so sind ihre Differentiale gleich Null, folglich ist die Summe ihrer virtuellen Arbeiten gleich Null, d. h. es ist auch die Arbeit der Mittelkraft gleich Null. Dasselbe findet statt, wenn die virtuellen Geschwindigkeiten $c_{,}$, $c_{,,}$, $c_{,,,}$ einzeln gleich Null sind.

Hieraus ergiebt sich als Bedingung des Gleichgewichts:

Sollen mehre Kräfte, deren Richtungslinien in verschiedenen Ebenen liegen, im Gleichgewicht sein, so müssen die Kräftesummen für drei zu einander normale Axen gleich Null sein.

Dieser Satz gilt auch umgekehrt.

Sind die sämmtlichen Kräfte im Gleichgewicht, so ist das Massenelement entweder in Ruhe, oder es bewegt sich in gerader Linie mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Im ersten Falle sind die Wegelemente jeder der drei Kräftesummen gleich Null, im andern Falle sind die Wegelemente in jedem Zeitelement konstant. Da in beiden Fällen $dc = fdt$ gleich Null ist, so folgt, da dt nicht Null sein kann, das Aenderungsmaafs $f = 0$; folglich sind die resultirenden Drucke in der Richtung jeder der drei Kräftesummen in beiden Fällen gleich Null.

Liegen die Richtungen der verschiedenen Kräfte alle in derselben Ebene, so gelten die obigen Sätze in der Weise, dafs man nur die Kräftesummen für zwei zu einander normale Axen in dieser Ebene in Betracht zu ziehen hat.

Substituirung gegebener Kräfte durch andere.

§ 35. Aus dem eben Vorgetragenen ziehen wir hier noch einige Folgerungen, die sich leicht einsehen lassen, und welche für die folgenden Betrachtungen von Interesse sind.

1) Sind mehre Kräfte, die auf ein Massenelement wirken, nicht im Gleichgewicht, und man läfst eine neue Kraft auf das Massenelement wirken, deren Leistungselement demjenigen der resultirenden Kraft gleich, aber entgegengesetzt ist, so tritt Gleichgewicht ein.

Dasselbe geschieht, wenn man auf das Massenelement anstatt der einen neuen Kraft, ein System von neuen Kräften wirken läfst, dessen Resultirende ein gleiches, aber entgegengesetztes Leistungselement hat, als die Resultirende des ersten Systems.

2) Sind mehre Kräfte an einem Massenelement im Gleichgewicht, so läfst sich jede von ihnen so auffassen, als ob sie eine Kraft sei, deren Leistung der resultirenden Kraft sämmtlicher übrigen Kräfte gleich und entgegengesetzt ist, oder als ob sie die resultirende Kraft eines Systemes von Kräften sei, dessen resultirende

Leistung der resultirenden Leistung sämmtlicher übrigen gegebenen Kräfte gleich und entgegengesetzt ist.

3) Wirkt ein System von Kräften auf ein Massenelement ein, und es erfolgt Bewegung, so läfst sich der Fall auch so ansehen, als wirke eine Kraft, welche gleich der resultirenden aller übrigen Kräfte ist, allein frei auf das System ein, während alle übrigen Kräfte einzeln durch Gegenkräfte, die ihnen gleich und entgegengesetzt sind, im Gleichgewicht gehalten werden. Sind aber die auf ein Massenelement wirkenden Kräfte sämmtlich im Gleichgewicht, so läfst sich die Sache auch so auffassen, als ob jede einzelne Kraft für sich durch eine gleiche und entgegengesetzte im Gleichgewicht gehalten werde. Wenn man nach den Gesetzen 1, 2 und 3 die Wirkung, welche eine gegebene Kraft, oder ein gegebenes System von Kräften auf ein Massenelement ausübt, hervorgebracht denkt durch eine andere Kraft, oder durch ein anderes System von Kräften, so sagt man, diese andere Kraft, oder dieses andere System werde der ersten Kraft, oder dem ersten System substituirt.

Aeufsere und innere Kräfte eines Massenelements.

§ 36. Aus dem letzten Satz (No. 3) des vorigen Paragraphen folgt, dafs wenn mehre Kräfte auf ein Massenelement einwirken, man sich die Sache so vorstellen könne, als ob jede einzelne Kraft nach ihrer Richtung auf das Massenelement einen Druck ausübe, welcher durch einen gleichen, aber entgegengesetzten Gegendruck aufgehoben wird; gleichviel ob das ganze System im Gleichgewicht oder in Bewegung ist. Diese Gegendrucke sind wir genöthigt wiederum der Wirkung von Kräften zuzuschreiben. Dergleichen Kräfte nennen wir Reaktionskräfte, auch wohl innere Kräfte des Massenelementes zum Unterschiede von den zuerst betrachteten Kräften, welche wir äufsere Kräfte, oder bewegende Kräfte nennen. Jenen Gegendruck, welchen eine äufsere Kraft hervorruft, nennen wir die Reaktion auch wohl den Widerstand des Massenelements. Die innern Kräfte eines Massenelements erscheinen uns stets nur im Zustande des Gleichgewichts; niemals sind sie fähig Bewegung hervorzurufen. Wir können ihr Vorhandensein nur als Hypothese hinstellen, als Folgerung aus den Ansichten, welche wir über die Wirkung der Kräfte aufgestellt haben; unserer direkten Wahrnehmung entziehen sie sich vollständig.

Aus den eben entwickelten Begriffen folgt:

wenn eine oder mehre Kräfte auf ein Massenelement einwirken, so entspricht stets jedem wirkenden Drucke eine gleich grofse, aber nach entgegengesetzter Richtung wirkende Reaktion.

Gleichung für die Bahn eines Massenelements.

§ 37. Die sämmtlichen auf ein Massenelement wirkenden Kräfte können wir in jedem Zeitelement auf drei Kräftesummen zurückführen, deren Richtungslinien stets parallel mit drei angenommenen, zu einander normalen und in verschiedenen Ebenen liegenden Axen bleiben (§ 32), indem wir dazu die Gleichungen 61) S. 35 benutzen.

Sind $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$ die Koordinaten eines Massenelements in Bezug auf dasselbe Axensystem, auf welches wir die ursprünglichen Kräfte zurückgeführt haben, und sind für die drei zu einander normalen Kräftesummen $c_{,}$, $c_{,,}$, $c_{,,,}$ die Geschwindigkeiten für irgend ein Zeitelement, so sind die Wege des Massenelements in der Richtung der Axen:

$$ds' = c_{,} dt, \quad ds'' = c_{,,} dt, \quad ds''' = c_{,,,} dt.$$

Diese Wege bilden das Wachsthum der Koordinaten, und bezeichnen wir die letzten mit x, y, z, so ist:

$$dx = ds' = c_{,} dt, \quad dy = ds'' = c_{,,} dt, \quad dz = ds''' = c_{,,,} dt.$$

Da aber die betrachteten Zeitelemente für sämmtliche Axen dieselben sind, so folgt, wenn wir dt aus diesen Ausdrücken entwikkeln, und die so gefundenen Werthe einander gleich setzen:

$$dt = \frac{dx}{c_{,}} = \frac{dy}{c_{,,}} = \frac{dz}{c_{,,,}},$$

folglich:

$$68) \left\{ \begin{aligned} dy &= dx \cdot \frac{c_{,,}}{c_{,}} \\ dz &= dx \cdot \frac{c_{,,,}}{c_{,}}, \end{aligned} \right.$$

und wenn man integrirt, und die Constante wie oben bezeichnet:

$$69) \left\{ \begin{aligned} y &= \int \frac{c_{,,}}{c_{,}} dx + a_{,,}, \\ z &= \int \frac{c_{,,,}}{c_{,}} dx + a_{,,,}. \end{aligned} \right.$$

Durch diese Gleichungen ist also der Weg des Massenelements bestimmt.

Geradlinige Bahn eines Massenelements.

§ 38. Die Gleichungen für den Weg des Massenelements zeigen, daſs wenn die Geschwindigkeiten $c_{\prime}$, $c_{\prime\prime}$, $c_{\prime\prime\prime}$ konstant sind, oder wenn nur ihr Verhältniſs konstant ist, der Weg eine gerade Linie wird. Die Geschwindigkeiten sind aber konstant, wenn sie gleichförmig sind, wenn also die einzelnen Kräftesummen sich im Zustande des Gleichgewichts befinden, und ihr Verhältniſs ist konstant, wenn entweder die einzelnen Kräfte konstant wirkende sind, oder, wenn zwar die einzelnen Kräfte veränderlich wirkende sind, aber doch so, daſs die Aenderungsmaaſse ihrer Kräftesummen nach den normalen Axen in jedem Augenblick ein konstantes Verhältniſs haben.

Im ersten Fall hat man $c_{\prime} = f_{\prime} t$, $c_{\prime\prime} = f_{\prime\prime} t$, $c_{\prime\prime\prime} = f_{\prime\prime\prime} t$, und da die Kräfte konstant wirken, so sind die Aenderungsmaaſse $f_{\prime}$, $f_{\prime\prime}$, $f_{\prime\prime\prime}$ konstant, folglich die Verhältnisse konstant.

Bezeichnet man diese konstanten Verhältnisse $\frac{f_{\prime\prime}}{f_{\prime}}$ mit q und $\frac{f_{\prime\prime\prime}}{f_{\prime}}$ mit p, so hat man für die Gleichung des Weges:

$$y = qx + a_{\prime\prime}$$
$$z = px + a_{\prime\prime\prime}.$$

Sind dagegen die Kräfte veränderlich wirkend, so hat man nach der Gleichung No. 26 (S. 18):

$$c_{\prime} = \Sigma f_{\prime} dt, \quad c_{\prime\prime} = \Sigma f_{\prime\prime} dt, \quad c_{\prime\prime\prime} = \Sigma f_{\prime\prime\prime} dt,$$

folglich:

$$\frac{c_{\prime\prime}}{c_{\prime}} = \frac{\Sigma f_{\prime\prime} . dt}{\Sigma f_{\prime} . dt} \text{ und } \frac{c_{\prime\prime\prime}}{c_{\prime}} = \frac{\Sigma f_{\prime\prime\prime} . dt}{\Sigma f_{\prime} . dt}.$$

Ist nun zwar $f_{\prime}$, $f_{\prime\prime}$, $f_{\prime\prime\prime}$ in jedem Augenblick veränderlich, aber doch so, daſs immer

$$\frac{f''}{f_{\prime}} = q, \quad \frac{f_{\prime\prime\prime}}{f_{\prime}} = p$$

ist, so hat man:

$$\frac{c_{\prime\prime}}{c_{\prime}} = \frac{\Sigma q f_{\prime} dt}{\Sigma f_{\prime} dt} = q \text{ und } \frac{c_{\prime\prime\prime}}{c_{\prime}} = \frac{\Sigma p f_{\prime} dt}{\Sigma f_{\prime} dt} = p,$$

und daher ebenfalls die Gleichung für die Bahn des Massenelements wie vorhin:

$$y = qx + a_{\prime\prime},$$
$$z = px + a_{\prime\prime\prime}.$$

In beiden Fällen ergiebt sich also die Gleichung der geraden Linie.

Hieraus folgt:

Wirken mehre Kräfte auf ein Massenelement ein, so kann es sich nur in drei Fällen in gerader Linie bewegen, nämlich:

a) wenn alle Kräfte konstant wirkende sind;

b) wenn die einzelnen Kräfte zwar veränderlich wirkende sind, aber doch so, dafs die Aenderungsmaafse der Kräftesummen nach drei zu einander normalen Axen sich stets in konstantem Verhältnifs zu einander ändern.

In diesen beiden Fällen erfolgt die resultirende Bewegung mit veränderter Geschwindigkeit.

c) wenn alle Kräfte im Gleichgewicht sind, und dann ist die Bewegung eine gleichförmige.

In allen andern Fällen bewegt sich das Massenelement in einer Kurve, und umgekehrt: Bewegt sich das Massenelement in einer Kurve, so findet keiner dieser drei Fälle statt.

Krummlinige Bahn eines Massenelements.

§ 39. Sind in den Gleichungen 69):

$$y = \int \frac{c_{\prime\prime}}{c_\prime} dx + a_{\prime\prime},$$

$$z = \int \frac{c_{\prime\prime\prime}}{c_\prime} dx + a_{\prime\prime\prime}$$

die Verhältnisse $\frac{c_{\prime\prime}}{c_\prime}$ und $\frac{c_{\prime\prime\prime}}{c_\prime}$ nicht konstant, so bewegt sich das Massenelement in einer Kurve. Sind die Verhältnisse in jedem Augenblick andere, so kann dies daher rühren, dafs entweder die Geschwindigkeiten $c_\prime$, $c_{\prime\prime}$, $c_{\prime\prime\prime}$ der drei Kräftesummen alle drei sich unabhängig von einander ändern, oder daher, dafs die Geschwindigkeiten sich nach einer oder nach zwei Axen gar nicht ändern, also gleichförmig sind, wohl aber nach der dritten, resp. nach den beiden andern Axen.

Hiernach ist die krummlinige Bewegung als das Resultat anzusehen:

a) entweder von drei Kräftesummen, welche unabhängig veränderlich sind,

b) oder von einer Kräftesumme, die im Gleichgewicht ist, und von zwei Kräftesummen, von welchen jede entweder konstant oder veränderlich wirkend sein kann;

c) oder endlich von zwei Kräftesummen, welche im Gleichgewicht sind, und von einer Kräftesumme, welche entweder konstant oder veränderlich wirkend ist.

Nach den auf S. 17 über die Entstehung der gleichförmigen Geschwindigkeit gemachten Bemerkungen läfst sich in den beiden unter b und c genannten Fällen die krummlinige Bewegung auch auffassen, als hervorgegangen aus der Wirkung dreier zu einander normalen Kräftesummen, von denen eine oder zwei momentan wirkend, die beiden anderen, resp. die dritte aber kontinuirlich, sei es konstant oder veränderlich wirkend, zu denken sind.

Bewegung in einer ebenen Kurve.

§ 40. Die Kurve, welche den Gleichungen No. 69 entspricht, ist im Allgemeinen eine Kurve von doppelter Krümmung; sie wird eine ebene Kurve, wenn entweder y oder z konstant wird, d. h. wenn die in der Richtung der einen Axe liegende Geschwindigkeit gleich Null ist. Für die Bewegung in einer ebenen Kurve haben wir also die Bedingungsgleichungen:

$$70)\quad \begin{cases} y = \int \frac{c_{\prime\prime}}{c_{\prime}}\, dx + a_{\prime\prime} \\ z = 0 \text{ oder } c_{\prime\prime\prime} = 0. \end{cases}$$

Die Bewegung in einer ebenen Kurve läfst sich also immer als das Resultat zweier Kräftesummen ansehen, deren Richtungen zu einander normal sind, und von welchen entweder die eine im Gleichgewicht, und die andere konstant resp. veränderlich wirkend, oder aber welche beide veränderlich wirkend zu denken sind.

