

$$\varphi = \int f, dt,$$

folglich, wenn wir φ in Bezug auf m konstant nehmen, nach 18):

$$20) L = m \int (\int f, dt) f, dt + \text{Const.},$$

welches Integral zwischen den Grenzen von t zu nehmen ist, die der Zeitdauer der Beobachtung entsprechen.

Ist endlich f keine Funktion von t , hat man es also mit einer konstant und kontinuierlich wirkenden Kraft zu thun, so ist:

$$21) L_{(t-t')} = \frac{1}{2} m f^2 (t^2 - t'^2)$$

und mit Rücksicht auf 7):

$$22) L_{(t-t')} = \frac{1}{2} K f (t^2 - t'^2).$$

Wir müssen hier darauf verzichten, noch mehr Formeln für eine Reihe von speziellen Fällen herzuleiten, die aus besondern Werthen hervorgehen würden, welche φ oder f annehmen können. Nur die Bemerkung mag hier schliesslich noch hervorgehoben werden, das die eben geführten Untersuchungen für alle Arten von Kräften, die auf Körper einwirken, gelten müssen, ohne Rücksicht auf die Art und Beschaffenheit der von den Kräften hervorzubringenden, oder wirklich hervorgebrachten Veränderungen; das ferner die Begriffe von Masse und lebendiger Kraft ganz bestimmte und allgemeine sind, und nicht, wie Poncelet behauptet *), nur uneigentliche, konventionelle Benennungen, die man eingeführt hat, um gewisse mathematische Ausdrücke kurz zu bezeichnen.

B. Von den mechanischen Kräften.

a) Wirkung einer mechanischen Kraft auf ein Massenelement.

Bewegung.

§ 12. Nach Feststellung jener allgemeinen Wahrheiten gehen wir zur Untersuchung derjenigen Kräfte über, welche uns hier besonders beschäftigen.

Unter den zahllosen Veränderungen, welche wir an den Körpern wahrnehmen, spielen eine große Rolle die Veränderungen des Ortes, oder derjenigen Stelle im Raum, welche die Körper einnehmen. Diese Ortsveränderungen nennen wir Bewegungen, und

*) Poncelet »Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen«, deutsch herausgegeben von Schnuse I. S. 10 und 11.

schreiben dieselben der Wirkung gewisser Kräfte zu, welche wir mechanische Kräfte nennen. Indem wir uns hier zunächst mit den mechanischen Kräften beschäftigen, wollen wir zuerst die Gesetze der Veränderungen untersuchen, welche diese Kräfte hervorzubringen vermögen, und wirklich hervorbringen, und sodann auf die Bestimmung der Gröfse der Kräfte und ihrer Wirkung eingehen.

Zwar sind alle Körper fortwährend in gemeinschaftlicher Bewegung, insofern sie ihre Stelle im Universum dauernd ändern, allein aufser dieser allgemeinen Bewegung bemerken wir auch, dafs gewisse unter diesen gemeinschaftlich bewegten Körpern ihren Ort im Vergleich zu dem Ort, den die andern Körper während der Bewegung einnehmen, ändern. In diesem Sinne nennen wir solche Körper relativ bewegte, die andern Körper aber ruhende. Betrachten wir nun ein System solcher relativ bewegten Körper, so können einzelne derselben wiederum im Vergleich zu den übrigen Körpern, mit denen sie sich übrigens gemeinschaftlich bewegen, ihre Stellung verändern. Solchen Körpern schreibt man dann wiederum in Bezug auf die andern eine relative Bewegung zu, und pflegt diejenige Bewegung, welche dem ganzen System gemeinschaftlich ist, im Gegensatz zu dieser relativen Bewegung, eine absolute Bewegung zu nennen; es bleibt dabei natürlich nicht ausgeschlossen, dafs diese absolute Bewegung in Vergleich zu der Stellung noch anderer Körper wieder als eine relative erscheint. Relative und absolute Bewegungen erscheinen daher immer nur als Gegensätze und als abgeleitete Begriffe, sie sind nicht Grundbegriffe, wie der Begriff der Bewegung selbst.

Wirkt eine mechanische Kraft auf ein Massenelement ein, so hat sie das Bestreben, dasselbe in gerader Linie fortzubewegen.

Die Lage dieser geraden Linie, in Vergleich zu andern Linien, nennt man die Richtung der Kraft.

Erfolgt wirklich eine Bewegung des Massenelementes, so bleibt dieselbe in Folge des Beharrungsvermögens (S. 6) bestehen, bis sie durch die Einwirkung einer andern Kraft geändert wird. Das Massenelement bewegt sich in gerader Linie fort; die Lage dieser geraden Linie heifst die Richtung der Bewegung. Kein Massenelement kann die Richtung seiner Bewegung ändern, oder die Bewegung ganz oder theilweise verlieren, wenn nicht als Ursache dieser Veränderung die Wirkung einer andern Kraft eintritt.

Bewegung eines Punktes, Bahn, Weg.