Parabelbahn.

§ 41. Bewegt sich ein Massenelement unter dem Einflufs zweier Kräftesummen, deren Richtungen normal zu einander sind und von denen eine im Gleichgewicht ist, also eine gleichförmige Geschwindigkeit bedingt, die andere aber konstant wirkend ist, so ist die Bahn eine Parabel; denken wir nämlich, die gleichförmige Geschwindigkeit finde in der Axe der X statt, die ungleichförmige in der Axe der Y, und es sei $f_{\prime\prime}$ das Aenderungsmaafs der konstant wirkenden Kraft. Man hat sodann:

$$c_{\prime\prime} = f_{\prime\prime} t \text{ (No. 35. S. 20)},$$

worin t die Zeit bedeutet, welche seit der Einwirkung der Kraft verflossen ist. Diese Zeit ist aber dieselbe, während welcher in der Axe der X ein bestimmter Weg x mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $c_{,}$ durchlaufen ist, und sie findet sich nach No. 25. S. 17);

$$t = \frac{x}{c_{,}}.$$

Man hat also für die Gleichung der Kurve (No. 69):

$$y = \int \frac{c_{,,}}{c_{,}} dx + a_{,,} = \int \frac{f_{,,}t}{c_{,}} dx + a_{,,}$$

$$71)\quad y = \int \frac{f_{,,}x}{c_{,}^2} dx = \tfrac{1}{2} \frac{f_{,,}}{c_{,}^2} . x^2 + a_{,,},$$

welches die Gleichung der **Parabel** ist.

Sind die **Kräftesummen nicht normal** zu einander, schliefsen ihre Richtungen vielmehr den Winkel α ein, so kann man sie immer auf zwei zu einander **normale** Kräftesummen zurückführen. Nimmt man die Richtung der einen dieser normalen Kräftesummen mit der Richtung der konstant wirkenden Kraft zusammenfallend, so läfst sich die gleichförmige Geschwindigkeit der andern Kräftesumme $c_{,}$ in zwei andre Geschwindigkeiten zerlegen (No. 59. S. 34), deren eine in der Richtung der XAxe liegt, und gleich $c_{,} \sin\alpha$ ist, die andre in der Richtung der YAxe liegt und gleich $c_{,} \cos\alpha$ ist. Man hat sodann die Geschwindigkeitssumme in der YAxe (No. 60. S. 34):

$$c_{,,} = c_{,} \cos\alpha + f_{,,} t,$$

und nach der obigen Darstellung $t = \frac{x}{c_{,} \sin\alpha}$ setzt man nun in der allgemeinen Gleichung für die Kurve:

$$y = \int \frac{c_{,,}}{c_{,}} dx + a_{,,},$$

für $c_{,,}$ den Werth $c_{,} \cos\alpha + f_{,,} t$ und für $c_{,}$ den Werth $c_{,} \sin\alpha$; sodann aber für t den eben berechneten Werth, so ergiebt sich leicht:

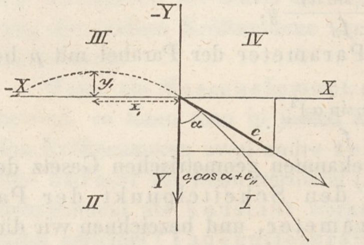
$$72)\quad \begin{cases} y = \int \left(\operatorname{cotg}\alpha + \dfrac{f_{,,}}{(c_{,} \sin\alpha)^2} . x\right) dx + a_{,,} \\ y = x . \operatorname{cotg}\alpha + x^2 . \dfrac{f_{,,}}{2(c_{,} \sin\alpha)^2} + a_{,,}. \end{cases}$$

Diese **Kurve** ist aber ebenfalls eine **Parabel**. Dies läfst sich auf folgende Weise zeigen. Zunächst finden wir einen **Wendepunkt** der Kurve, wenn y ein **Maximum** oder ein **Minimum** wird, und nach bekannten Regeln haben wir zur Bestimmung dieses **Wendepunkts** zu setzen:

$$dy = \operatorname{cotg}\alpha + \frac{f_{,,}}{(c' \sin\alpha)^2} x = 0,$$

daraus folgt:

$$73)\quad x_{,} = -\frac{c_{,}^2}{f_{,,}} . \sin\alpha . \cos\alpha . = -\tfrac{1}{2} \frac{c_{,}^2}{f_{,,}} . \sin 2\alpha.$$



Da nun die zweite Ableitung immer **positiv** ist, so lange $f_{,,}$ als positiv gedacht wird, weil nämlich das Quadrat im Nenner immer positiv sein mufs, so entspricht der eben bestimmte Werth von x einem **Minimum**, also einem negativen Werth von y; es wird also der Wendepunkt im III. oder IV. Quadranten liegen. Er liegt im III. Quadranten, wenn das zugehörige x **negativ** ist, und dies tritt ein, nach 73), wenn α ein **spitzer** Winkel ist. Dagegen wird x positiv, wenn α ein stumpfer Wtnkel, also $\cos \alpha$ negativ ist, und dann liegt der Wendepunkt im IV. Quadranten.

Setzen wir den Werth von x aus 73 in 72, so erhalten wir für den Wendepunkt:

$$74)\quad y_{,} = -\tfrac{1}{2}\frac{c_{,}^{2}}{f_{,,}}\cos.\alpha^2 + a_{,,}.$$

Verlegen wir nun den Anfangspunkt der Koordinaten in den Wendepunkt der Kurve, so ist zunächst $a_{,,}. = 0$ und nennen wir die neuen Koordinaten y' und x', so ist offenbar $x = x' - \frac{c_{,}^{2}}{f_{,,}} \sin \alpha \,.\, \cos \alpha$ (nach No. 73) und wenn wir diesen Werth in die Gleichung 72) einsetzen, so geht dieselbe nach einer leichten Rechnung über in:

$$75)\quad y' = \tfrac{1}{2}\frac{f_{,,}}{(c_{,} \sin \alpha)^2}\,.\,x'^2,$$

welches wieder die Gleichung der **Parabel** ist; dieselbe geht in die Gleichung No. 71 über, wenn α gleich einem **Rechten** ist.

Zu bemerken ist hier noch, dafs die **konkave** Seite der Parabel immer der Axe der Y, oder derjenigen Axe zugekehrt ist, welche der Richtung der **konstant** wirkenden Kräftesumme entspricht.

Da endlich die **gleichförmige** Geschwindigkeit nach S. 17 als das Resultat einer **momentan** wirkenden Kraft aufgefafst werden kann, so läfst sich die **Parabelbewegung** immer **betrachten als das Resultat einer momentan wirkenden Kräftesumme und einer konstant wirkenden Kräftesumme, deren Richtungen einen Winkel mit einander bilden.**

Krümmungskreis der Bahn, — Normalkraft, Tangentialkraft.

§ 42. Die Gleichung 75) läfst sich auch folgendermaafsen schreiben:

$$x^2 = \frac{2(c_{,} \sin \alpha)^2}{f_{,,}} y,$$

und folglich ist, wenn wir den Parameter der Parabel mit p bezeichnen:

$$p = \frac{2(c_{,} \sin \alpha)^2}{f_{,,}}.$$

Nun ist aber nach einem bekannten geometrischen Gesetz der Krümmungshalbmesser für den Scheitelpunkt der Parabel gleich dem halben Parameter, und bezeichnen wir diesen Krümmungshalbmesser mit r, so folgt:

$$76)\quad r = \tfrac{1}{2} p = \frac{(c_{,} \sin \alpha)^2}{f_{,,}}.$$

Dieser Krümmungshalbmesser liegt aber in der Axe der Y, d. h. in der Richtung der konstant wirkenden Kräftesumme.

Nun ist klar, dafs wir jeden beliebigen Kreis als Krümmungskreis des Scheitels einer Parabel ansehen können, und dafs für jedes Bogenelement eines Kreises, welches von einem Massenelement durchlaufen wird, immer die obige Gleichung gelten mufs, sobald wir unter $f_{,,}$ das Aenderungsmaafs einer in der Richtung des Radius wirkenden konstanten Kraft, unter $c_{,}$ eine gleichförmige Geschwindigkeit, welche mit der Richtung der konstanten Kraft, oder mit der Richtung des Radius den Winkel α bildet, verstehen.

Ebenso leicht ist es einzusehen, dafs wenn ein Massenelement sich in einer beliebigen Kurve bewegt, und wir denken für irgend ein Element der Kurve den Krümmungskreis: die obige Gleichung auch für dieses Kurvenelement gelten mufs. Hieraus folgt aber folgendes wichtige Gesetz:

> Bewegt sich ein Massenelement in einer beliebigen Kurve, so läfst sich für jedes Element der Bahn die Bewegung als das Resultat zweier Kräftesummen ansehen, von denen die eine nach der Richtung des Krümmungshalbmessers für dieses Bahnelement als konstant wirkend, die andre aber als im Gleichgewicht, folglich eine gleichförmige Geschwindigkeit bedingend, und mit der ersten einen beliebigen Winkel bildend, gedacht werden mufs.

Nimmt man den Winkel, welchen die beiden Kräftesummen mit einander bilden, gleich einem Rechten, und beachtet man, dafs die Richtung des Krümmungsradius eines Bahnelementes immer mit der Normalen für dieses Element zusammenfällt, so ist die Richtung der andern Kräftesumme tangential, und es folgt aus dieser Betrachtung:

Wenn ein Massenelement sich in einer beliebigen Kurve bewegt, so kann man in jedem Element der Bahn für die wirkenden Kräftesummen zwei andre substituiren (§38), von denen die eine normal zur Bahn gerichtet (Normalkraft) immer für dieses Bahnelement als konstant wirkend, die andre tangential zur Bahn gerichtet (Tangentialkraft) als im Gleichgewicht befindlich betrachtet werden mufs.

Die Gleichung 76):

$$r = \frac{(c_{\prime} \sin \alpha)^2}{f_{\prime\prime}}$$

gilt hiernach ganz allgemein, sobald man unter r den Krümmungshalbmesser in irgend einem Element der Kurve, unter $f_{\prime\prime}$ das Aenderungsmaafs der Normalkraft, unter $c_{\prime}$ die gleichförmige Seitengeschwindigkeit und unter α den Winkel versteht, welchen diese gleichförmige Seitengeschwindigkeit mit der Normale der Kurve bildet. Wird die gleichförmige Seitengeschwindigkeit tangential genommen, so ist $\alpha = 90$ Grad $\sin \alpha = 1$, und man hat:

$$77) \left\{ \begin{aligned} r &= \frac{c_{\prime}^2}{f''} \\ f_{\prime\prime} &= \frac{c_{\prime}^2}{r}. \end{aligned} \right.$$

Da aber die Tangente für ein Kurvenelement mit diesem zusammenfällt, so kann man unter $c_{\prime}$ auch die Geschwindigkeit in der Richtung der Bahn, oder die Geschwindigkeit, mit welcher das Massenelement in dem betrachteten Augenblick sich eben bewegt verstehen.

Centripetalkraft und Centrifugalkraft.

§ 43. Aus den Untersuchungen des vorigen Paragraphen folgt, dafs wenn ein Massenelement sich in einer beliebigen Kurve bewegt, man immer das Aenderungsmaafs $f_{\prime\prime}$ der Normalkraft nach der Gleichung 77) bestimmen kann, sobald man die Geschwindigkeit des Massenelements und den Krümmungshalbmesser der Bahn kennt. Diese Normalkraft äufsert auf das Massenelement einen Druck in der Richtung nach dem Mittelpunkt des Krümmungskreises, und diesem Druck mufs eine gleich grofse, aber entgegengesetzt wirkende Reaktion (§ 36) entsprechen. Man nennt daher auch wohl die Normalkraft, welche das Bestreben darstellt, das Massenelement dem Mittelpunkt des Krümmungskreises zu nähern, die Centripetalkraft, die gleich grofse, aber entgegengesetzte Reaktion dagegen, welche das Bestreben ausdrückt, das Massenelement von dem Mittelpunkt des Krümmungskreises zu entfernen, die Centrifugalkraft (Fliehkraft, Schwungkraft). Nennt man dF das Werthelement einer von beiden, so drücken sich offenbar beide aus (nach Gleichung 76 und 4) durch:

$$78)\ dF = dm \,.\, f_{u} = dm \,.\, \frac{c_{,}^{2}}{r} = \frac{dG}{g} \,.\, \frac{c_{,}^{2}}{r}.$$

Bezeichnet man eine von beiden als positiv, so ist die andere negativ zu bezeichnen. Auch ist es klar, dafs es gleichgiltig bleibt, welchen von beiden Drucken man als den wirkenden, und welchen man als die Reaktion ansehen will; in manchen Fällen erleichtert es die Anschauung, wenn man die Centripetalkraft als Reaktion der Centrifugalkraft betrachtet.

Kreisbewegung.

§ 44. Die Gleichung 77):

$$f_{u} = \frac{c_{,}^{2}}{r}$$

zeigt, dafs das Aenderungsmaafs der Centrifugalkraft in jedem Augenblick konstant ist, wenn $\frac{c_{,}^{2}}{r}$ konstant ist, also unter andern, wenn $c_{,}$ konstant und r konstant ist. Der Krümmungshalbmesser r ist nur konstant, wenn die Kurve, in welcher das Massenelement sich bewegt, ein Kreis ist. Bewegt sich also ein Massenelement in einem Kreise, und zwar so, dafs die Geschwindigkeit in der Richtung der Bahn in jedem Augenblick konstant ist, so ist auch das Aenderungsmaafs der Normalkraft, und diese selbst konstant, und umgekehrt:

Ist das Aenderungsmaafs der Normalkraft konstant, und bewegt sich ein Massenelement in einem Kreise, so ist die Geschwindigkeit in der Richtung der Bahn in jedem Augenblick konstant.

Aus diesen Gesetzen lassen sich noch mancherlei Folgerungen leicht herleiten.

Die Bewegung im Kreise kommt bei Maschinen sehr häufig vor. Man bezeichnet sie gewöhnlich als Rotationsbewegung, oder als rotirende Bewegung, pflegt aber diese Benennungen allgemeiner auch wohl auf die Bewegungen in einer geschlossenen Kurve überhaupt auszudehnen.

Bewegt sich ein Massenelement in einem Kreise, so dafs die Tangential-Geschwindigkeit in jedem Punkte der Bahn dieselbe ist, so nennt man die Bewegung eine gleichförmig rotirende, im entgegengesetzten Falle eine ungleichförmig rotirende.

Die gleichförmig rotirende Bewegung ist also als das Resultat einer konstant wirkenden Normalkraft, und einer im Gleichgewicht befindlichen Tangentialkraft anzusehen.

Ist dagegen bei der Bewegung eines Massenelements in einem Kreise die Normalkraft veränderlich wirkend, d. h. ist das Aenderungsmaafs $f_{\prime\prime}$ derselben für verschiedene Bahnelemente verschieden grofs (was jedoch nicht ausschliefst, dafs es, wie oben nachgewiesen worden, während der Zeitdauer, welche das Durchlaufen jedes einzelnen Bahnelementes erfordert, als konstant betrachtet werden könne), so ist auch die Geschwindigkeit in der Richtung der Bahn veränderlich.

Winkelgeschwindigkeit, Peripherie-Geschwindigkeit.

§ 45. Bewegt sich ein Massenelement in einem Kreise, so können wir uns den Radius dieses Kreises als mathematische Linie ohne Masse, und mit dem Massenelement gemeinschaftlich rotirend denken, ohne dafs dadurch in den Bewegungsverhältnissen des Massenelements irgend etwas geändert wird.

Ist in irgend einem Punkte der Bahn $c_{\prime} = \frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit des Massenelements, und $v = \frac{ds'}{dt}$ die Geschwindigkeit irgend eines andern Punktes dieses Radius, welcher den Abstand ϱ vom Mittelpunkt hat, so sind offenbar die in gleichen Zeitelementen von dem Massenelement und von jenem Punkt zurückgelegte Wege gleich den Längen der gleichzeitig durchlaufenen Bogenelemente, und da diese, wie leicht ersichtlich, sich wie die Radien verhalten, so hat man:

$$ds : ds' = r : \varrho$$

und folglich auch $c_{\prime} : v = r : \varrho$,

oder:

$$c_{\prime} = v \frac{r}{\varrho}.$$

Man kann also die Geschwindigkeit des Massenelements finden, wenn man den Radius r desselben und aufserdem die Geschwindigkeit v irgend eines Punktes in diesem Radius und den Abstand ϱ dieses Punkts vom Mittelpunkt des Kreises kennt. Nimmt man diesen Punkt so an, dafs sein Abstand ϱ gleich der Längeneinheit ist, so nennt man die Geschwindigkeit desselben in Bezug auf das Massenelement die Winkel-Geschwindigkeit, und bezeichnet man dieselbe mit w, so hat man:

$$c_{,} = w\,r\,; \quad w = \frac{c_{,}}{r}\,.$$

Es ist also unter der Winkel-Geschwindigkeit eines rotirenden Massenelements diejenige Geschwindigkeit zu verstehen, welche ein Punkt, der in dem Abstand 1 von dem Mittelpunkt des Kreises mit dem Massenelement gemeinschaftlich rotirt, besitzt. Im Gegensatz hierzu pflegt man die Geschwindigkeit $c_{,}$, welche das Massenelement in der Richtung seiner Bahn hat, die Peripherie-Geschwindigkeit des Massenelements zu nennen.

Führen wir in die Gleichung 78) die Winkel-Geschwindigkeit w ein, so ergiebt sich für die Centrifugalkraft:

$$79)\quad \left\{\begin{aligned} dF &= dm\,.\,f_{,,} = dm\,\frac{c_{,}^{\,2}}{r} = dm\,.\,w^2\,.\,r \\ &= \frac{dG}{g}\,.\,\frac{c_{,}^{\,2}}{r} = \frac{dG}{g}\,w^2\,.\,r \\ r &= \frac{dm}{dF}\,.\,c_{,}^{\,2} = \frac{dF}{dm}\,.\,\frac{1}{w^2} = \frac{f_{,,}}{w^2} \\ f_{,,} &= \frac{dF}{dm} = w\,.\,c_{,} \end{aligned}\right.$$

Bewegt sich ein Massenelement in einem Kreise, so nennt man den Weg, welchen dasselbe zurücklegt, in dem es einmal die Peripherie des Kreises durchläuft, eine Umdrehung. Ist die Bewegung eine gleichförmig rotirende, so ist offenbar die Zeitdauer einer Umdrehung nach No. 25. S. 17:

$$t = \frac{s}{c} = \frac{2\pi r}{c_{,}} = \frac{2\pi}{w}\,.$$

Macht das Massenelement in einer Minute n Umdrehungen, so ist andrerseits auch:

$$t = \frac{60}{n}\,,$$

aus diesen beiden Ausdrücken ergeben sich folgende Formeln:

$$80)\left\{\begin{aligned} t &= \frac{60}{n} = \frac{2\pi r}{c_{\prime}} = \frac{2\pi}{w} \\ n &= \frac{60}{t} = \frac{60 c_{\prime}}{2\pi r} = \frac{60 w}{2\pi} = 9{,}5493\,\frac{c_{\prime}}{r} = 9{,}5493\,w \\ c_{\prime} &= \frac{2\pi r}{t} = \frac{2\pi r\,.\,n}{60} = wr = 0{,}1047\,rn \\ r &= \frac{c_{\prime} t}{2\pi} = \frac{60}{2\pi}\,.\,\frac{c_{\prime}}{n} = \frac{c_{\prime}}{w} = 9{,}5493\,\frac{c_{\prime}}{n} \\ w &= \frac{2\pi}{t} = \frac{2\pi}{60}\,.\,n = \frac{c_{\prime}}{r} = 0{,}1047\,n. \end{aligned}\right.$$

In diesen Formeln bedeutet:

t die Zeitdauer einer Umdrehung in Sekunden,
n die Anzahl der Umdrehungen in einer Minute,
$c_{\prime}$ die Peripherie-Geschwindigkeit,
r den Halbmesser des Kreises, in welchen sich das Massenelement bewegt,
w die Winkel-Geschwindigkeit,
$c_{\prime}$, r, w sind in einerlei Maafseinheit zu nehmen; die Zeiteinheit ist die Sekunde.

Ist die Bewegung nicht gleichförmig rotirend, so gelten obige Formeln noch für die mittlen Werthe.

Aus den Formeln 80 lassen sich, indem man die Werthe für die Geschwindigkeit $c_{\prime}$ in die Formeln 53. Seite 28 einführt, folgende für den praktischen Gebrauch bequeme Formeln herleiten (die Zahlenwerthe sind abgerundet):

$$81)\left\{\begin{aligned} Kr &= 4868\,\frac{N}{n} \\ \sqrt{Kr} &= 70\sqrt{\frac{N}{n}} \\ \sqrt[3]{Kr} &= 17\sqrt[3]{\frac{N}{n}}, \end{aligned}\right.$$

in welchen Formeln bezeichnet:

K den Druck in der Richtung der Peripherie in Pfunden,
r den Abstand dieses Druckes von der Drehaxe in Fufsen,
N die Anzahl der wirksamen Pferdekräfte,
n die Anzahl der Umdrehungen in einer Minute.

Nimmt man K in Kilogrammes, r in Mètres, so hat man:

$$81\,a)\begin{cases} Kr = 718\,\dfrac{N}{n} \\ \sqrt{Kr} = 27\sqrt{\dfrac{N}{n}} \\ \sqrt[3]{Kr} = \;\;9\sqrt[3]{\dfrac{N}{n}}. \end{cases}$$

Prinzip der virtuellen und reellen Wege.

§ 46. Denken wir uns ein Massenelement, auf welches eine beliebige Anzahl von Kräften einwirkt, deren Drucke in irgend einem Augenblick die Werthe dK', dK''.... haben. Denken wir ferner ein ganz beliebiges Axensystem so, daſs der Durchschnittspunkt der Axen in das Massenelement fällt, und lassen die früher eingeführten Bezeichnungen gelten, so ist nach Gleichung 65. S. 37 der resultirende Druck in der Richtung der ersten Axe:

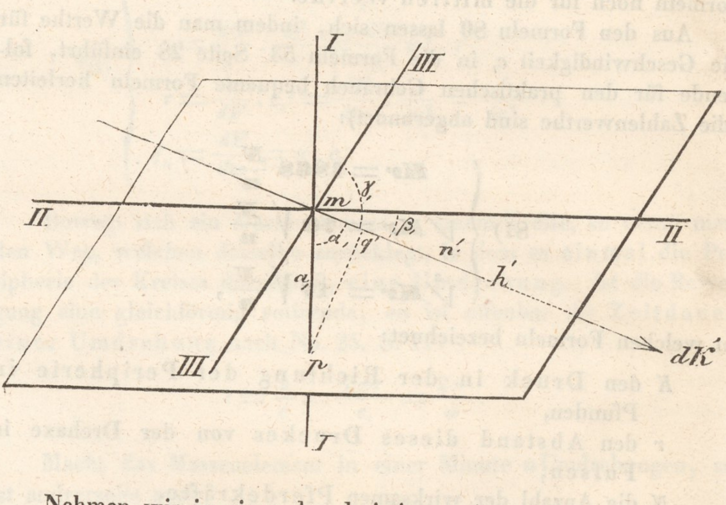
$$dK_{\prime} = \Sigma(dK'\,.\cos\alpha_{\prime}),$$

in der Richtung der zweiten Axe:

$$dK_{\prime\prime} = \Sigma(dK'\cos\beta_{\prime}),$$

in der Richtung der dritten Axe:

$$dK_{\prime\prime\prime} = \Sigma(dK'\,.\cos\gamma_{\prime}).$$



Nehmen wir in einer der drei Axen einen beliebigen Punkt p, dessen Abstand von dem Massenelement $pm = a_{\prime}$ sei, projiciren wir diesen Abstand auf die Richtung jeder Kraft, indem wir die Normalen pq', pq'' *).... ziehen, und nehmen wir die Projektionen von $a_{,}$ auf die Richtung der einzelnen Kräfte a', a'', a''' etc., so ist offenbar:

$$\cos \alpha_{,} = \frac{mq'}{mp} = \frac{a'}{a_{,}},$$

und man hat daher:

$$dK_{,} = \Sigma\left(dK' \cdot \frac{a'}{a_{,}}\right),$$

folglich, da der Nenner $a_{,}$ allen Summanden rechts gemeinschaftlich ist:

$$82)\quad dK_{,} \cdot a_{,} = \Sigma\,(dK' \cdot a').$$

In Bezug auf die beiden andern Axen würde sich für einen beliebigen Punkt derselben, dessen Abstand vom Massenelement $b_{,}$ beziehlich $e_{,}$ sei, nachweisen lassen:

$$82\text{a})\quad \begin{cases} dK_{,,} \cdot b_{,} = \Sigma(dK'b') \\ dK_{,,,} \cdot e_{,} = \Sigma(dK'e'). \end{cases}$$

Denken wir eine Ebene durch den Punkt p normal zur Axe mp, und daher parallel mit der Ebene, in welcher die beiden andern Axen liegen; es mögen die Richtungen der verschiedenen Kräfte diese Ebene in den Punkten h', h'' ... etc. schneiden, und es sei $mh' = n'$, $mh'' = n''$ etc., so ist:

$$\cos \alpha_{,} = \frac{mp}{mh'} = \frac{a_{,}}{n'},$$

folglich:

$$dK_{,} = \Sigma\,(dK' . \cos \alpha_{,}) = \Sigma\left(\frac{dK}{n'} \cdot a_{,}\right),$$

und da wieder $a_{,}$ allen Summanden gemeinschaftlich ist, so folgt:

$$83)\quad \left\{ \frac{dK_{,}}{a_{,}} = \Sigma\left(\frac{dK'}{n'}\right). \right.$$

Ein ähnliches Gesetz läfst sich für die beiden andern Axen nachweisen, und wenn p', p''.... und q', q''.... die Entfernungen von dem Massenelement bezeichnen, in welchen die Richtungen der Drucke dK', dK''.... zwei andere Ebenen schneiden, von denen je eine normal ist auf je einer der beiden andern Axen, so hat man auch:

$$83\text{a})\quad \begin{cases} \dfrac{dK_{,,}}{b_{,}} = \Sigma\left(\dfrac{dK'}{p'}\right) \\ \dfrac{dK_{,,,}}{e_{,}} = \Sigma\left(\dfrac{dK'}{q'}\right). \end{cases}$$

Nun ist p (in der Figur) ein **beliebiger** Punkt einer der drei

---

*) In der Figur ist nur eine Kraft dK' ihrer Richtung nach gezeichnet, um nicht durch viele Linien das Bild undeutlich zu machen; es gelten natürlich für alle andern Kraftrichtungen dieselben Beziehungen, welche für diese eine gelten.

Axen; es ist aber auch das angenommene Axensystem ein beliebiges, und folglich, da man durch jeden Punkt im Raume und durch das Massenelement immer eine gerade Linie legen, diese aber als Axe eines Axensystems ansehen kann, so gilt die oben bewiesene Gleichung 82) für jeden beliebigen Punkt, der aufserhalb des Massenelements liegt, und da ferner jede Ebene normal sein kann, zu einer entsprechenden, durch das Massenelement gedachten Axe, so gilt die Gleichung 83) für jede beliebige Ebene.

Die Entfernung des Massenelementes von dem Durchschnittspunkte einer Kraftrichtung mit einer angenommenen Ebene wollen wir den **reellen Weg** der Kraft für diese Ebene nennen.

Denken wir uns einen Punkt in einem beliebigen Abstande von dem Massenelement, und projiciren wir diesen Abstand auf die Richtung einer auf das Massenelement wirkenden Kraft, so nennen wir die Projektion den **virtuellen** Weg der Kraft in Bezug auf den Punkt (analog der Bezeichnung in § 27, doch nicht damit zu verwechseln).

Zerlegen wir sämmtliche Drucke nach drei auf einander normale Axen, deren Durchschnittspunkt im Massenelement liegt, und von denen eine durch einen angenommenen Punkt geht, so nennen wir die Summe der Drucke für diese letztgenannte Axe (S. 37) auch wohl den resultirenden Druck für den gedachten Punkt. Legen wir durch den angenommenen Punkt eine Ebene, welche normal ist zum Abstande des Punkts von dem Massenelement, so wollen wir den resultirenden Druck für den gedachten Punkt auch als „Normaldruck für diese Ebene“ bezeichnen.

Nach diesen Erklärungen können wir die Gesetze, welche die Gleichungen 82 und 83 enthalten, folgendermaafsen ausdrücken:

> Wirken beliebig viele Kräfte auf ein Massenelement, so ist für jeden beliebigen Punkt aufserhalb des Massenelements in irgend einem Augenblick das Produkt aus dem resultirenden Druck für diesen Punkt in den Abstand des Punkts von dem Massenelement gleich der Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man den Druck jeder einzelnen Kraft mit ihrem virtuellen Wege in Bezug auf den angenommenen Punkt multiplizirt, und es ist ferner für jede beliebige Ebene der Quotient aus dem Normaldruck für

diese Ebene durch den normalen Abstand derselben von dem Massenelement gleich der Summe der Quotienten, welche gebildet werden, indem man jeden einzelnen Druck durch seinen reellen Weg in Bezug auf die Ebene dividirt.