§ 13. Die Masse eines Körpers erfüllt den Raum, welchen der Körper einnimmt. Ein Massenelement können wir uns als die Masse denken, welche ein Raumelement erfüllt; als Raumelement gilt aber der körperliche Punkt. Ein Massenelement ist also die Masse, welche ein Punkt des Körpers besitzt. Man pflegt daher, anstatt der Bezeichnung Massenelement eines Körpers, häufig auch die Benennung „materieller Punkt“ oder kurz die Bezeichnung „Punkt“ zu brauchen, und wir wollen uns diesem Gebrauch anschließen, indem wir künftig unter Punkt, sobald nicht eine andere Bedeutung ausdrücklich hervorgehoben wird, überhaupt ein Massenelement verstehen.

Die Linie, welche ein Punkt bei seiner Bewegung beschreibt, nennen wir die Bahn des Punktes.

Die Bahn eines Punktes ist geradlinig, wenn der Punkt nur der Einwirkung einer einzigen Kraft, oder auch mehrerer Kräfte, welche in derselben Richtung wirken, folgt. Eine krummlinige Bahn setzt immer die Einwirkung mehrerer (wenigstens zweier) Kräfte voraus, deren Richtung nicht dieselbe ist.

Die absolute Länge der Bahn, welche ein Punkt in einer bestimmten Zeit zurücklegt, nennt man den Weg des Punktes für diese Zeit. Der Weg eines Punktes in einem Zeitelement heißt das Wegelement des Punktes. Wir bezeichnen dasselbe in der Folge mit ds .

Gleichförmige Bewegung.

§ 14. Das Wegelement eines Punktes ist entweder in jedem Zeitelement gleich groß, oder es unterliegt einer Aenderung. Wenn das Wegelement in jedem Zeitelement denselben Werth hat, so sagen wir, die Bewegung sei gleichförmig. Nach dem Früheren können wir uns eine gleichförmige Bewegung nur als möglich denken, wenn auf einen bewegten Punkt entweder gar keine mechanische Kräfte einwirken, oder wenn die auf denselben einwirkenden Kräfte sich im Zustande des Gleichgewichtes befinden, denn, wenn mechanische Kräfte auf den Punkt einwirken, und dieselben sind nicht im Zustande des Gleichgewichts, so müssen sie nothwendiger Weise eine Aenderung im Beharrungszustande des Punktes erzeugen, und da die Aenderungen, welche mechanische Kräfte erzeugen, Ortsveränderungen sind, die Ortsveränderungen aber durch die Wege gemessen werden, so muß unter der zuletzt gemachten Annahme nothwendiger Weise in jedem Zeitelement eine Wegänderung stattfinden.

Die gleichförmige Bewegung können wir uns entstanden denken, entweder:

a) dadurch, daß Kräfte, die eine Zeit lang auf einen Punkt einwirkten, aber nicht im Zustand des Gleichgewichts waren, plötzlich zu wirken aufhören, oder plötzlich in den Zustand des Gleichgewichts gelangen; in diesem Fall wird die Bewegung, die sie dem Punkte ertheilt haben, bestehen bleiben, aber keine Aenderung weiter erleiden; oder

b) dadurch, daß mechanische Kräfte auf einen Punkt, der nicht in Bewegung war, momentan einwirkten; in diesem Falle wird der Punkt Bewegung erhalten, aber die Bewegung wird nach § 10 in jedem folgenden Zeittheil ungeändert bleiben.

Die momentane Einwirkung mechanischer Kräfte auf einen materiellen Punkt nennen wir Stofs, und die gleichförmige Bewegung pflegt man daher auch wohl Stofsbewegung zu nennen.

Geschwindigkeit.

§ 15. Das Verhältnifs $\frac{ds}{dt}$, d. h. das Verhältnifs zwischen dem Wegelement zu der Dauer eines Zeitelementes nennt man die Geschwindigkeit, bezeichnen wir dieselbe mit c , so hat man:

$$23) \frac{ds}{dt} = c.$$

$$24) ds = c dt.$$

Diese Ausdrücke sind nicht zu verwechseln mit den sehr ähnlichen für das Aenderungselement und für das Aenderungsmaafs einer Kraft (S. 10. No. 1 und 2), welche wir gleich brauchen werden. Da wir dt als absolut konstant ansehen, so wird bei einer gleichförmigen Bewegung, in welcher also auch ds für jedes Zeitelement konstant ist, $\frac{ds}{dt} = c$ ebenfalls konstant sein. Es läßt sich also eine gleichförmige Bewegung auch so definiren, daß es eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit sei. Für die gleichförmige Bewegung folgt aus 24) durch Integriren:

$$25) \left\{ \begin{array}{l} s = ct \\ c = \frac{s}{t} \\ t = \frac{s}{c} \end{array} \right.$$

Wenn s der Weg in der Zeit t ist, so ist offenbar bei einer gleichförmigen Bewegung $\frac{s}{t}$ der Weg in einer Zeitein-

heit; da aber (zufolge 25) $\frac{s}{t} = c$ ist, so kann man allgemein die Geschwindigkeit auch definiren als den Weg, welchen ein Punkt in einer Zeiteinheit zurücklegen würde, falls er von irgend einem Augenblick ab sich gleichförmig bewegte.

Geschwindigkeits-Aenderung; Veränderte Bewegung, Acceleration.

§ 16. Wir haben oben gesehen, daß, wenn auf einen Punkt eine Kraft allein einwirkt, oder, wenn mehre Kräfte, welche nicht im Zustande des Gleichgewichts sich befinden, auf den Punkt einwirken, eine gleichförmige Bewegung nicht stattfinden kann. Es wird vielmehr in diesem Falle das Wegelement ds in jedem Zeitelement ein anderes sein. Die Bewegung eines Punktes unter diesen Umständen nennen wir eine ungleichförmige oder eine veränderte. Da zufolge der Gleichung 24) ds sich ausdrückt durch:

$$ds = c \cdot dt,$$

so muß, da dt absolut konstant ist, die Veränderung, welche durch den Einfluß jener mechanischen Kräfte erzeugt wird, sich auf den Werth c beziehen. Das heißt: die Veränderungen, welche mechanische Kräfte in dem Beharrungszustande eines Körpers hervorbringen, lassen sich als Geschwindigkeitsänderungen ansehen. Das Aenderungselement $d\varphi$ einer mechanischen Kraft ist hiernach nichts anders, als die Geschwindigkeitsänderung, welche die Kraft einem Massenelement in einem Zeitelement zu ertheilen vermag. Nennen wir dieselbe dc , so ist $d\varphi = dc$ und nach S. 10 No. 1):

$$d\varphi = dc = f \cdot dt;$$

es ist folglich die Geschwindigkeit c nach Verlauf einer gewissen Zeit t , oder die Endgeschwindigkeit für die Zeit t :

$$26) \quad c = \sum f \cdot dt.$$

Das veränderliche Wegelement ds drückt sich hiernach aus (24) durch:

$$27) \quad ds = (\sum f \cdot dt) dt.$$

Ist f eine Funktion von t , so ist:

$$28) \quad c = \int f \cdot dt$$

$$29) \quad ds = \left(\int f \cdot dt \right) dt,$$

und es ändern sich folglich die in den einzelnen Zeitelementen stattfindenden Geschwindigkeiten nach dem Gesetze des Werthes $\int f \cdot dt$.

Wenn man dagegen eine konstant wirkende Kraft betrachtet (S. 10), so findet man:

$$30) \quad c = ft.$$

$$31) \quad ds = c \cdot dt = ft \cdot dt,$$

d. h. bei konstant wirkenden mechanischen Kräften ändern sich die Geschwindigkeiten wie die Zeiten. Erfolgt die Bewegung nach diesem Gesetz, so nennen wir sie eine gleichmäfsig veränderte Bewegung, und zwar eine gleichmäfsig beschleunigte, wenn die Geschwindigkeiten wachsen, und eine gleichmäfsig verzögerte, wenn die Geschwindigkeiten fortwährend abnehmen. Erfolgt eine veränderte Bewegung nach einem andern Gesetze, so nennen wir sie eine ungleichmäfsig veränderte, und zwar bei fortwährendem Wachstum der Geschwindigkeiten eine ungleichmäfsig beschleunigte, bei fortwährender Abnahme der Geschwindigkeiten eine ungleichmäfsig verzögerte. Das Aenderungsmafs f nennt man bei mechanischen Kräften auch wohl die Acceleration oder die Beschleunigung, beziehlich Verzögerung.

Aus den Gleichungen 24), 29) und 31) ergibt sich der Gesamtweg s für eine bestimmte Zeit t :

für den allgemeinsten Fall:

$$32) \quad s = \Sigma(c \cdot dt),$$

d. h. man hat jedes Zeitelement mit der Geschwindigkeit, welche während desselben stattgefunden, zu multiplizieren, und die Produkte zu summiren.

Ist $c = \int f \cdot dt$ (28), so folgt aus 29):

$$33) \quad s = \int (\int f \cdot dt) dt.$$

und endlich für eine konstant wirkende Kraft, also für die gleichmäfsig veränderte Bewegung:

$$34) \quad s = \int_{t'}^t f t \cdot dt = \frac{1}{2} f (t^2 - t'^2),$$

worin s den Weg bezeichnet, welcher während der Zeitdauer $(t - t')$ zurückgelegt wird.

Gleichmäfsig veränderte Bewegung.

§ 17. Die gleichmäfsig veränderte Bewegung ist in der Mechanik von besonderer Wichtigkeit. Es mögen daher die eben gefundenen Resultate nebst einigen leicht herzuleitenden hier zusammengestellt werden.

Es bezeichne:

t die Zeit, während welcher eine konstant wirkende Kraft frei gewirkt hat,

s den Weg in dieser Zeit,

c die Geschwindigkeit nach Verlauf der Zeit t (Endgeschwindigkeit),

f das Aenderungsmaafs,

so ist:

$$35) \quad \left\{ \begin{array}{l} s = \frac{1}{2}ft^2 = \frac{1}{2}\frac{c^2}{f} = \frac{1}{2}ct \\ c = ft = \sqrt{2fs} = \frac{2s}{t} \\ f = \frac{c}{t} = \frac{2s}{t^2} = \frac{c^2}{2s} \\ t = \frac{c}{f} = \frac{2s}{c} = \sqrt{\frac{2s}{f}} \end{array} \right.$$

Für $t=1$, also für die Zeiteinheit folgt hieraus:

$$f = c = 2s,$$

d. h. das Aenderungsmaafs einer konstant wirkenden Kraft ist gleich der Geschwindigkeit, welche die Kraft einem Massenelement nach Verlauf der ersten Zeiteinheit (Sekunde) ertheilt hat, oder gleich dem doppelten Wege, welchen das Massenelement vermöge der Einwirkung der Kraft in der ersten Sekunde zurückgelegt hat.