Dieses Gesetz wollen wir das Prinzip der virtuellen und reellen Wege nennen. Wir haben dasselbe hier für den allgemeinsten Fall entwickelt, und es bleibt nur übrig, daraus Folgerungen für spezielle Anwendungen zu ziehen.

Anwendung des Prinzips der virtuellen und reellen Wege auf die resultirende Kraft, und auf die Normalkraft bei der Bewegung in einer beliebigen Kurve.

§ 47. Nach § 35. No. 3 (S. 39) kann man für die Wirkung der einzelnen Kräfte diejenige ihrer Resultirenden substituiren. Für den im vorigen Paragraphen betrachteten Fall würde man offenbar haben, wenn man den virtuellen Weg der Resultirenden in Bezug auf den gewählten Punkt mit a, den reellen Weg mit n bezeichnet:

$$84) \left\{ \begin{array}{l} dK_{\prime} a_{\prime} = dK \,.\, a = \Sigma(dK' a') \\ \dfrac{dK_{\prime}}{a_{\prime}} = \dfrac{dK}{n} = \Sigma\left(\dfrac{dK'}{n'}\right). \end{array} \right.$$

Die Gesetze dieser beiden Gleichungen lassen sich ähnlich wie die der Gleichungen 82) und 83) in Worten ausdrücken, nämlich so:

Wirken beliebig viele Kräfte auf ein Massenelement, und man denkt irgend einen Punkt aufserhalb des Massenelements, projicirt den Abstand dieses Punkts auf die Richtung jeder einzelnen Kraft und auch auf die Richtung der Resultirenden sämmtlicher Kräfte, so ist das Produkt aus dem resultirenden Druck in die Projektion jenes Abstands auf die Richtung der Resultirenden gleich der Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man jeden einzelnen Druck mit der Projektion jenes Abstandes auf seine Richtung multiplizirt. Aufserdem ist der Quotient aus dem resultirenden Druck durch seinen reellen Weg in Bezug auf eine beliebige Ebene gleich der Summe der Quotienten, welche gebildet werden, indem man jeden einzelnen Druck durch seinen reellen Weg in Bezug auf dieselbe Ebene dividirt.

Liegt der gewählte Punkt in der Richtung der Resultirenden, so ist der resultirende Druck für diesen Punkt offenbar der Mitteldruck sämmtlicher Kräfte, folglich $dK_{\prime} = dK$; die Drucke nach den beiden andern Axen, welche normal zu der gewählten Richtung zu denken sind, würden dann zufolge der Gleichung 67) gleich Null sein, insofern die Winkel β und γ gleich 90 Grad sind, und man hat also für diesen Fall die Bedingungsgleichungen:

$$85)\quad \begin{cases} dK \,.\, a_{\prime} = \Sigma(dK_{\prime}\, a') \\ \Sigma(dK'\, b') = 0 \\ \Sigma(dK'\, e') = 0, \end{cases}$$

oder;

$$86)\quad \begin{cases} \dfrac{dK}{a_{\prime}} = \Sigma\left(\dfrac{dK'}{n'}\right) \\ \Sigma\,\dfrac{dK'}{p'} = 0 \\ \Sigma\,\dfrac{dK'}{q'} = 0, \end{cases}$$

wenn p' und q' die reellen Wege in Bezug auf zwei Ebenen bezeichnen, welche zu je einer der beiden andern Axen normal, oder, was dasselbe heifst, welche mit der Richtung der Resultirenden parallel und unter sich normal sind.

Bewegt sich ein Massenelement in einer beliebigen Kurve, so ist in Folge des Gesetzes in § 42. S. 46 in jedem Augenblicke der Druck in der Richtung der Normalen als konstant wirkend, derjenige in der Richtung der Tangente als im Gleichgewicht befindlich, anzusehen. Zerlegt man in irgend einem Augenblick die sämmtlichen auf das Massenelement wirkenden Drucke nach drei Axen, von denen die eine (die erste) mit der Richtung des Krümmungshalbmessers zusammenfällt, so müssen die beiden andern in einer Ebene liegen, welche zu dem Krümmungshalbmesser normal ist, folglich die Kurve berührt; die Resultirende aus den beiden Kräftesummen, welche in dieser Ebene liegen, giebt die Leistung in der Richtung der Tangente, und da diese gleich Null sein soll, so mufs auch nach § 34 (S. 38) der Druck in der Richtung jeder dieser beiden Axen gleich Null sein. Man hat daher auch für diesen Fall die Gleichungen 85 und 86 in Geltung, wenn

dK den Druck der Normalkraft,

$a_{\prime}$ den Abstand eines beliebigen Punktes auf der Normalen zur Kurve von dem Massenelement,

$a', a'' \dots$ die Projektion dieses Abstandes auf die Richtung der verschiedenen Kräfte,

$b' b'' \ldots$ und $e' e''$ die Projektionen der Abstände zweier Punkte, die in der Berührungsebene der Kurve in je einer von zwei sich im Berührungspunkt rechtwinklig schneidenden Axen liegen, auf die Richtung der verschiedenen Kräfte,

$n' n'' \ldots$ die reellen Wege der verschiedenen Kräfte in Bezug auf eine Ebene, die im Abstande $a_{,}$ zur Richtung des Krümmungshalbmessers normal, also mit der Berührungsebene parallel ist,

$p' p'' \ldots$ und $q' q'' \ldots$ die reellen Wege der verschiedenen Kräfte in Bezug auf je zwei zu einander normale und mit dem Krümmungshalbmesser parallele Ebenen

bezeichnen.

Anwendung des Prinzips der virtuellen und reellen Wege auf den Zustand des Gleichgewichts.

§ 48. Sind beliebig viele Kräfte, welche auf ein Massenelement wirken, im Gleichgewicht, und wir denken ein beliebiges Axensystem, dessen Durchschnittspunkt mit dem Massenelement zusammenfällt, so sind die resultirenden Drucke für jede der drei Axen einzeln gleich Null (§ 34. S. 38), es ist also:

$$dK_{,} = 0; \quad dK_{,,} = 0; \quad dK_{,,,} = 0;$$

und es folgt daher für den Zustand des Gleichgewichts nach Gleichung 82 und 83):

$$87) \begin{cases} \Sigma(dK' a') = 0 \\ \Sigma(dK' b') = 0 \\ \Sigma(dK' e') = 0. \end{cases}$$

$$88) \begin{cases} \Sigma\left(\frac{dK'}{n'}\right) = 0 \\ \Sigma\left(\frac{dK'}{p'}\right) = 0 \\ \Sigma\left(\frac{dK'}{q'}\right) = 0. \end{cases}$$

Hierin liegen folgende Sätze:

1) Sind beliebig viele Kräfte, welche auf ein Massenelement wirken, im Gleichgewicht, und man nimmt einen beliebigen Punkt im Raume an, projicirt den Abstand desselben von dem Massenelement auf die Richtung jeder einzelnen Kraft, so ist die Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man den Druck

jeder Kraft mit der Projektion jenes Abstandes auf ihre Richtung multiplizirt, gleich Null.

2) Sind beliebig viele Kräfte, welche auf ein Massenelement wirken, im Gleichgewicht, und man denkt eine beliebige Ebene im Raum, so ist die Summe der Quotienten, welche gebildet werden, indem man den Druck jeder Kraft durch ihren reellen Weg in Bezug auf diese Ebene dividirt, gleich Null.

Diese Sätze gelten auch umgekehrt.

Wenn nämlich mehre Kräfte auf ein Massenelement wirken und es ist:

entweder für jeden beliebigen Punkt im Raume die Summe der Produkte aus dem Druck jeder Kraft in die Projektion des Abstandes jenes Punktes von dem Massenelement auf die Richtung der Kraft gleich Null, oder:

für jede beliebige Ebene die Summe der Quotienten, welche gebildet werden, indem man den Druck jeder Kraft durch ihren reellen Weg in Bezug auf jene Ebene dividirt, gleich Null,

so sind die Kräfte im Gleichgewicht.

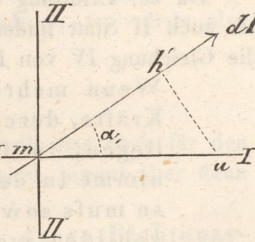
Um nun nachzuweisen, dafs jene Bedingungen für **jeden beliebigen Punkt**, oder **für jede beliebige Ebene** statt finden, braucht man nur zu zeigen, dafs sie für drei Punkte erfüllt werden, deren jeder in einer andern von drei durch das Massenelement gehenden zu einander rechtwinkligen Axen liegt, oder dafs sie für drei Ebenen gelten, die auf solchen Axen folglich nach unter einander normal sind. Dies läfst sich sehr leicht geometrisch beweisen, indem man das Axensystem um seinen Durchschnittspunkt dreht, und nun zeigt, dafs wenn diese obigen Bedingungen für das Axensystem in der ursprünglichen Lage gelten, dieselben auch für jede andere Lage gelten müssen, in welche man dasselbe durch Drehung bringen kann. Endlich läfst sich eben so leicht nachweisen, dafs der Durchschnittspunkt des anzunehmenden Axensystems auch aufserhalb des Massenelements liegen könne. Man hat also die obigen Bedingungs-Gleichungen überhaupt nur für drei Punkte, deren Ebene nicht durch das Massenelement geht, beziehlich für drei sich rechtwinklich schneidende Ebenen, nachzuweisen.

Bemerkung über die Vorzeichen bei Anwendung des Prinzips der virtuellen und reellen Wege.

§ 49. Bei der Anwendung dieser Gesetze (§ 46 bis § 48) ist es von der gröfsten Wichtigkeit, die **Vorzeichen** richtig anzuwenden, welche den Cosinus und den Linien, welche entweder die Projektionen des Abstandes der gewählten Punkte auf die Richtungen der Kräfte, oder die reellen Wege der Kräfte in Bezug auf die gewählten Ebenen bedeuten, angehören. In dieser Beziehung ist zu bemerken, dafs man die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte mit den angenommenen Axen bilden, von jeder Axe anfangend stets in ein und demselben Sinne messen mufs, und dafs wenn man die Richtungen, nach welchen die Kräfte das Massenelement einzeln zu bewegen streben, als positiv ansieht, die Verlängerungen dieser Richtungen rückwärts über das Massenelement hinaus als negativ betrachtet werden müssen, und umgekehrt. Es erleichtert dabei die Betrachtung, wenn man entweder sämmtliche Kräfte als ziehend, oder sämmtliche Kräfte als schiebend sich vorstellt.

Prinzip der statischen Momente für den Zustand des Gleichgewichts.

§ 50. Sind mehre Kräfte, die auf ein Massenelement wirken, und deren Richtungslinien in derselben Ebene liegen, im Gleichgewicht, und zerlegt man den Druck jeder Kraft nach zwei Axen, die zu einander normal sind, und in derselben Ebene liegen, so folgt leicht (§ 34. S. 38), wenn dK', dK'' .... die Drucke und $\alpha_{\prime}$ $\alpha_{\prime\prime}$ ... die Winkel, welche die Richtung derselben mit der einen Axe bilden, folglich $(90^{\circ} - \alpha_{\prime})$, $(90^{\circ} - \alpha_{\prime\prime})$ ... die Winkel mit der andern Axe sind:



$$\text{I.}\quad \Sigma(dK' \,.\, \cos\alpha_{\prime}) = 0$$

$$\text{II.}\quad \Sigma(dK' \,.\, \sin\alpha_{\prime}) = 0.$$

Nach dem Frühern folgt aus der Gleichung I. auch (S. 57):

$$\text{III.}\quad \Sigma(dK'\, mh') = 0.$$

Nun ist aber $\sin\alpha_{\prime} = \frac{uh'}{mu}$, folglich hat man auch nach II. $\Sigma\left(dK' \,.\, \frac{uh'}{mu}\right) = 0$, und da mu bei sämmtlichen Drucken dasselbe ist, so folgt:

$$\text{IV.}\quad \Sigma(dK' \,.\, uh') = 0.$$

Die Linie uh' oder die Normale von irgend einem Punkt auf die Richtungslinie einer Kraft nennt man den Hebelsarm dieser Kraft in Bezug auf den Punkt, das Produkt von der Form $dK'.uh'$ oder das Produkt aus dem Druck einer Kraft in ihren Hebelsarm nennt man das statische Moment der Kraft in Bezug auf jenen Punkt.

Bezeichnet man den Hebelsarm der Kräfte mit r' r''...., so hat man die Gleichung IV in der Form:

$$89)\quad \Sigma(dK'.r') = 0.$$

Da nun die Lage der Axe mu in der Ebene gleichgiltig ist, so folgt, dafs Alles, was für den Punkt u bewiesen ist, auch für jeden andern Punkt der Ebene gilt, und daher läfst sich die so eben entwickelte Gleichung IV in Verbindung mit III als Gesetz so ausdrücken:

> Sind mehre Kräfte, die auf ein Massenelement wirken, und deren Richtungslinien in derselben Ebene liegen, im Gleichgewicht, und man denkt in der Ebene einen beliebigen Punkt, so ist sowohl die Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man jeden Druck mit der Projektion des Abstandes jenes Punktes von dem Massenelement auf die Richtungslinie des Drukkes multiplizirt, als auch die Summe der statischen Momente in Bezug auf jenen Punkt, gleich Null.

Da zur Erfüllung des Gleichgewichts sowohl die Gleichung I als auch II Statt finden mufs, da ferner die Gleichung III von I, die Gleichung IV von II abgeleitet wurde, so folgt umgekehrt:

> Wenn mehre, auf ein Massenelement wirkende Kräfte, deren Richtungslinien in derselben Ebene liegen, im Gleichgewicht sein sollen, und man nimmt in der Ebene einen beliebigen Punkt an, so mufs sowohl die Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man jeden einzelnen Druck mit der Projektion des Abstandes jenes Punktes von dem Massenelement auf die Richtungslinie des Drucks multiplizirt, als auch die Summe der statischen Momente der Drucke in Bezug auf diesen Punkt gleich Null sein.