Schwerkraft.

§ 18. Unter der grossen Menge von mechanischen Kräften, welche in der Natur wirksam sind, nimmt eine besonders hervorragende Bedeutung die Schwerkraft in Anspruch. Die Schwerkraft ist eine mechanische Kraft, deren Einwirkung alle Körper im ganzen Universum unterworfen sind, und welche man gewöhnlich als eine Anziehung darzustellen pflegt, welche sämtliche Massenelemente im ganzen Weltall gegeneinander ausüben, und derzufolge jedes Massenelement sich nach jedem andern hin zu bewegen strebt. Die Grösse dieser Anziehungskraft zwischen je zwei Massenelementen ist nach Newtons Entdeckungen umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung derselben. Es ist hier nicht der Ort, in allgemeine Untersuchungen dieser interessanten und bedeutungsvollen Kraft einzugehen, welche als ein grosses Gesetz durch das Weltall wirkt, und jedem unendlich kleinen Theil desselben eine Bedeutung beilegt, indem sie ihn mit jedem andern und mit dem grossen Ganzen in Beziehung bringt: wir haben hier der

Schwerkraft nur Erwähnung gethan, um die Wirkung zu bezeichnen, welche sie zwischen dem Erdkörper und jedem Körper, welcher demselben unmittelbar angehört, ausübt. Jeder auf der Erde befindliche Körper wird von jedem Element des Erdkörpers angezogen, und das Resultat dieser verschiedenen Anziehungen ist, daß jedes Massenelement eines Körpers das Bestreben hat, sich nach dem Mittelpunkt der Erde zu bewegen. Dies führen wir hier vorläufig nur als Thatsache an; der Beweis, daß diese Thatsache eine nothwendige Folge allgemeiner Gesetze für die Wirkung mechanischer Kräfte ist, läßt sich hier noch nicht führen. Hiernach ist die Richtung der Erdschwerkraft überall die Richtung des Erd-Radius, und folglich für verschiedene Punkte eines Körpers verschieden. Die sehr geringe Abweichung der Radien des Erdkörpers für benachbarte Punkte berechtigt aber zu der Annahme, daß man selbst für größere Entfernungen die Richtungen der Erdschwerkraft als parallel ansehen kann. Wird die Wirkung der Schwerkraft auf einen Körper nicht durch eine Gegenkraft aufgehoben, so erfolgt Bewegung in der Richtung der Kraft, also in der Richtung des Erdradius; die Bewegung, welche die Schwerkraft in Körpern erzeugt, welche dem System des Erdkörpers angehören, nennen wir den Fall der Körper. Die Körper fallen. Da die Größe der Kraft, welche das Fallen bewirkt, nach dem oben angeführten Newtonschen Gesetz sich umgekehrt mit dem Quadrat der Entfernung vom Erdmittelpunkt ändert, folglich in verschiedenen Entfernungen eine verschiedene ist, und da andererseits die Thatsache feststeht, daß die Erde keine vollkommene Kugel, sondern an den Polen abgeplattet ist, so folgt daraus, daß die Größe der Schwerkraft an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche verschieden groß sein muß, je nachdem der Erdradius einen verschiedenen Werth hat. Die Wirkung der Schwerkraft ist hiernach an den Polen größer, als am Aequator. Aber auch an ein und demselben Ort der Erde muß die Wirkung der Schwerkraft mit der Entfernung von der Erdoberfläche abnehmen. In dieser letzten Beziehung ist aber zu bemerken, daß die Entfernungen von der Erdoberfläche, mit welchen man es gewöhnlich zu thun hat, gegen den Erdradius so verschwindend klein sind, daß man sie für einen gegebenen Ort der Erde für die gewöhnlich vorkommenden Fälle vollkommen vernachlässigen kann, und folglich die Schwerkraft der Erde für einen bestimmten Ort als Beispiel einer konstant wirkenden Kraft betrachten kann, welche also, wenn sie frei wirkt, eine gleichmäßig veränderte Bewegung erzeugen muß.