Hat man es mit Kräften zu thun, deren Richtungslinien in verschiedenen Ebenen liegen, und man will die Bedingungen des Gleichgewichts untersuchen, so kann man aufser den in § 48. S. 57 angeführten Gesetzen auch noch folgendes Verfahren befolgen: Man zerlegt jede einzelne Kraft in zwei andere, von denen eine in eine bestimmt angenommene, durch das Massenelement gehende Ebene fällt, die andere in einer Richtung normal zu dieser Ebene liegt. Nun wendet man für das Gleichgewicht in der Ebene die eben aufgestellten Gesetze an, und untersucht, ob aufserdem noch entweder die Summe der Drucke in der zur Ebene normalen Richtung gleich Null ist, oder aber ob in Beziehung auf diese Richtung die Gesetze S. 48. No. 1 oder 2 erfüllt werden, indem man entweder einen Punkt in der normalen Richtung annimmt und seinen Abstand auf die Richtung jeder Kraft projicirt, oder indem man zu der angenommenen Ebene eine Parallelebene denkt, und die reellen Wege der einzelnen Drucke in Bezug auf diese Ebene untersucht etc.

Anwendung des Prinzips der statischen Momente auf Kräfte, die nicht im Gleichgewicht sind.

§ 51. Wirken mehre Kräfte, deren Richtungslinien in derselben Ebene liegen, auf ein Massenelement, und die Kräfte sind nicht im Gleichgewicht, so wird nach § 35. No. 1 Gleichgewicht hergestellt sein, wenn wir eine neue Kraft auf das Massenelement einwirken lassen, welche der Resultirenden gleich und entgegengesetzt ist. Sobald diese Kraft einwirkt, gelten die Gesetze des vorigen Paragraphen. Ist der resultirende Druck dK und der Hebelsarm in Bezug auf einen angenommenen Punkt r, so würde also folgen:

$$\Sigma(dK'r') - dK.r = 0.$$

$$90)\quad dK.r = \Sigma(dK'r').$$

Das Prinzip der statischen Momente gilt also auch für den Fall, dafs die Kräfte nicht im Gleichgewicht sind, nimmt aber dann die Form an:

> Wirken beliebig viele Kräfte, deren Richtungslinien in ein und derselben Ebene liegen, auf ein Massenelement, so ist in jedem Augenblick das statische Moment der Mittelkraft in Bezug auf einen Punkt in der Ebene der Kräfte gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte in Bezug auf denselben Punkt.

Liegt der angenommene Punkt in der Richtung der Resultirenden, so ist offenbar der Hebelsarm der Resultirenden in Bezug auf diesen Punkt gleich Null, und es folgt daher der Satz:

Sind mehre Kräfte, die auf ein Massenelement wirken, und deren Richtungslinien in derselben Ebene liegen, **nicht** im Gleichgewicht, so ist dennoch die Summe der statischen Momente in Bezug auf jeden Punkt in der Richtung der Resultirenden gleich Null.

Prinzip der konstanten Leistungen für parallele Ebenen.

§ 52. Denken wir, es wirken beliebig viele Kräfte auf ein Massenelement, und dasselbe bewege sich unter dem Einflufs derselben in einer gewissen Kurve; zerlegen wir nun sowohl die Drucke, als die Wegelemente nach drei zu einander normalen Axen, so ist das Leistungselement in irgend einem Augenblick in der Richtung der ersten Axe:

$$dK_{,} \, ds_{,} = \Sigma(dK' \cos \alpha_{,}) \,.\, \Sigma(ds' \cos \alpha_{,}),$$

in der Richtung der zweiten Axe:

$$dK_{,,} \, ds_{,,} = \Sigma(dK' \,.\, \cos \beta_{,}) \,.\, \Sigma(ds' \,.\, \cos \beta_{,}),$$

in der Richtung der dritten Axe:

$$dK_{,,,} \, ds_{,,,} = \Sigma(dK' \,.\, \cos \gamma_{,}) \,.\, \Sigma(ds' \,.\, \cos \gamma_{,}),$$

und das Leistungselement der Mittelkraft (§ 32. S. 36):

$$dK.ds = dK_{,} \, ds_{,} + dK_{,,} \, ds_{,,} + dK_{,,,} \,.\, ds_{,,,} = \Sigma(dK' \,.\, \cos \alpha_{,}) \,.\, \Sigma(ds' \cos \alpha_{,}) + \Sigma(dK' \cos \beta_{,}) \,.\, \Sigma(ds' \,.\, \cos \beta_{,}) + \Sigma(dK' \,.\, \cos \gamma_{,}) \,.\, \Sigma(ds' \,.\, \cos \gamma_{,}).$$

Ist nun für irgend eine Zeitdauer der Druck in der Richtung einer der drei Axen konstant, so ist (S. 27. Gleichung 48) für diese Zeit die Leistung in dieser Richtung gleich dem Produkt aus dem konstanten Druck in den Weg, welchen derselbe in dieser Zeit zurückgelegt hat. Wenn also z. B. der resultirende Druck für die erste Axe während einer bestimmten Zeitdauer konstant ist, so ist die Kräftesnmme (§ 32. S. 36) für diese Richtung in der genannten Zeitdauer gleich $(dK_{,} \,.\, s_{,})$; die Drucke in der Richtung der beiden andern Axen mögen dabei während dieser Zeitdauer konstant oder beliebig veränderlich sein. Die Form der Bahn des Massenelements ist aber nach § 38 und 39 von der Beschaffenheit der Kräftesummen für alle drei Axen abhängig. Diese Form der Bahn kann, wenn die Kräftesumme nach der Richtung der einen Axe eine konstante ist, sowohl eine gerade Linie sein, wenn auch die Kräftesummen für die beiden andern Axen konstant sind (§ 38) als auch irgend eine Kurve bilden (§ 39). Wie sie aber auch beschaffen sein mag, die Arbeit in der Richtung der konstant wirkenden Kräftesumme wird sich immer ausdrücken durch $(dK_{,} . s_{,})$, wenn $dK_{,}$ der konstante Druck, $s_{,}$ der Weg dieses Druckes ist. Nun ist aber der Weg $s_{,}$, den das Massenelement von irgend einer Lage aus bis zu irgend einer andern Lage in der Richtung einer bestimmten Axe durchläuft, nichts anderes, als der Zuwachs der Ordinate des Weges nach der Richtung dieser Axe für die Zeit, in welcher das Massenelement aus der ersten Lage in die zweite übergeht. Der Werth dieses Ordinaten-Zuwachses aber wird dargestellt durch den normalen Abstand der beiden Ebenen, welche man durch das Massenelement in seiner ersten und in seiner spätern Lage normal zu der Axe denken kann. Hierin nun liegt der Satz:

> Bewegt sich ein Massenelement unter dem Einfluſs einer beliebigen Menge von Kräften in irgend welcher Kurve, und es ist für irgend eine Richtung der Druck für eine gewisse Zeit konstant, so ist die Leistung der Kräftesumme für diese Richtung, indem das Massenelement aus einer Ebene, die normal zu der Richtung ist, in eine andere, ebenfalls zu der Richtung normale Ebene übergeht, immer dieselbe und wird durch das Produkt aus dem konstanten Druck in den normalen Abstand der beiden Ebenen gemessen, gleichviel wie die Kurve beschaffen sein mag, welche das Massenelement bei dieser Bewegung beschreibt. Es ist folglich auch der Gewinn an lebendiger Kraft, und mithin auch der Zuwachs an Geschwindigkeit derselbe. (§ 21. S. 26 und § 22. S. 27.)

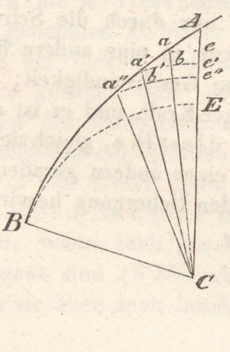
Dieses Gesetz findet besonders Anwendung für alle die Fälle, wo nach der Richtung der Vertikalen die Schwere die einzige wirkende Kraft ist. Ein Körper, welcher nur durch die Schwerkraft getrieben aus einer horizontalen Ebene in eine andere übergeht, erlangt immer denselben Zuwachs an Geschwindigkeit, also auch immer denselben Gewinn an lebendiger Kraft, und es ist auch die auf ihn wirkende Kraftrichtung immer dieselbe, gleichviel ob er in der vertikalen Linie oder in irgend einer andern geraden Linie (geneigte Ebene) oder in einer Kurve den Uebergang bewirke.

Prinzip der konstanten Leistungen, wenn der konstante Druck stets durch denselben Punkt geht.

§ 53. Der Satz des vorigen Paragraphen läfst sich noch auf eine allgemeinere Form bringen, und gewinnt dann folgende Gestalt:

Bewegt sich ein Massenelement unter dem Einflufs mehrer Kräfte in einer Kurve, und es existirt ein Punkt, für welchen der resultirende Druck (§ 46. S. 54) konstant ist, so ist auch die Leistung, der Gewinn an lebendiger Kraft und die Geschwindigkeits-Aenderung konstant, welche für das Massenelement Statt finden, indem dasselbe seine Entfernung von jenem Punkte um ein bestimmtes Stück ändert, und zwar drückt sich immer die Leistung für eine bestimmte Zeit aus durch das Produkt aus dem konstanten Druck in die Differenz der Entfernung von jenem Punkt, welche das Massenelement am Anfange und am Ende der Zeit besitzt: die Kurve, welche während dieser Zeit durchlaufen wird, mag eine beliebige Form haben.

Denn es bewege sich das Massenelement in der Kurve AB so, dafs der resultirende Druck für den Punkt C konstant $= dK$ ist, nehmen wir auf der Kurve AB unendlich kleine Wegstücken an, Aa, aa', $a'a''$.... und beschreiben aus C mit den Abständen aC, $a'C$.... BC Kugelflächen, welche AC in den Punkten e, e', e''...E schneiden, so ist für ein unendlich kleines Wegstück Aa das Kugelelement ae als eben, Ae aber als normal zu dieser Ebene, und der konstante Druck dK als parallel mit AC wirkend anzusehen, das Leistungselement, welches auf das Massenelement wirkt, indem dasselbe von A nach a sich bewegt, drückt sich also nach dem vorigen Satze aus durch $dK.Ae$, welche Gestalt auch immer das Kurvenelement Aa haben mag. Ebenso läfst sich zeigen, dafs das Leistungselement für die Bewegung von a nach a' gleich $dK.ab$ $= dK.ee'$ etc. ist; es ist folglich die Leistung der stets durch den Punkt C gehenden konstant wirkenden Kraft, indem das Massenelement sich von A



nach B bewegt, gleich: $\Sigma(dK.Ae')$ und da dK für alle Elemente konstant ist, auch gleich:

$$dK.\Sigma(Ae) = dK.AE = dK(AC-CE) = dK.(AC-BC),$$

das ist, was zu beweisen war.

Dieser Fall kommt auf den des vorigen Paragraphen zurück, wenn man annimmt, daſs der Punkt C unendlich weit entfernt liegt, die Richtungen nach C also alle als parallel angesehen werden können.

Geht die Richtung einer Kraft stets durch einen bestimmten Punkt, so pflegt man diesen Punkt den **Mittelpunkt der Kraft** zu nennen.

Bewegung eines Massenelements durch Gleichgewichtslagen. — Stabiles, labiles Gleichgewicht.

§ 54. Bewegt sich ein Massenelement unter dem Einfluſs beliebiger Kräfte in einer gewissen Kurve, so setzt dies immer voraus, daſs die Kräfte **nicht** in allen aufeinander folgenden Lagen des Massenelements im **Gleichgewicht** sind, denn wäre dies der Fall, so müſste (§ 38) die Bahn eine gerade Linie sein.

Wenn jedoch bei der Bewegung eines Massenelements in einer Kurve die Kräfte in irgend einem Punkte durch eine Gleichgewichtslage gehen, d. h. wenn für irgend einen Punkt die resultirende Leistung aus sämmtlichen Kräften Null wird, so ist in diesem Punkte die Geschwindigkeit des Massenelements ein Maximum oder ein Minimum.

Denn, zerlegen wir die Leistung sämmtlicher Kräfte nach drei zu einander normalen Richtungen, so ist nach Gleichung 54) S. 32 in jedem Augenblick:

$$dm\,.\,c\,dc = dm\,c_{,}\,dc_{,} + dm\,c_{,,}\,dc_{,,} + dm\,c_{,,,}\,dc_{,,,},$$

wenn c die resultirende Geschwindigkeit, $c_{,}$, $c_{,,}$, $c_{,,,}$ die Geschwindigkeiten nach der Richtung der drei Axen bezeichnen. Nun ist offenbar die resultirende Geschwindigkeit (c), mit welcher sich das Massenelement bewegt, in dem Augenblick ein Maximum oder Minimum, wo ihr Differenzial dc gleich Null wird, d. h. wenn die Gleichung erfüllt wird:

$$dc = \frac{dm\,c_{,}\,dc_{,} + dm\,c_{,,}\,dc_{,,} + dm\,c_{,,,}\,dc_{,,,}}{dm\,c} = 0,$$

oder:

$$dm\,c_{,}dc_{,} + dm\,c_{,,}\,dc_{,,} + dm\,c_{,,,}\,dc_{,,,} = 0.$$

Diese Gleichung zeigt aber an, dafs, wenn $dc = 0$ sein soll, d. h. wenn die Geschwindigkeit des Massenelements ein Maximum oder ein Minimum sein soll, die resultirende Leistung sämmtlicher Kräfte gleich Null sein müsse, d. h. dafs die Kräfte für diesen Augenblick im Gleichgewicht sein müssen.

Die Geschwindigkeit ist ein *Maximum*, wenn die zweite Ableitung *negativ* ist, sie ist ein Minimum, wenn die zweite Ableitung *positiv* ist. Wenn nun von der Gleichgewichtslage aus die Kräfte dem Massenelement einen *negativen* Geschwindigkeitszuwachs ertheilen, d. h. wenn sie das Bestreben haben, das Massenelement an der Entfernung aus der Gleichgewichtslage *zu hindern*, oder, was dasselbe sagt, wenn sie in solchem Sinne wirken, dafs sie das Massenelement, so bald es sich aus der Gleichgewichtslage entfernt, wieder in dieselbe zurückzuführen streben, so nennt man eine solche *Gleichgewichtslage eine stabile*. Wenn dagegen von der Gleichgewichtslage ab die Kräfte dem Massenelement einen *positiven* Geschwindigkeitszuwachs ertheilen, d. h. wenn sie das Bestreben äufsern, das Massenelement, sobald es einmal die Gleichgewichtslage verlassen hat, *nicht* wieder in dieselbe zurückzuführen, so sagt man, die *Gleichgewichtslage sei nicht stabil*, auch wohl, es sei eine *labile Gleichgewichtslage*. Dieser Darstellung gemäfs läfst sich folgender Satz *aufstellen*:

> *Wenn ein Massenelement sich unter dem Einflufs beliebiger Kräfte in einer Kurve bewegt, und die Kräfte erlangen für irgend einen Punkt der Kurve eine Gleichgewichtslage, so ist die Geschwindigkeit des Massenelements ein Maximum, wenn die Gleichgewichtslage eine stabile ist, dagegen ein Minimum, wenn die Gleichgewichtslage eine labile ist.*

Bestimmung des stabilen und labilen Gleichgewichts.