Das Aenderungsmaafs der Schwerkraft ist für unsere Gegenden durchschnittlich

$$f = 31,25 \text{ preufsische Fufs.}$$

Wir bezeichnen dies Aenderungsmaafs künftig überall mit g .
 g bedeutet also künftig überall das Aenderungsmaafs (die Acceleration) der Schwerkraft an einem bestimmten Orte. Für unsere Gegenden ist hiernach:

$$36) \left\{ \begin{array}{l} g = 31,25 \text{ preufs. Fufs,} \\ g = 9,81 \text{ Mètres,} \\ g = 30,20 \text{ pariser Fufs,} \\ g = 32,20 \text{ englische Fufs,} \\ g = 31,03 \text{ wiener Fufs *)} \end{array} \right.$$

Mit Berücksichtigung dieser Werthe nehmen die Formeln (S. 20) für die durch die Schwerkraft gleichmäfsig veränderte Bewegung folgende Gestalt an, wenn die Bedeutung der Buchstaben dieselbe bleibt, wie auf S. 20.

$$37) \left\{ \begin{array}{ll} \text{für } g = 31,25 \text{ preufs. Fufs:} & \text{für } g = 9,81 \text{ Mètres:} \\ s = 15,625 t^2 = 0,016 c^2 = \frac{1}{2} ct, & s = 4,905 t^2 = 0,0510 c^2 = \frac{1}{2} ct, \\ c = 31,25 t = 7,906 \sqrt{s} = \frac{2s}{t}, & c = 9,81 t = 4,429 \sqrt{s} = \frac{2s}{t}, \\ g = \frac{c}{t} = \frac{2s}{t^2} = \frac{c^2}{2s}, & g = \frac{c}{t} = \frac{2s}{t^2} = \frac{c^2}{2s}, \\ t = 0,032 c = 0,253 \sqrt{s} = \frac{2s}{c}, & t = 0,1019 c = 0,4514 \sqrt{s} = \frac{2s}{c} \end{array} \right.$$

Druck; Gewicht.

§ 19. Nachdem wir in Vorstehendem die Veränderungen, welche mechanische Kräfte hervorbringen, im Allgemeinen untersucht haben, schreiten wir nun zur Bestimmung der Gröfse der mechanischen Kräfte.

Wir haben oben gesehen, dafs Kräfte im Zustande des Gleichgewichts sich im Allgemeinen der Wahrnehmung durch unsere Sinne entziehen. Die mechanischen Kräfte machen in gewisser Beziehung eine Ausnahme. Wirkt eine mechanische Kraft auf unsern Körper ein, und sind wir veranlafst, dieselbe durch unsern Körper im Gleichgewicht zu halten, so erregt sie unser sinnliches Gefühl in einer Weise, welche wir im Allgemeinen Druck nennen. Der Druck ist also vorläufig das Gefühl, welches in uns durch die Ausübung der Gegenkraft hervorgerufen wird. Wir gehen von

*) Weisbachs Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik. II. Aufl. I. S. 54.

dieser, zunächst durch unsere Sinne gewonnenen Vorstellung weiter, und bezeichnen allgemein mit der Benennung Druck den Einfluss, welchen eine nach Bewegung strebende, aber im Zustande des Gleichgewichts sich befindende mechanische Kraft auf einen Körper ausübt; den Einfluss der Gegenkraft, durch welchen die zuerst gedachte Kraft im Gleichgewicht erhalten wird, nennen wir den Gegendruck. Hiernach sind Druck und Gegendruck zwei ganz unzertrennliche Vorstellungen. Sobald eine mechanische Kraft im Gleichgewicht gehalten wird, also einen Druck ausübt, müssen wir uns schon nach dem Früheren stets eine Gegenkraft denken, welche die Wirkung der ersten aufhebt, und welche folglich einen Gegendruck auf den Körper ausübt.

Es ist hiernach die Bezeichnung Druck zwar nichts anders, als was wir auf S. 9 ganz allgemein Gröfse einer Kraft genannt haben, nur dafs wir überhaupt unter Druck die Gröfse einer mechanischen Kraft verstehen; allein vermöge jener sinnlichen Anschauung, welche wir durch unsern Körper von dem Druck gewinnen, sind wir im Stande einen neuen Ausdruck für das Maafs der Gröfse einer mechanischen Kraft herzuleiten. Wir brauchen nämlich nur die Gröfse einer mechanischen Kraft, welche auf einen Körper einwirkt (ihren Druck), nach dem Gegendruck zu beurtheilen, welchen unser Körper ausüben mufs, um jene Kraft im Gleichgewicht zu halten, indem wir einen bestimmten Gegendruck als Einheit annehmen.

Den Gegendruck, welchen wir ausüben müssen, um einen Körper, welcher durch die Schwere in Anspruch genommen ist, im Gleichgewicht zu halten, nennen wir das Gewicht des Körpers. Von dieser Vorstellung ausgehend, verstehen wir unter dem Gewicht eines Körpers allgemeiner den Gegendruck, welcher erforderlich ist, um einen durch die Schwere in Anspruch genommenen Körper im Gleichgewicht zu halten.

Wenn wir nun zur Bestimmung des Druckes, welchen mechanische Kräfte ausüben, irgend einen Gegendruck als Einheit annehmen sollen, so liegt es nahe, dazu einen Gegendruck zu wählen, welcher durch eine so allgemein verbreitete Kraft, wie die Schwerkraft ist, hervorgerufen wird. Wir werden dann den Druck, welchen alle anderen mechanischen Kräfte erzeugen, mit dieser bestimmten Einheit vergleichen. Der absolute Werth der Einheit ist vorläufig beliebig festzustellen, und man hat ihn in der That in verschiedenen Ländern verschieden grofs angenommen.