§ 55. Betrachten wir nun wiederum den Fall, welcher in § 53 vorausgesetzt wurde. Denken wir, das Massenelement bewege sich in einer Kurve, und für einen bestimmten Punkt sei der resultirende Druck ein konstanter; ziehen wir von diesem Punkte Normalen an die Kurve, so wird in den Durchschnittspunkten dieser Normalen mit der Kurve diese letzte entweder einen *gröfsten* oder *kleinsten* Abstand von dem Punkte haben. Das Massenelement wird also, *nachdem* es einen solchen Durchschnittspunkt passirt hat, seinen Abstand von dem Mittelpunkt der Kraft im entgegengesetzten Sinne zu ändern beginnen, als vor dem Durchgange durch denselben; und zwar so, dafs wenn es einen nächsten Durchschnittspunkt passirt, von da an die Entfernungen vom Mittelpunkt der Kraft wachsen, und wenn es einen entferntesten Durchschnittspunkt passirt, die Abstände vom Mittelpunkt der Kraft von da ab sich verringern. Hat nun die Kraft das Bestreben, das Massenelement dem Mittelpunkt der Kraft konstant zu nähern (Anziehungskraft), so wird der Geschwindigkeitszuwachs vor einem nächsten Punkt, wo sich das Massenelement dem Mittelpunkt der Kraft nähert, sich also im Sinne der Kraft bewegt, positiv; hinter demselben, wo sich also das Massenelement im entgegengesetzten Sinne der Kraft bewegt, negativ; dagegen wird in analoger Weise der Geschwindigkeitszuwachs vor einem entferntesten Punkt negativ, hinter demselben positiv; es wird also für eine Anziehungskraft in einem nächsten Punkte ein Maximum der Geschwindigkeit, in einem entferntesten Punkte ein Minimum der Geschwindigkeit stattfinden, und es stellt daher für eine solche Kraft ein nächster Punkt immer eine stabile Gleichgewichtslage, ein entferntester Punkt immer eine labile Gleichgewichtslage dar. Hat dagegen die Kraft das Bestreben, das Massenelement konstant von dem Mittelpunkt der Kraft zu entfernen (Abstofsungskraft), so finden genau die entgegengesetzten Verhältnisse statt.

Es ist natürlich hierbei vorausgesetzt, dafs die Richtung, in welcher die Kraft wirksam ist, als positiv angesehen wird.

Legen wir durch die Durchschnittspunkte der Normalen mit der Kurve Ebenen, welche normal zu jenen Normalen sind, so sind dies Berührungsebenen zur Kurve. Liegt nun der Mittelpunkt der Kraft so entfernt, dafs man alle von der Kurve nach demselben gezogenen Linien als parallel ansehen kann (der Fall des § 52), so werden auch diese Berührungsebenen alle normal zu der Kraftrichtung, und unter sich parallel sein.

Die obigen Gesetze lassen sich nun leicht auch auf den Fall übertragen, wo die konstante Kraft immer parallel mit einer bestimmten, geraden Linie bleibt (§ 52). Hier wird für jede Berührungsebene, welche zur Kraftrichtung normal ist, die Geschwindigkeit des Massenelements ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem diese Ebene einem nächsten oder einem entferntesten Berührungspunkt entspricht.

Schwingende Bewegung. Gesetz für die Schwingung durch eine stabile Gleichgewichtslage.

§ 56. Denken wir, ein Massenelement bewege sich auf einer Kurve unter dem Einfluſs einer konstant wirkenden Anziehungs- oder Abstoſsungskraft; es habe seine Bewegung in irgend einem Punkte der Kurve mit Null-Geschwindigkeit begonnen, während es in diesem Punkte den Abstand a' vom Mittelpunkt der Kraft besaſs, und habe sich bis zu einem Punkte, welcher einer stabilen Gleichgewichtslage entspricht und den Abstand a von dem Mittelpunkt der Kraft hat, bewegt. Die Leistung der Kraft auf das Massenelement ist in diesem Augenblick geworden nach § 53 (Gleichung 48. S. 27):

$$dK.(a'-a)=\tfrac{1}{2}dm.c^2,$$

in sofern $a'-a$ die Abstandsänderung, welche das Massenelement unter der Einwirkung der Kraft vom Zustand der Ruhe aus und c die Endgeschwindigkeit bedeutet, welche das Massenelement im Punkt a erlangt hat. Mit dieser erlangten Geschwindigkeit passirt das Massenelement die stabile Gleichgewichtslage, und von nun an wird der Geschwindigkeitszuwachs in der Richtung nach dem Mittelpunkt der Kraft konstant negativ, d. h. es nimmt die Geschwindigkeit, mit welcher das Massenelement sich dem Sinne der Kraft entgegen bewegt, fortwährend ab, bis sie endlich Null wird. Dieser Augenblick tritt ein, wenn die Summe der dem Massenelement in den einzelnen Zeitelementen entzogenen Geschwindigkeiten wieder c geworden ist, oder wenn die auf das Massenelement nun verzögernd einwirkende Kraft eine Leistung gleich $-\tfrac{1}{2}dm.c^2$ erzeugt hat. Da aber

$$\tfrac{1}{2}dm.c^2=(a'-a).dK$$

ist, so folgt:

$$-\tfrac{1}{2}dmc^2=-(a'-a).dK,$$

d. h. die, dem Massenelement bei seiner, dem Sinne der Kraft entgegengesetzten Bewegung entzogene lebendige Kraft ist gleich derjenigen geworden, welche die Kraft dem Massenelement bei seiner Bewegung im Sinne der Kraft ertheilt hat, sobald die Abstandsänderung $(a'-a)$ von dem Mittelpunkt der Kraft gleich aber entgegengesetzt derjenigen Abstandsänderung geworden ist, welche das Massenelement bei seiner Bewegung im Sinne der Kraft erlangt hat. Das Massenelement erlangt also auf der andern Seite der stabilen Gleichgewichtslage denselben Abstand von dem Mittelpunkt der Kraft, welchen es bei dem Beginn der Bewegung nach der Gleichgewichtslage hin besessen hatte. Sobald es diesen Abstand erlangt hat, ist seine Geschwindigkeit wieder Null geworden; die konstant wirkende Kraft bewegt nun, falls dieser Augenblick nicht einer Gleichgewichtslage entspricht, das Massenelement wieder in ihrem Sinne nach der Gleichgewichtslage hin, und dasselbe passirt diese Lage wiederum nach der entgegengesetzten Seite hin, bis es wieder mit Null-Geschwindigkeit in seiner ursprünglichen Lage angekommen ist. Nun wiederholt sich das Spiel von Neuem. Endlich läfst sich noch ganz allgemein zeigen, dafs bei der Bewegung von der Ruhe nach dem Punkt des stabilen Gleichgewichts hin einerseits, und bei der Entfernung von diesem Punkt andrerseits, in gleichen Abständen vom Mittelpunkt der Kraft gleich grofse Geschwindigkeiten Statt finden müssen.

Denn es sei c die Geschwindigkeit, welche das Massenelement erreicht hat, indem sein Abstand vom Mittelpunkt der Kraft gleich x geworden, und zwar während es sich von dem Zustand der Ruhe, oder von dem Abstand a' aus nach dem Mittelpunkt der Kraft hin bewegt, es sei ferner f das Aenderungsmaafs der Kraft, so ist offenbar die gewonnene lebendige Kraft:

$$\tfrac{1}{2}dm\,.\,c^2 = dK\,.\,(a'-x) = dm\,.\,f\,(a'-x),$$

folglich:

$$c = \sqrt{[2f(a'-x)]}.$$

Indem das Massenelement den Punkt des stabilen Gleichgewichts erreicht, ist die Arbeit der konstant wirkenden Kraft gleich $dK(a'-a)$ geworden, und wenn es sich bis zum Abstande x wieder von der Gleichgewichtslage entfernt hat, so ist demselben die Arbeit $dK(a-x)$ ertheilt, folglich besitzt es die Arbeit:

$$dK(a'-a) + dK(a-x) = dK(a'-x);$$

ist nun in diesem Augenblick seine Geschwindigkeit c' geworden, so hat man:

$$\tfrac{1}{2}dm\,.\,c'^2 = dK\,.\,(a'-x) = \tfrac{1}{2}dmf(a'-x)$$

$$c' = \sqrt{[2f\,.\,(a'-x)]},$$

folglich:

$$c' = c.$$

Aus dieser Darstellung folgt folgendes Gesetz:

Bewegt sich ein Massenelement unter dem Einflufs beliebiger Kräfte in einer Kurve, so, dafs für einen bestimmten Punkt die resultirende Kraft eine konstant wirkende ist, und fängt die Bewegung in der Kurve mit Null-Geschwindigkeit an, so wird das Massenelement, falls es bei seiner Bewegung eine stabile Gleichgewichtslage durchläuft, auf der andern Seite dieser Lage eine ebenso grofse Entfernung von dem Mittelpunkt der Kraft erlangen, als es bei dem Beginn der Bewegung hatte, dann für einen Augenblick zur Ruhe kommen, sich hierauf, wieder mit Null-Geschwindigkeit beginnend, rückwärts in seine ursprüngliche Lage zurückbewegen, und diese hin- und hergehende Bewegung ununterbrochen fortsetzen. Bei dieser Bewegung hat das Massenelement zu beiden Seiten der stabilen Gleichgewichtslage in gleichen Abständen vom Mittelpunkt der Kraft gleiche Geschwindigkeiten.

Diese Gesetze lassen sich leicht für den Fall verstehen, wo der Mittelpunkt der Kraft unendlich weit entfernt liegt.

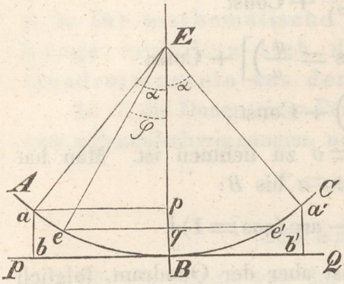
Eine solche hin- und hergehende Bewegung eines Massenelements nennen wir eine schwingende Bewegung. Die Bewegung von dem Zustand der Ruhe aus durch die stabile Gleichgewichtslage bis wiederum zum Zustand der Ruhe hin, nennen wir eine Schwingung. Die Schwingungen wiederholen sich hiernach ununterbrochen, so lange die Resultirende für den Mittelpunkt der Kraft konstant wirkend bleibt. Diese Voraussetzung trifft jedoch bei den in der Praxis vorkommenden Fällen nur sehr selten zu.

Mathematisches Pendel — Pendelschwingung im Kreisbogen.

§ 57. Ein Massenelement, welches unter dem Einflufs der Schwerkraft in irgend einer Kurve schwingt, so dafs es bei dieser Schwingung eine stabile Gleichgewichtslage durchläuft, nennt man ein mathematisches Pendel. Ist diese Kurve ein Kreisbogen, so nennt man das Pendel ein Kreispendel.

Es schwinge ein Massenelement unter dem Einflufs der Schwerkraft in dem Kreisbogen ABC. Ist EB die Richtung der Schwere, so erhalten wir die Lage des stabilen Gleichgewichts, wenn wir die Berührungsebene des Kreisbogens denken, welche normal zu EB ist, und zwischen dem Kreisbogen und dem Mittelpunkt der Kraft liegt. Der Berührungspunkt dieser Ebene B ist der Punkt des stabilen Gleichgewichts (§ 55). Fängt die Bewegung des Massenelements in a an, wo der Abstand von der Ebene gleich ab ist, so mufs, nach § 56, das Massenelement, nachdem es den Punkt B passirt hat, sich so weit erheben, dafs der Abstand $a'b'$ gleich ab wird; d. h. es wird der Winkel aEB gleich BEa' sein müssen.

Den Winkel $aEB = BEa'$ nennen wir den Erhebungswinkel, bezeichnen wir denselben mit α. Hat sich das Massenelement unter dem Einflufs der Schwere von a, mit Null-Geschwindigkeit anfangend, bis nach einem beliebigen Punkte e bewegt, und legen wir durch a und e die beiden Ebenen ap und eq normal zu EB, so ist die Geschwindigkeit, mit welcher das Massenelement in e ankommt, dieselbe, welche es erlangt haben würde, indem es von p nach q frei gefallen wäre (§ 52), folglich:



$$c = \sqrt{(2g . pq)}$$
$$= \sqrt{[2gr(\cos\varphi - \cos\alpha)]},$$

wenn wir mit r den Halbmesser des Kreisbogens, mit φ den Winkel eEB, um welchen das Massenelement nun noch von der Gleichgewichtslage entfernt ist, bezeichnen. Ist in diesem Augenblick ds das Wegelement, so ist auch, wenn wir die Geschwindigkeit für die Dauer eines Zeitelements als konstant ansehen:

$$c = \frac{ds}{dt},$$

es ist aber jedenfalls:

$$ds = -d\varphi . r,$$

da das Wegelement ds wächst, wenn das Element des veränderlichen Winkels φ abnimmt, folglich:

$$c = \frac{-r . d\varphi}{dt} = \sqrt{[2g(\cos\varphi - \cos\alpha) . r]}$$

$$dt = -\sqrt{\left(\frac{r}{2g}\right)} . \frac{d\varphi}{\sqrt{(\cos\varphi - \cos\alpha)}}.$$

Die Zeit, welche das Massenelement braucht, um von a nach B zu gelangen, wird sich finden, indem wir diesen Ausdruck integriren, und das Integral zwischen den Grenzen $\varphi = \alpha$ und $\varphi = o$ nehmen. Allein das Integral von $\frac{d\varphi}{\sqrt{(\cos\varphi - \cos\alpha)}}$ läfst sich nicht in geschlossener Form erhalten. Wir können es aber für hinreichend kleine Winkel ermitteln, indem wir, mit Vernachlässigung der vierten Potenzen, von φ und α setzen:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}; \quad \cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

$$\sqrt{(\cos\varphi - \cos\alpha)} = \sqrt{\frac{(\alpha^2 - \varphi^2)}{2}},$$

folglich für kleine Erhebungswinkel:

$$dt = -\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{(\alpha^2 - \varphi^2)}}$$

$$t = -\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(\alpha^2 - \varphi^2)}} + \text{Const.}$$

$$= -\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \left[-\operatorname{arc}\left(\cos = \frac{\varphi}{\alpha}\right)\right] + \text{Const.}$$

$$= \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{\varphi}{\alpha}\right) + \text{Const.},$$

welches Integral von $\varphi = \alpha$ bis $\varphi = o$ zu nehmen ist. Man hat sodann für die Zeit der Bewegung von a bis B:

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \left[\operatorname{arc}(\cos = 0) - \operatorname{arc}(\cos = 1)\right].$$

Der Bogen, dessen $\cos = 0$ ist, ist aber der Quadrant, folglich $\operatorname{arc}(\cos = 0) = \frac{1}{2}\pi$, und der Bogen, dessen $\cos = 1$ ist, ist Null, folglich ist $t = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$.