In Preussen hat man als Einheit für den Druck mechanischer Kräfte, denjenigen Gegendruck festgestellt, welcher erforderlich ist, um den sechs und sechzigsten Theil eines Kubikfusses destillirten Wassers bei einer Temperatur von 15 Grad Réaumur im luftleeren Raum im Gleichgewicht zu halten, wenn derselbe nur durch die Schwerkraft in Anspruch genommen wird. Diese Einheit heisst ein Pfund. Kürzer gesagt:

die Einheit des Druckes ist ein Pfund, oder das Gewicht von $\frac{1}{66}$ Kubikfuss destillirten Wassers bei 15 Grad Réaumur im luftleeren Raum.

In Frankreich ist die Einheit des Druckes das Gewicht eines Centimètre cube destillirten Wassers bei $+3,5^{\circ}$ R. und heisst diese Einheit ein Gramme.

Bestimmung des Druckes einer mechanischen Kraft; Maafs für die Masse.

§ 20. Wir haben nun zwei Mittel gefunden, die Gröfse einer mechanischen Kraft zu messen, nämlich 1) durch die Formeln S. 4 bis 8 und 2) durch den Druck, welchen sie ausübt. Die absoluten Zahlen, welche das Maafs für die Gröfse der Kraft geben, sind in beiden Fällen abhängig von dem Werth der Einheit; sie können verschieden sein; sie können aber unter Umständen auch gleich grofs sein. Da wir den Werth der Einheit für den Druck schon bestimmt haben, so wird es nur von dem Werthe der Einheit in der Formel 5)

$$K = \Sigma(dm \cdot f)$$

abhängen, ob beide Methoden die Gröfse einer mechanischen Kraft zu bestimmen gleiche Zahlen liefern oder nicht. Die Einheit für das Aenderungsmaafs ist die Längeneinheit, es ist aber die Einheit für die Masse noch nicht definitiv festgesetzt, und diese Einheit können wir daher noch beliebig wählen.

Es hat sich als zweckmäfsig herausgestellt, bei der Untersuchung mechanischer Kräfte die Masseneinheit so zu wählen, dafs, wenn man die Gröfse der Schwerkraft, welche auf einen Körper wirkt, einmal nach der Gewichtseinheit, und dann nach dem Ausdruck $\Sigma(dm \cdot f)$ misst, beide Bestimmungen dieselbe Zahl liefern. Da die Schwerkraft für jedes Massenelement erfahrungsmäfsig denselben Aenderungswerth g hat, so folgt aus der eben gemachten Annahme, und wenn wir das Maafs für die Gröfse der auf einen Körper einwirkenden Schwerkraft durch das Gewicht gemessen mit G bezeichnen, für die Gröfse der Kraft einmal

$$K = G,$$

und mit Anwendung der Formel 7) auf S. 11 auch:

$$K = mg,$$

und da beide Werthe von K dieselbe Zahl liefern sollen, so hat man:

$$38) \left\{ \begin{array}{l} G = mg \\ m = \frac{G}{g} \\ g = \frac{G}{m}. \end{array} \right.$$

Als Resultat dieser Untersuchungen ergibt sich zunächst, daß man die Größe jeder mechanischen Kraft überhaupt nach Pfunden bestimmen könne, und dann, daß sich dieselbe durch die Formeln auf S. No. 4 bis 7 ausdrücken lasse, indem nun für die Masseneinheit ein bestimmter Werth festgestellt worden ist.

Führen wir die eben bestimmten Werthe in jene allgemeinen Formeln (4 bis 7 S. 11) ein, so ergibt sich als allgemeiner Ausdruck:

$$39) K = \Sigma(dm \cdot f) = \frac{1}{g} \Sigma(dG \cdot f).$$

Ist f eine Funktion von m , so findet man:

$$40) K = \int f_m dm + \text{Const.} = \int f\left(\frac{G}{g}\right) \cdot d\frac{G}{g} + \text{Const.}$$

Ist dagegen f für jedes Massenelement dasselbe, so folgt:

$$41) K = mf = \frac{f}{g} G.$$

$$42) f = \frac{K}{m} = g \frac{K}{G}.$$

Bestimmung der Wirkungsgröße einer mechanischen Kraft durch die Geschwindigkeits-Aenderung.

§ 21. Nach diesen Vorausbestimmungen kann es nicht schwer fallen, die Wirkungsgröße der mechanischen Kräfte, wenn sie frei wirken zu bestimmen, sei es, daß sie nur momentan, oder daß sie kontinuierlich wirken. Wir benutzen dazu die früher ganz allgemein hergeleiteten Formeln.

Da die Aenderungen mechanischer Kräfte nach dem Früheren überhaupt Geschwindigkeits-Aenderungen sind, so wird, wenn wir die Geschwindigkeit in irgend einem Augenblick mit c bezeichnen, überall in den allgemeinen Formeln anstatt φ der Werth c gesetzt werden müssen.