Indem nun das Massenelement von dem Punkt B aus seine Bewegung nach C hin fortsetzt, verliert es allmählich die Geschwindigkeit, welche im Punkt B das Maximum erreicht hatte. In dem Punkt e', welcher in derselben Horizontalen mit dem Punkt e liegt, wird nach § 56 die Geschwindigkeit wieder gleich derjenigen im Punkte e geworden sein, und man hat:

$$c = \sqrt{[2g(\cos\varphi - \cos\alpha) \cdot r]},$$

es ist aber auch hier $ds = -d\varphi \cdot r$ und $c = -\frac{d\varphi \cdot r}{dt}$, folglich hat man auch für diesen Theil der Schwingung:

$$dt = \frac{-d\varphi \cdot r}{\sqrt{[2g \cdot (\cos\varphi - \cos\alpha) \cdot r]}},$$

und es muſs sich die Zeitdauer, welche das Massenelement braucht, um von B nach dem Punkt der Ruhe a' zu gelangen, genau in derselben Weise, wie vorhin, finden.

Nennen wir T die Zeit einer ganzen Pendelschwingung, so ist:

$$90) \quad T = 2t = \pi\sqrt{\frac{r}{g}} = 0{,}5620\sqrt{r}.$$

Man sieht, daſs in diesem Ausdruck der Erhebungswinkel α nicht vorkommt; es ist also die Zeitdauer einer Pendelschwingung unabhängig vom Erhebungswinkel, so lange derselbe so klein ist, daſs man die oben gemachte Substitution für $\cos\alpha$ gelten lassen kann.

Den Radius des Kreisbogens r nennt man die Länge des Pendels. Für eine Länge r' ist die Dauer der Schwingung:

$$T' = \pi \sqrt{\frac{r'}{g}},$$

folglich:

$$91)\quad T : T' = \sqrt{r} : \sqrt{r'},$$

d. h. für mathematische Kreispendel von verschiedener Länge verhalten sich die Schwingungszeiten wie die Quadratwurzeln aus den Längen der Pendel.

Ist T die Dauer einer Pendelschwingung, so ist $T \,.\, n$ die Dauer von n Pendelschwingungen, nennen wir diese $T_{\prime}$, so hat man:

$$T_{\prime} = nT = n\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

$$92)\quad n = \frac{T_{\prime}}{\pi} \,.\, \sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Für ein Pendel von der Länge r' hat man in derselben Zeit die Anzahl der Pendelschwingungen:

$$n' = \frac{T_{\prime}}{\pi} \sqrt{\frac{g}{r'}},$$

folglich:

$$92a)\quad n : n' = \sqrt{\frac{1}{r}} : \sqrt{\frac{1}{r'}} = \sqrt{r'} : \sqrt{r},$$

d. h. für mathematische Kreispendel von verschiedenen Längen verhalten sich die Anzahl von Schwingungen in einer gegebenen Zeit **umgekehrt** wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen.

Aus der Formel 90 folgt für $T = 1$:

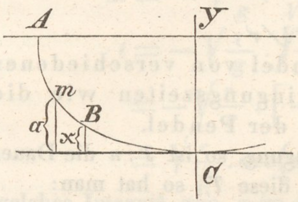
$$r = \frac{g}{\pi^2} = \frac{31{,}25}{9{,}8696} = 3{,}1666 \text{ Fuſs}.$$

Ein Pendel, dessen Schwingungsdauer eine Sekunde beträgt, nennt man ein Sekundenpendel. Hiernach ist die Länge eines mathematischen Sekundenpendels:

3,1667 Fuſs = 38 Zoll preuſsisch,
= 0,9938 Mètres.

Pendelschwingung in einer beliebigen Kurve — Cykloïdenpendel — Tautochrone — Brachystochrone.

§ 58. Es sei allgemein (Fig. auf folg. Seite) ABC eine beliebige Kurve, in welcher ein Massenelement sich unter dem Einfluſs der Schwerkraft bewegt. C sei ein Punkt des stabilen Gleichgewichts, und zugleich der Anfangspunkt des Koordinatensystems, dessen eine Axe cy mit der Richtung der Schwere zusammenfällt, also in dem Punkte C normal zur Kurve ist, während die beiden andern Axen in einer horizontalen, die Kurve C berührenden Ebene liegen. Ist a der Abstand des Punktes, in welchem das Massenelement seine Bewegung von der Ruhe aus beginnt, so ist die erlangte Geschwindigkeit in dem Augenblick, wo es den Punkt B erreicht hat, dessen Abstand von der Horizontalen gleich x ist:



$$c = \sqrt{[2g(a-x)]}.$$

Ist ds das Kurvenelement, so ist auch

$$c = \frac{-ds}{dt}$$

folglich

$$dt = \frac{-ds}{\sqrt{[2g(a-x)]}}.$$

Um nun die Zeit zu finden, welche das Massenelement braucht, um von einem Punkte der Kurve bis zu einem andern zu gelangen, mufs man diesen Ausdruck integriren, indem man ds und x von ein und demselben Urvariablen abhängig macht, und dann das Integral zwischen den entsprechenden Grenzen nehmen. Man kann dazu die Gleichung der Kurve benutzen. Ist dieselbe:

$$y = f_x + C$$
$$z = \varphi_x + C',$$

so hat man:

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = dx\sqrt{[1 + (df_x)^2 + (d\varphi_x)^2]},$$

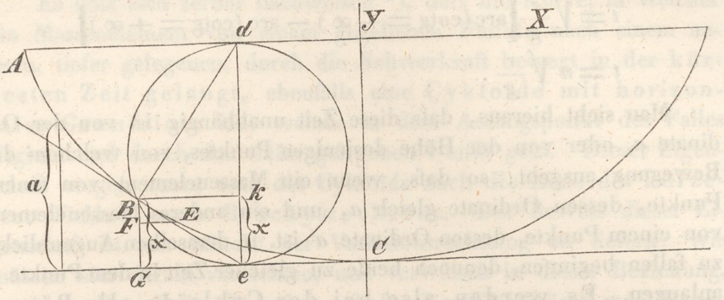
folglich ganz allgemein:

$$93)\quad t = -\frac{1}{\sqrt{2g}}\int\sqrt{\left[\frac{1 + (df_x)^2 + (d\varphi_x)^2}{a - x}\right]}dx + \text{Const.}$$

Gewöhnlich führt diese Methode, wegen des schwierigen Integrals, nur schwer zum Ziele, und man sucht lieber ds aus andern Eigenschaften der Kurve herzuleiten, wie wir es bei dem Kreispendel gethan.

Von den verschiedenen Kurven, in welchen Pendelschwingungen stattfinden können, hat, aufser dem Kreisbogen, noch die Cykloïde ein besonderes Interesse.

Es sei ABC eine Cykloïde, welche durch Abwickelung eines Kreises von dem Halbmesser gleich r auf der horizontalen Linie AX entstanden ist. Der Erzeugungskreis sei bei seiner Abwickelung in die Lage gekommen, in welcher er eben das Kurvenelement BE beschreibt; er berühre dabei die Grundlinie AX in d, und indem er sich auf derselben fortwälzt, macht er zunächst, indem er



das Element BE beschreibt, eine unendlich kleine Drehung um den Punkt d; es ist folglich die Sehne Bd des Erzeugungskreises die Normale für den Punkt B, und daher die hierzu normale Sehne Be Tangente für denselben. Wo die Richtung der Normalen mit der Richtung der Schwere zusammenfällt, ist ein Punkt des stabilen Gleichgewichts (§ 55). Da die Erzeugungslinie horizontal ist, so ist leicht einzusehen, dafs dies der Punkt C sein müsse, welcher zugleich Scheitel der Cykloïde ist. Nun ist:

$$BE = \frac{BF}{\sin(BEF)} = \frac{BF}{\sin(BeG)} = \frac{BF \,.\, Be}{BG}.$$

Es ist aber $BE = ds$; $BF = dx$; $BG = x$; $Be = \sqrt{(ed \,.\, ek)} = \sqrt{(2r \,.\, x)}$, folglich hat man:

$$ds = dx \sqrt{\frac{2r}{x}},$$

setzt man diesen Werth in den oben gefundenen allgemeinen Ausdruck für dt, so hat man:

$$dt = \frac{-ds}{\sqrt{[2g(a-x)]}} = -\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \,.\, \frac{dx}{\sqrt{(ax - x^2)}}$$

folglich:

$$t = -\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \,.\int \frac{dx}{\sqrt{(ax-x^2)}}$$

$$= -\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \,.\, \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{2x-a}{2\sqrt{(ax-x^2)}}\right)^{*)}$$

$$= \sqrt{\frac{r}{g}} \,.\, \mathrm{arc}\left(\mathrm{cotg} = \frac{2x-a}{2\sqrt{(ax-x^2)}}\right).$$

Nehmen wir dies Integral zwischen den Grenzen $x = a$ bis $x = 0$, so findet man die Zeit, welche das Massenelement braucht, um von der Ruhe aus bis zum Punkt des stabilen Gleichgewichts in der Cykloïde zu fallen:

---

*) Es ist nämlich (Wolffs Zahlenlehre II. Th. § 607. No. 9):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(m + px - qx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{q}}\ \mathrm{arc}\left[\mathrm{tang} = \frac{2qx - p}{2\sqrt{q} \,.\, \sqrt{(m + px - qx^2)}}\right].$$

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}}\left[\operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = -\infty) - \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = +\infty)\right]$$

$$t = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Man sieht hieraus, dafs diese Zeit unabhängig ist von der Ordinate a, oder von der Höhe desjenigen Punktes, von welchem die Bewegung ausgeht, so dafs, wenn ein Massenelement von einem Punkte, dessen Ordinate gleich a, und ein anderes Massenelement von einem Punkte, dessen Ordinate a' ist, in demselben Augenblicke zu fallen beginnen, dennoch beide zu gleicher Zeit in dem Punkte C anlangen. Es werden also bei der Cykloïde alle Bögen, die man von irgend einem Punkte der Kurve bis zum Scheitelpunkte rechnen kann, in gleichen Zeiten durchfallen, und deshalb nennt man die Cykloïde in Bezug auf diese Eigenschaft tautochronische Linie; das Kreispendel ist dagegen nur für kleine Erhebungswinkel annähernd isochron.

Da die Cykloïde zu beiden Seiten der Linie CY symmetrisch ist, so läfst sich, wie beim Kreispendel, zeigen, dafs die Zeit, welche das Massenelement braucht, um von C aus sich wiederum bis zum Abstande a von der Horizontalen zu erheben, ebenfalls gleich t sein müsse. Demnach ist die Dauer einer Schwingung in der Cykloïde:

$$94)\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = \pi\sqrt{\frac{4r}{g}},$$

d. h. die Dauer der Schwingung ist ebenso grofs, wie bei einem isochron schwingenden Kreispendel, dessen Pendellänge gleich dem doppelten Durchmesser des erzeugenden Kreises der Cykloïde ist.

Denken wir die Cykloïde auf einen cylindrischen Körper, dessen Seiten vertikal sind, dessen Grundfläche aber eine ganz beliebige Form haben mag, aufgewickelt, und zwar so, dafs die Grundlinie der Cykloïde in einer horizontalen Ebene bleibt, so entsteht eine Kurve von doppelter Krümmung, welche aber immer noch dieselbe Eigenschaft des Tautochronismus haben mufs, wie die ursprüngliche Cykloïde, denn es ist für diese Kurve in dem Ausdruck:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{[2g(a-x)]}}$$

für denselben Werth von x das Kurvenelement ds von derselben Länge, wie bei der ursprünglichen Cykloïde, es hat also dt denselben Ausdruck, und folglich lassen sich daran dieselben Entwickelungen knüpfen, welche wir eben besprochen haben.

Es läfst sich ferner nachweisen *), dafs die Kurve, in welcher ein Massenelement von einem gegebenen Punkte nach einem andern, tiefer gelegenen, durch die Schwerkraft bewegt in der kürzesten Zeit gelangt, ebenfalls eine Cykloïde mit horizontaler Grundlinie ist, welche in dem Anfangspunkt des Falles beginnt und durch den tiefer gelegenen Punkt geht. Dieser Eigenschaft wegen nennt man die Cykloïde auch die Linie des kürzesten Falles, auch Brachystochrone. Der Beweis dieser Eigenschaft ist nur mittelst der Variationsrechnung zu liefern, wir müssen hier darauf verzichten, und verweisen in dieser Beziehung, sowie in Betreff des Beweises, dafs die Cykloïde mit horizontaler Grundlinie die einzige Tautochrone sei, auf das unten genannte Werk von Poisson **).

Allgemeines Gesetz für das Gleichgewicht eines Massenelements auf einer Kurve.

§ 59. **Bewegt sich ein Massenelement unter dem Einflufs verschiedener Kräfte in einer beliebigen Kurve, und ist die Resultirende aus diesen Kräften in irgend einem Augenblick normal zur Kurve, so sind die Kräfte in diesem Augenblick im Gleichgewicht, und umgekehrt: wenn die Kräfte in irgend einem Augenblick im Gleichgewicht sein sollen, so mufs die Resultirende normal zur Kurve sein.**

Dieser Satz folgt unmittelbar aus der Darstellung in § 55, denn für irgend einen Augenblick läfst sich die Resultirende als konstant wirkend betrachten (§ 33) und für eine konstant wirkende Kraft ist in § 55 nachgewiesen, dafs die Kräfte eine Gleichgewichtslage haben, wenn die Richtung der Resultirenden für einen gewissen Punkt normal zur Kurve ist.

Es sei (Fig. auf folg. Seite) AB eine beliebige ebene Kurve; das Massenelement befinde sich in a, und es wirken auf dasselbe die Drucke ein dG, parallel mit der Axe BX und dF parallel mit der Axe BY. Die Richtung des resultirenden Druckes ist dann zu bestimmen durch Gleichung 59) und mit Rücksicht auf Satz 2 in § 33 durch:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{dF}{dG},$$

wenn α den Winkel bezeichnet, den der resultirende Druck mit

---

*) Vergl. Traité de Mécanique par S. D. Poisson. T. I. § 285. S. 425.
**) Ebendaselbst. Tom. I. § 283. S. 422.

der Richtung dG macht. Soll nun die Lage a eine Gleichgewichtslage sein, so mufs diese Richtung des resultirenden Druckes normal zur Kurve sein, und für diesen Fall hat man auch:

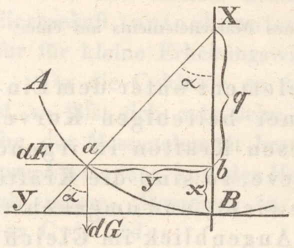
$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx},$$

folglich mufs für die Gleichgewichtslage immer die Gleichung statt finden:

$$95) \quad \frac{dF}{dG} = \frac{dy}{dx}.$$

Gleichgewicht eines Massenelements auf einer rotirenden Kurve.

§ 60. Denken wir nun, dafs dG der Druck der Schwerkraft sei, dafs die Axe BX vertikal sei, dafs die Kurve AB um die Axe BX gedreht werde, und dafs folglich das Massenelement der Einwirkung der Centrifugalkraft unterworfen sei. Da das Massenelement sich bei jener Drehung in einem Kreise bewegt, dessen Halbmesser die Ordinate y ist, so hat man, wenn w die Winkelgeschwindigkeit, und n die Anzahl der Umdrehungen bezeichnet, welche die Kurve in einer bestimmten Zeit $T_{,}$ macht, nach No. 79 und 80:



$$dF = d\,.\,\frac{dG}{g}\,.\,w^2\,.\,y = \frac{dG}{g}\,.\,\frac{4\pi^2}{T_{,}^2}\,.\,n^2 g.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung 95), so folgt für die Gleichgewichtslage:

$$\frac{n^2}{g}\,.\,\frac{4\pi^2}{T_{,}^2}\,.\,y = \frac{dy}{dx} = \tan\alpha,$$

folglich:

$$n = \frac{T_{,}}{2\pi}\,.\sqrt{\left(g\,.\,\frac{\tan\alpha}{y}\right)}.$$

Nun ist $\frac{y}{\tan\alpha} = Xb$ oder gleich der Subnormalen des Punktes a in Bezug auf die Drehaxe XB. Bezeichnen wir diese Subnormale Xb mit q, so ergiebt sich:

$$96) \quad n = \frac{T_{,}}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{q}}.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit der Gleichung 92), so ergiebt sich die Zahl der Schwingungen n' eines mathematischen Pendels, dessen Pendellänge gleich der Subnormalen ist, in derselben Zeit $T_{\prime}$:

$$n' = \frac{T_{\prime}}{\pi}\sqrt{\frac{g}{q}},$$

folglich doppelt so grofs.

Hierin liegt folgendes Gesetz:

Kann ein Massenelement in einer Kurve, welche in einer vertikalen Ebene liegt, und die sich um eine vertikale Axe dreht unter dem Einflufs der Schwerkraft und der Centrifugalkraft sich bewegen, so ist das Massenelement im Gleichgewicht, sobald die Anzahl der Umdrehungen, welche die Kurve um die Axe in einer gegebenen Zeit macht, halb so grofs ist, als die Zahl der Schwingungen eines mathematischen, isochron schwingenden Kreispendels, dessen Pendellänge gleich ist der, auf der Umdrehungsaxe gemessenen Subnormalen desjenigen Punktes der Kurve, in welchem das Massenelement sich befindet.

Gleichgewicht eines Massenelements auf einer rotirenden Parabel.

§ 61. Aendert sich die Zahl der Umdrehungen, und ist auch die Subnormale veränderlich, so wird das Massenelement sich auf der Kurve fortbewegen so lange, bis wieder die Bedingungs-Gleichung 96) erfüllt wird; es wird also, falls die Kurve die entsprechende Ausdehnung und Gestalt hat, für eine geänderte Anzahl von Umdrehungen endlich in eine neue Lage kommen, in welcher es wiederum im Gleichgewicht ist.

In der Praxis ist jedoch die Bedingung von Wichtigkeit, eine solche Kurve zu bestimmen, auf welcher das Massenelement sich zwar fortbewegt, sobald die Anzahl der Umdrehungen, damit die Centrifugalkraft dF und folglich auch die Richtung der Resultirenden zur Kurve sich ändert, die jedoch so beschaffen ist, dafs das Massenelement bei dieser Fortbewegung niemals auf der Kurve ins Gleichgewicht gelangen kann, wenn nicht die Anzahl der Umdrehungen in einer bestimmten Zeit wieder denselben Werth n erreicht hat, dafs aber, sobald dieser Werth wieder erreicht ist, das Massenelement, wo es sich auch auf der Kurve befinden mag, im Gleichgewicht sei.

Die gesuchte Kurve mufs offenbar die Eigenschaft haben, dafs ihre Subnormale für jeden Punkt konstant sei, denn wenn in der Gleichung:

$$n = \frac{T_{\prime}}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{q}}$$

die Subnormale q konstant ist, so kann die Gleichung nicht anders erfüllt werden, als wenn auch n einen konstanten Werth hat, sobald aber n diesen Werth erreicht, wird die Gleichung erfüllt, wo auch das Massenelement sich auf der Kurve befinden mag.

Bekanntlich ist die Parabel eine Kurve, deren Subnormale für die symmetrische Axe konstant gleich dem halben Parameter ist. Es folgt daher für die gesuchte Parabel die Gleichung:

$$x^2 = 2qy,$$

und wenn man q aus der Gleichung 96) entwickelt und hier einsetzt:

$$x^2 = \frac{T_{\prime}^2 \cdot g}{2\pi^2 \cdot n^2} \cdot y.$$

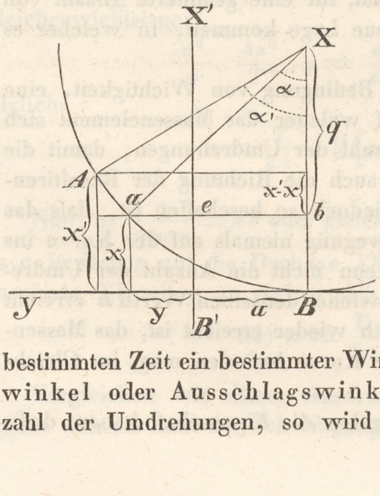
Bezeichnet n die Anzahl der Umdrehungen in einer Minute, so hat man $T_{\prime} = 60$, und nach Ausrechnung der Zahlenwerthe:

$$97)\ x^2 = 5684{,}115 \cdot \frac{y}{n^2}.$$

Hierdurch ist die Parabel bestimmt; die Rotationsaxe ist die Axe der X.

Gleichgewicht eines Massenelements auf einem rotirenden Kreisbogen.

§ 62. Ist die Kurve AB, in welcher sich das Massenelement bewegen kann, ein Kreisbogen, dessen Halbmesser $= r$ ist, und



welcher um seinen Durchmesser rotirt, so drückt sich die Subnormale aus durch:

$$q = r \cdot \cos\alpha,$$

und da r für jeden Punkt konstant ist, so findet man, indem man diesen Werth von q in die Gleichung 96) einsetzt:

$$98)\ n = \frac{T_{\prime}}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos\alpha}}.$$

Es entspricht daher jeder Anzahl von Umdrehungen in einer bestimmten Zeit ein bestimmter Winkel α, welcher der Erhebungswinkel oder Ausschlagswinkel heifst. Aendert sich die Anzahl der Umdrehungen, so wird auch der Ausschlagswinkel geändert, das Massenelement kann dann bei einer geänderten Umdrehungszahl ins Gleichgewicht kommen, aber nothwendiger Weise in einer andern Lage, und dies bedingt einen wesentlichen Unterschied mit dem eben betrachteten Fall (§ 61), wo sich das Massenelement in einer Parabelbahn bewegte.

Hat der Winkel α zugenommen bis α', so ist die Entfernung des Massenelements von der Horizontalen um

$$x' - x = r(\cos\alpha' - \cos\alpha)$$

gewachsen.

Der hier besprochene Fall setzt voraus, dafs der Mittelpunkt des Kreises, in welchem das Massenelement steigen und fallen kann, in der Rotationsaxe liege. Diese Annahme ist keineswegs nothwendig. Denken wir, es sei $X'B'$ die Rotationsaxe, während XB eine andre vertikale, durch den Mittelpunkt des Kreisbogens AB gehende Axe vorstelle. Der Abstand der Axe $X'B'$ von XB sei a. Für irgend eine Lage des Massenelements in a ist nun die Subnormale auf der neuen Axe:

$$q = ae = r \,.\, \cos\alpha - a \,.\, \operatorname{cotg}\alpha,$$

und folglich:

$$99)\quad n = \frac{T_{,}}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r \,.\, \cos\alpha - a \,.\, \operatorname{cotg}\alpha}}\,.$$

Bei dieser Anordnung ändert sich die Subnormale nicht in demselben Sinne, in welchem der Cosinus des Erhebungswinkels sich ändert. Es ist denkbar, dafs, während sich der Winkel α wachsend bis α' ändert, die Aenderung der Subnormale äufserst gering sein, dafs also für die Lagen des Massenelements in dem Bogen $\alpha' - \alpha$ die Subnormale fast einen konstanten Werth haben könne, und dafs mithin für diese Lagen der Kreisbogen, welcher um eine Sehne rotirt, näherungsweise dieselben Eigenschaften haben könne, welche die Parabel, die um ihre symmetrische Axe rotirt, für alle Lagen des Massenelements hat. Es wird dabei wesentlich auf die Entfernung a der Rotationsaxe von dem Mittelpunkt des Kreisbogens ankommen, und wir wollen, da dieser Gegenstand von praktischer Wichtigkeit ist, untersuchen, welchen Werth a haben müsse, damit für die Lagen des Massenelements in dem Bogen von $\alpha' - \alpha$ die Subnormale nahezu konstant bleibe.

Für den Erhebungswinkel α ist die Subnormale:

$$q = r \,.\, \cos\alpha - a \,.\, \operatorname{cotg}\alpha,$$

und für den Erhebungswinkel α' hat sie den Werth:

$$q' = r \,.\, \cos\alpha' - a \,.\, \operatorname{cotg}\alpha'.$$

Wenn nun die Subnormale für den Ausschlagswinkel α denselben Werth hat, als für α', so kann sie zwar für jeden zwischen α und α' liegenden Winkel einen andern Werth haben, allein sie wird, indem sich der Winkel von α bis α' ändert, sich nur in der Weise ändern können, dafs sie um eben soviel wächst, als sie abnimmt, so dafs also ihr mittler Werth derselbe bleibt. Wir setzen demnach:

$$q = q'; \quad r \cdot \cos\alpha - a \cdot \operatorname{cotg}\alpha = r \cdot \cos\alpha' - a \cdot \operatorname{cotg}\alpha',$$

folglich:

$$100)\quad a = r \cdot \frac{\cos\alpha - \cos\alpha'}{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\alpha'}.$$

Z. B. es soll das Massenelement, während es den Bogen von 30 Grad bis 45 Grad durchläuft, nahezu eine konstante Subnormale haben, wie weit mufs die vertikale Sehne, um welche der Kreisbogen rotirt, von dem Durchmesser desselben entfernt sein.

Es ist:

$$a = r \frac{\cos 30^0 - \cos 45^0}{\operatorname{cotg} 30^0 - \operatorname{cotg} 45^0}$$

$$a = 0{,}217 r.$$

Es ist dann die Subnormale:

$$q = r \cdot \cos\alpha - a \cdot \operatorname{cotg}\alpha$$
$$= r(\cos\alpha - 0{,}217 \operatorname{cotg}\alpha),$$

also für:

$$\begin{array}{ll}
30^0 & q = 0{,}4901 r \\
32^0 & q = 0{,}5007 r \\
34^0 & q = 0{,}5073 r \\
36^0 & q = 0{,}5103 r \\
37\tfrac{1}{2}^0 & q = 0{,}5106 r \\
38^0 & q = 0{,}5103 r \\
40^0 & q = 0{,}5074 r \\
42^0 & q = 0{,}5021 r \\
44^0 & q = 0{,}4946 r \\
45^0 & q = 0{,}4901 r.
\end{array}$$

Die gröfste Differenz der Subnormalen beträgt also nur circa $0{,}02 r$, und da sich die Umdrehungszahlen umgekehrt verhalten, wie die Quadratwurzeln aus den Subnormalen (No. 96), so wird, während das Massenelement auf diesem Bogen sich befindet, die Zahl der Umdrehungen, bei welchen es im Gleichgewicht ist, höchstens zwischen n und $n\sqrt{\frac{0{,}5106}{0{,}4901}} = 1{,}02 n$ variiren können.

Es ist übrigens hervorzuheben, daſs diese Betrachtungen nur zulässig sind, wenn a positiv ist, d. h. wenn die Rotationsaxe zwischen dem Mittelpunkt des Kreisbogens und dem Massenelement angenommen wird. Nimmt man sie auf der entgegengesetzten Seite, so ist immer:

$$q = r \,.\, \cos\alpha + a \,.\, \operatorname{cotg}\alpha$$
$$= \cos\alpha\left(r + \frac{a}{\sqrt{(1 - \cos\alpha^2)}}\right);$$

es ändert sich also q in demselben Sinn, wie $\cos\alpha$, und es können daher nie für zwei Winkel von verschiedenen Cos. gleiche Subnormalen statt finden.

c) Wirkung mehrer mechanischen Kräfte auf ein festes System von Massenelementen.

Festes System.

§ 63. Unter einem festen System von Massenelementen verstehen wir zwei oder mehre Massenelemente, welche in fester Verbindung (Th. I. § 3) mit einander stehen, die folglich mit einander so zusammenhängen, daſs sich keines unabhängig von dem andern bewegen kann, und deren Abstand unter einander daher stets unverändert bleibt, wie sich auch der Abstand der einzelnen Elemente von andern, nicht zu dem System gehörigen Punkten ändern mag (§ 12).

Jeder feste Körper stellt hiernach ein festes System von Massenelementen dar, so lange man von der Formänderung, welche er durch äuſsere Kräfte erleiden kann, absieht.

Ein Massenelement, welches sich vollkommen unabhängig von andern Massenelementen bewegen kann, welches also keinem festen System angehört, nennen wir frei.

Innere Kräfte eines festen Systems — Festigkeit.

§ 64. Wirkt eine Kraft auf ein zu einem festen System gehöriges Massenelement, so hat sie im Allgemeinen das Bestreben, den Abstand desselben von den übrigen Elementen des Systems zu ändern; da aber eine solche Aenderung nicht statt finden kann, so lange das System ein festes bleiben soll, so muſs dies Bestreben durch eine Gegenkraft aufgehoben werden. Es muſs also der Druck der äuſserlich auf das Massenelement wirkenden Kraft durch einen Gegendruck, welcher dem ersten der Gröſse nach gleich aber der Richtung nach entgegengesetzt ist, im Gleichgewicht