Es ergibt sich sodann für momentan wirkende Kräfte allgemein das Leistungselement für ein Zeitelement (S. 12):

$$43) \quad dW_{at} = dm \cdot dc,$$

und für eine kontinuierlich wirkende Kraft nach S. 13 (No. 13).

$$44) \quad dL_{at} = dm \cdot c \cdot dc,$$

folglich das Leistungselement für eine bestimmte Zeitdauer:
für eine momentan wirkende Kraft:

$$45) \quad dW_{(t-t')} = dm \int_{c'}^c dc = dm(c - c'),$$

und für eine kontinuierlich wirkende Kraft:

$$46) \quad dL_{(t-t')} = dm \int_{c'}^c c \cdot dc = \frac{1}{2} dm(c^2 - c'^2),$$

worin c' die Geschwindigkeit zu Anfange, c diejenige zu Ende der Beobachtung bezeichnet, wenn t' die Zeit bedeutet, welche von dem Augenblicke der freien Einwirkung der Kraft bis zu dem Augenblicke, in welchem die Beobachtung beginnt, verflossen ist, und t diejenige, welche bis zur Vollendung der Beobachtung verflossen ist.

Die Leistung der Kraft für den ganzen Körper läßt sich aus diesem Leistungselement in bekannter Weise, sei es durch direktes Summiren, sei es durch Integriren, bestimmen.

Die beiden Gleichungen enthalten folgende Gesetze:

1) Die Leistung einer lebendigen Kraft, welche auf ein Massenelement momentan wirkt, drückt sich für eine bestimmte Zeit aus durch das Produkt aus dem Massenelement in die Differenz der Geschwindigkeiten, welche das Massenelement zu Anfange und zu Ende der Beobachtung besitzt.

2) Die Leistung der lebendigen Kraft, welche auf ein Massenelement kontinuierlich, gleichviel ob konstant oder veränderlich wirkt, drückt sich aus für eine bestimmte Zeit durch das halbe Produkt aus dem Massenelement in die Differenz der Quadrate der Geschwindigkeiten, welche das Massenelement am Anfang und am Ende der Beobachtung besitzt.

Einen Ausdruck von der Form $dm \cdot c$ nennt man auch wohl die Quantität oder Gröfse der Bewegung des Massenelementes, den Ausdruck $\frac{1}{2} dm \cdot c^2$ aber kurzweg die lebendige Kraft des Massenelementes und den Ausdruck von der Form $\frac{1}{2} dm(c^2 - c'^2)$ den Gewinn des Massenelementes an lebendiger Kraft.

Bestimmung der Wirkungsgröße einer mechanischen Kraft durch den Druck und den Weg.

§ 22. Da sich nach den Gesetzen für die Bewegung ausdrückt ganz allgemein (S. 17 und 18)

$$c = \frac{ds}{dt}; \quad dc = f dt,$$

so läßt sich für eine kontinuierlich wirkende Kraft das Leistungselement für ein Zeitelement auch schreiben:

$$\begin{aligned} dL_{at} &= dm \cdot c \cdot dc = dm \frac{ds}{dt} \cdot f dt. \\ &= dm f \cdot ds, \end{aligned}$$

worin ds das Wegelement ist, welches das Masselement in einem Zeitelement zurückgelegt hat. Es ist aber $dm \cdot f = dK$ (S. 11. No. 4), folglich:

$$47) \quad dL_{at} = dK ds = dm \cdot c \cdot dc = dm \cdot f \cdot ds.$$

In dieser Gleichung liegt das wichtige Gesetz:

die Leistung einer mechanischen Kraft, welche kontinuierlich, gleichviel ob konstant oder veränderlich auf ein Masselement wirkt, ist in jedem Zeitelement gleich dem Produkt aus dem Druck der Kraft in den Weg, welchen das Masselement durch die Kraft bewegt, zurücklegt.

Ist die Kraft für die Zeitdauer ($t-t'$) konstant, so ist auch $f \cdot dm = dK$ konstant, und bezeichnet s den Weg während der Zeit ($t-t'$), welchen das Masselement, durch die Kraft bewegt, zurücklegt, so hat man:

$$48) \quad dL_{(t-t')} = dm \cdot f \cdot s = dK \cdot s = \frac{1}{2} dm (c^2 - c'^2).$$

Ist endlich für den ganzen Körper, sowohl der Druck auf jedes Masselement, als auch der Weg konstant, so folgt:

$$49) \quad L = K \cdot s = \frac{1}{2} m (c^2 - c'^2).$$

Fußpfund, Pferdekraft.

§ 23. Das Produkt $K \cdot s$ ist gebildet aus dem Maafs für den Druck K , welcher nach Gewichtseinheiten (Pfund) gemessen ist, und aus dem Maafs für den Weg s , welcher nach Längeneinheiten (Fussen) gemessen wird.

Die Einheit für Ks ist also weder ein Pfund noch ein Fufs, sondern eine ganz neue Einheit, nämlich die Leistungseinheit für eine Kraft. Naturgemäfs nimmt man für diese Einheit eine solche Leistung an, welche in der Bewegung einer Druckeinheit (eines Pfundes) um eine Längeneinheit (einen Fufs) besteht, und

nennt diese Einheit, der Zusammensetzung entsprechend, ein Fufspfund. Drückt man also die Leistung einer Kraft durch das Produkt Ks aus, so sagt man, sie betrage in einer bestimmten Zeit Ks Fufspfund und schreibt der Ausdruck häufig:

$$L = Ks^{(fuf)}.$$

Die Franzosen nehmen als Leistungseinheit die Bewegung eines Drucks von 1 Kilogramme um 1 Mètre an, und bezeichnen dieselbe als Kilogrammètre, geschrieben:

$$L = Ks^{km} \text{ oder } L = Ks^k \times m.$$

Es ist:

$$50) \begin{cases} 1^{fuf} = 0,1468^{km} \\ 1^{km} = 6,8121^{fuf}. \end{cases}$$

Ist die Leistung während der Zeitdauer, in welcher sie hervorgebracht wurde, konstant, und bezeichnet man diese Zeitdauer mit t , so ist die Leistung in der Zeiteinheit:

$$51) \frac{L}{t} = \frac{Ks}{t} = K \frac{s}{t}.$$

Wenn nun die Leistung dadurch konstant ist, daß sowohl die in einzelnen Zeitelementen wirkenden Drucke, als auch die Wege dieser Drucke konstant sind, so folgt, daß die Bewegung selbst eine gleichförmige ist. In diesem Fall hat man $\frac{s}{t} = c$, wenn c die konstante Geschwindigkeit bezeichnet, und es folgt die Leistung in der Zeiteinheit:

$$52) \frac{L}{t} = K \cdot c.$$

Die Leistung in einer Zeiteinheit nennen wir die Intensität der Kraft, und es ergibt sich für eine Bewegung mit gleichförmiger Geschwindigkeit die Intensität gleich dem Produkt aus dem Druck in die Geschwindigkeit.

Eine Kraft, deren Intensität 510 Fufspfund oder 75 Kilogrammètres in der Sekunde beträgt, nennt man eine Pferdekraft. Man mißt die Intensität einer Kraft häufig, indem man eine Pferdekraft als Einheit nimmt. Bezeichnet:

N die Anzahl der Pferdekraften, so folgt:

$$53) \left\{ \begin{aligned} \frac{L}{t} &= Kc = N \cdot 510 \text{ Fufspfund} = N \cdot 75^{km} \\ N &= \frac{Kc^{fuf}}{510} = \frac{Kc^{km}}{75} \\ K &= \left(\frac{N \cdot 510}{c \text{ Fufs}} \right) \text{ Pfund} = \left(\frac{N \cdot 75}{c \text{ Mètres}} \right) \text{ Kilogramm.} \\ c &= \left(\frac{N \cdot 510}{K \text{ Pfund}} \right) \text{ Fufs} = \left(\frac{N \cdot 75}{K \text{ Kilogr.}} \right) \text{ Mètres.} \end{aligned} \right.$$

Ist die Leistung während der Zeitdauer, in welcher sie hervorgebracht ist, nicht konstant, so kann man dafür einen gewissen mittleren Werth einführen, insofern man unter dem mittleren Werth einer veränderlichen Gröfse einen solchen konstanten Werth versteht, welcher in irgend einer Beziehung dasselbe Resultat erzeugt, wie der veränderliche Werth. Die obigen Formeln 51 bis 53 geben zugleich die mittleren Werthe für K , $c \frac{L}{t}$ u. s. w., wenn diese Gröfsen während der Zeit t veränderlich waren.

b) Wirkung mehrerer mechanischen Kräfte auf ein Massenelement.

Grundsätze für die Wirkung mehrerer Kräfte auf ein Massenelement — Zusammensetzen, Zerlegen der Kräfte. Allgemeine Bedingungen des Gleichgewichts.

§ 24. In den vorhergehenden Untersuchungen haben wir überall nur eine Kraft auf ein Massenelement wirkend gedacht. Zwar haben wir bei der Bestimmung des Druckes den Zustand des Gleichgewichts und somit nach den früheren Betrachtungen stillschweigend zwei Kräfte, deren Wirkungen sich aufheben, vorausgesetzt, allein wir haben den Gleichgewichtszustand immer nur als einen gegebenen und möglichen Fall betrachtet, ohne zu untersuchen, unter welchen Bedingungen dieser Fall eintreten kann. Gegenwärtig schreiben wir zur Untersuchung der Verhältnisse, welche eintreten, wenn zwei oder mehrere Kräfte auf ein Massenelement wirken. Wir stellen zu diesem Zweck zunächst einige Grundsätze auf, die wir künftig mehrfach brauchen werden.

1) Wenn mehrere Kräfte gleichzeitig auf ein Massenelement wirken, so ist das Resultat ihrer Gesamtwirkung während eines Zeitelementes dasselbe, welches auch erreicht worden wäre, wenn dieselben Kräfte während desselben Zeitelementes in einer beliebigen Reihenfolge gewirkt hätten, so dafs das Massenelement während eines Theils des Zeitelementes zuerst der Wirkung und der Richtung der einen Kraft, dann der Wirkung und der Richtung einer folgenden etc. gefolgt wäre.

2) Diese Vorstellung hindert nicht, dafs wir uns, anstatt der mehreren Kräfte, welche gleichzeitig auf ein Massenelement wirken, eine einzige Kraft denken können, welche so beschaffen ist, dafs sie, wenn sie allein wirkte, während desselben Zeitelementes in dem Massenelement dieselbe Wirkung erzeugen würde, welche die verschiedenen einzelnen Kräfte zusammen erzeugen. Diese Kraft nennt man die